

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ДВУСТОРОННИХ РЕШЕНИЙ

Б. С. ДОБРОНЕЦ

Красноярский государственный технический университет, Россия

e-mail: root@dobronets.krasnoyarsk.su

In paper a problem of optimization of computing costs for achievement of given width to two-sided solution of boundary value problem of elliptic type is considered.

1. Введение

При решении большинства практических задач пользователя программного обеспечения интересует гарантированная точность с наименьшими затратами. Как правило, наиболее быстрые алгоритмы и обеспечивают наименьшие вычислительные затраты для достижения заданной точности. При построении двусторонних решений достигнутая точность оценивается по ширине решения. При построении двусторонних решений краевых задач для уравнений в частных производных заранее трудно оценить параметры сетки, необходимой для достижения требуемой точности. В связи с этим наиболее удобным будет последовательное построение двустороннего решения начиная с самых грубых сеток и кончая сеткой, дающей нужную точность. В работе построены двусторонние решения с использованием теоремы сравнения и теории операторов монотонного типа.

2. Формулировка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f, \quad x \in \Omega,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\bar{\Omega}, \quad (1)$$

где Ω — ограниченная, связанная область пространства R^n , L — дифференциальный оператор второго порядка вида

$$Lu = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + qu. \quad (2)$$

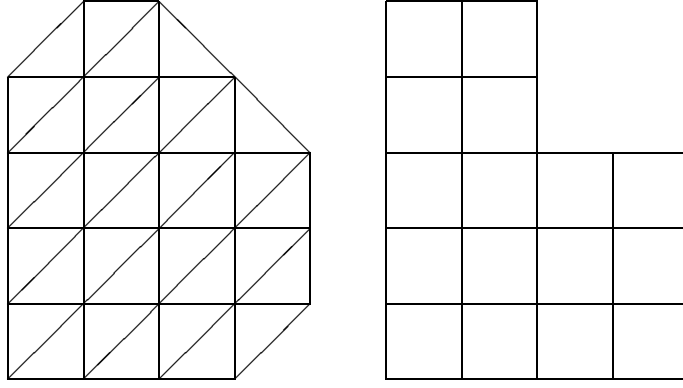


Рис. 1. Пример областей и разбиений.

Предположим, что коэффициенты $a_i \in C^1(\Omega)$, $q, f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ и что

$$a_i \geq c > 0, \quad q \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Предположим также, что решение (1) существует, единственно и $u \in C^4(\Omega)$. Пусть $\mathcal{T}_i, i : 0, 1, \dots, m$ — последовательность разбиений Ω , состоящих из элементов T таких, что

$$\bar{\Omega} \subseteq \cup_i T_i, \quad T_i \cap T_j = \emptyset, \quad \text{или общий угол или общую сторону, } i \neq j.$$

Если \mathcal{T}_i — триангуляция, то пространство конечных элементов S_l^n определим введением кусочно-полиномиального базиса на \mathcal{T}_i :

$$S_l^n(\mathcal{T}_h) = \{s(x) | s \in W_2^l(\Omega), s|_T \in \mathcal{P}^n, T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3)$$

где \mathcal{P}^n — пространство полиномов степени n .

3. Построение оператора аппроксимации

Здесь мы опишем вспомогательные результаты по построению конечных элементов на различных разбиениях.

Рассмотрим задачу аппроксимации функции $s_i \in S_{l_1}^{n_1}(\mathcal{T}_i)$ конечными элементами $s_j \in S_{l_2}^{n_2}(\mathcal{T}_j)$ или, другими словами, мы рассмотрим оператор аппроксимации $A : S_{l_1}^{n_1}(\mathcal{T}_j) \rightarrow S_{l_1}^{n_1}(\mathcal{T}_i)$

$$s_i = A(\mathcal{T}_i, s_j). \quad (4)$$

Для построения оператора $A(\mathcal{T}_i, s_j)$ необходимо знать некоторое множество значений $s_i(x)$, $D_{i,j}s_i(x)$, $i, j = 0, 1, 2, \dots$, для некоторых точек $x \in \bar{\Omega}$. Например, пространство $S_2^5(\mathcal{T})$ определяется значениями $\{s, D_1s, D_2s, D_{11}s, D_{12}s, D_{22}s\}$ в узлах триангуляции и $D_n s$ в серединах сторон.

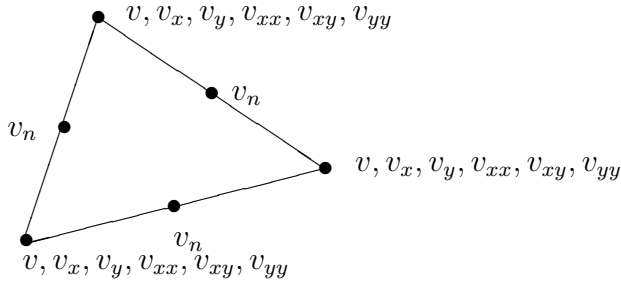


Рис. 2. Пространство $S_2^5(T)$.

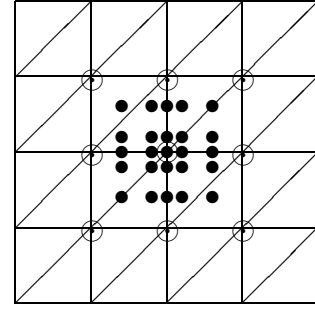


Рис. 3. Пример вспомогательных сеток.

Пусть $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2})$ одна из таких точек. В некоторых случаях необходимые значения производных можно вычислить, непосредственно используя функцию s_j на разбиении T_j . В большинстве случаев это затруднительно. В этой ситуации мы воспользуемся следующими результатами [2].

Рассмотрим локальные вспомогательные сетки: $Z_{r,\delta,d} = \{z_{i,j}\}$, $z_{i,j} = (z_{i,j,1}, z_{i,j,2})$:

$$z_{i,j,1} = \text{sign}(i)\text{abs}(i\delta)^r/d + x_{0,1}, \quad z_{i,j,2} = \text{sign}(j)\text{abs}(j\delta)^r/d + x_{0,2}, \quad i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где r, δ, d — параметры и $r \geq 1, \delta > 0, d > 0$.

Определим p как обобщенный полином $p = \sum_{l=0}^{n_p} a_l \psi_l(x - x_0)$ так, что

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i |p(v_i^1) - u^h(v_i^1)|^2 + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i |Lp(v_i^2) - f(v_i^2)|^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

где ψ_i — линейно независимые функции. Пусть для определенности

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_1(x) = x_1, \quad \psi_2(x) = x_2, \quad \psi_3(x) = x_1^2, \dots,$$

$$\psi_{n_p}(x) = x_2^n, \quad n_p = (n + 2)(n + 1)/2,$$

$\{v_i^1\}_{i=1}^{n_1}$ и $\{v_i^2\}_{i=1}^{n_2}$ — узлы вспомогательных сеток, расположенных в непосредственной близости от точки x_0 . Здесь $v_i^1 \in \Omega_h, v_i^2 \in Z_{r,\delta,d}, n_1 + n_2 \geq n_p + 1, n_1 \geq 2n + 1$,

$$\alpha_i = \alpha_{-1}/(\rho(v_i^1, x_0)^{n+1} + \alpha_{-2}),$$

$$\beta_i = \beta_{-1}/(\rho(v_i^2, x_0)^{n-1} + \beta_{-2}),$$

где $\rho(x, y)$ — расстояние между точками x, y ; α_{-i}, β_{-i} выражаются в терминах точности численного решения u^h :

$$\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \beta_{-1} \approx \|u - u^h\|_{L_\infty(\Omega_h)},$$

$$\beta_{-2} \approx h \|u - u^h\|_{L_\infty(\Omega_h)}.$$

Задача (5) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$Ba = d,$$

где

$$B = \{b_{ij}\}_{i,j=0}^{n_p},$$

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n_p}),$$

$$b_{ij} = \sum_{l=1}^{n_1} \alpha_l \psi_i(v_l^1 - x_0) \psi_j(v_l^1 - x_0) + \sum_{l=1}^{n_2} \beta_l L \psi_i(v_l^2 - x_0) L \psi_j(v_l^2 - x_0),$$

$$d_i = \sum_{l=1}^{n_1} \alpha_l u^h(v_l^1) \psi_i(v_l^1 - x_0) + \sum_{l=1}^{n_2} \beta_l f(v_l^2) L \psi_i(v_l^2 - x_0).$$

Таким образом, мы можем положить $s(x_0) = p(x_0)$, $\partial_{i,j}^{i+j} s(x_0) = \partial_{i,j}^{i+j} p(x_0)$.

4. Построение двустороннего решения

Ниже кратко описывается способ построения двусторонних решений. Метод основан на принципе монотонности [3].

Пусть u^h — численное решение исходной задачи и $s \in S_2^3$ — аппроксимация этого численного решения методом, описанным выше.

Будем использовать дефект

$$\varphi(x, s) = Ls - f(x), \quad x \in \Omega. \quad (6)$$

Численно решим вспомогательную задачу

$$Lu_1 = 1, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \partial\bar{\Omega} \quad (8)$$

и построим s_1 аналогичным образом.

Двустороннее решение будем искать в виде

$$\mathbf{u} = s + [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]s_1 + [\underline{\beta}, \bar{\beta}],$$

где

$$\bar{\alpha} = \max_{\Omega} (-\varphi/Ls_1), \quad \underline{\alpha} = \min_{\Omega} (-\varphi/Ls_1),$$

$$\bar{\beta} = \max_{\partial\Omega} (-\bar{\alpha}s_1 - s, 0), \quad \underline{\beta} = \min_{\partial\Omega} (-\underline{\alpha}s_1 - s, 0).$$

5. Уменьшение ширины двустороннего решения

Как известно, ширина двустороннего решения $\text{wid}(\mathbf{u})$ значительно зависит от значений производных в узлах сетки. В данном разделе описываются возможные способы уточнения производных.

Пусть $s \in S_2^n(\mathcal{T}_m)$ — некоторое приближенное решение задачи (1). Используя это решение как начальное приближение, мы построим новое решение s_{dec} , дающее двустороннее решение меньшей ширины.

Мы будем искать s_{dec} как приближенное решение задачи

$$\Phi_p(s_{\text{dec}}) = \min_{v \in S_2^n(\mathcal{T}_m)} \Phi_p(v), \quad (9)$$

где $\Phi_p(v)$

$$\Phi_p(v) = \|Lv - f\|_{L_p(\Omega)} + K\|v\|_{L_p(\partial\Omega)}.$$

Заметим, что ширина двустороннего решения \mathbf{s} , построенного с использованием некоторой функции s , ограничена следующим неравенством:

$$\text{wid}(\mathbf{s}) \leq C \max_{\bar{\Omega}} |Ls - f| + \max_{\partial\Omega} |s|. \quad (10)$$

Следовательно, для уменьшения ширины двустороннего решения мы должны выбрать функцию s , такую, что она минимизирует правую часть неравенства (10). Заметим, что функция $s = s(V)$ полностью определена параметрами V в узлах сетки \mathcal{T} . Предположим, что V^* определяет лучшую функцию s в смысле ширины $\text{wid}(\mathbf{s})$, тогда

$$\Phi_\infty(V^*) = \min_V \Phi_\infty(V), \quad (11)$$

$$\Phi_\infty(V) = C \max_{\bar{\Omega}} |Ls - f| + \max_{\partial\Omega} |s|.$$

Поскольку задача (11) весьма сложная, мы будем искать ее приближенное решение. В качестве аппроксимации функционала Φ_∞ рассмотрим семейство функционалов $\Phi_p = \|Ls - f\|_{p,\omega_h} + \|s\|_{p,\partial\omega_h}$, где $p > 0$ — целый параметр,

$$\|v\|_{p,\Omega_h} = \left(\sum_{x \in \Omega_h} |v|^p \right)^{1/p}, \quad (12)$$

$\omega_h, \partial\omega_h$ — вспомогательные сетки. Если вектор V отличается от оптимального V^* , мы можем исправить его, найдя V_1 , выбирая соответствующий параметр p и вспомогательные сетки ω_h , такие, что

$$\Phi_p(V_1) < \Phi_p(V) \implies \Phi_\infty(V_1) < \Phi_\infty(V).$$

Таким образом, используя $s_{\text{dec}} = s(V_1)$, мы можем построить двустороннее решение меньшей ширины.

Рассмотрим для решения задачи специальный метод покоординатного спуска. Зафиксируем значения параметров V_j во всех узлах сетки \mathcal{T}_m , исключая узел сетки с номером i . Тогда функция s будет зависеть только от набора параметров V_i , и мы обозначим s как $s(x, V, i)$.

Уточним V_i

$$\Phi_p^h(V_i) = \min_V \Phi_p^h(V).$$

Продолжив циклически уточнять V_i по всем узлам сетки, получим последовательность функций $s^i, i = 1, 2, \dots$. Процесс уточнения начинаем с узлов вблизи границы области $\partial\bar{\Omega}$ и движемся по направлению к центру. Такой выбор последовательности узлов обусловлен тем фактом, что вблизи границы $\partial\bar{\Omega}$ значения параметров V_i определяются точнее (известны точные значения функции на границе).

6. Многосеточный алгоритм

Пусть задана точность или допустимая ширина двустороннего решения $\varepsilon > 0$. Потребуем, чтобы ширина двустороннего решения не превышала ε :

$$\text{wid}(\mathbf{s}) < \varepsilon x \in \bar{\Omega}. \quad (13)$$

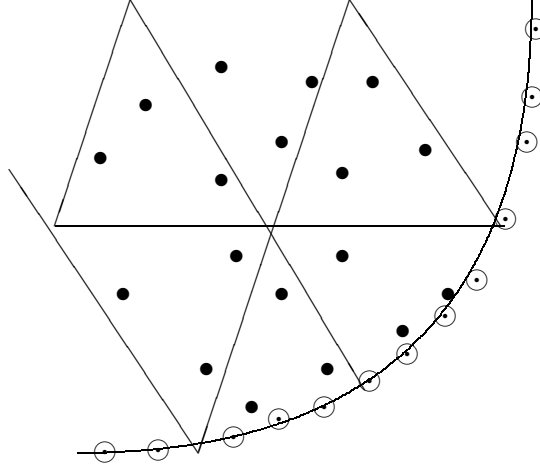


Рис. 4. Примеры вспомогательных сеток.

Построим функцию $s_M \in S_2^n(\mathcal{T}_M)$, такую, что $\text{wid}(\mathbf{s})$ удовлетворяет соотношению (13). При решении практических задач мы стремимся строить решение за минимальное число операций. Многосеточные методы — одни из таких алгоритмов.

Пусть $p_0 = 2 < p_1 < \dots < p_m \leq \infty$ — последовательность целых чисел и пусть численное решение задачи (1) $s_0 \in S_2^n(\mathcal{T}_0)$ построено с использованием метода конечных элементов на сетке \mathcal{T}_0 и известно, что размерность пространства $S_2^n(\mathcal{T}_0)$ невелика.

Замечание 1. Если нам известно численное решение u^h , полученное разностным методом или методом конечных элементов, с применением кусочно-линейных элементов, начальное приближение $s_0 \in S_2^n$ на сетке \mathcal{T}_0 мы можем построить, используя аппроксимации конечными элементами высоких порядков и алгоритм уменьшения ширины двустороннего решения.

Пусть $C_0 = \Phi_{p_0}(V_0)$ и $C_i = \Phi_{p_i}(V_i)$. Рассмотрим переход с сетки \mathcal{T}_{m-1} на сетку \mathcal{T}_m . Предположим, что мы имеем решение $s_{m-1} \in S_2^n(\mathcal{T}_{m-1})$. Построим решение s_m на \mathcal{T}_m с

$$C_m \approx \left(\frac{h_m}{h_{m-1}} \right)^{n-1} C_{m-1}.$$

Шаг 1 (аппроксимация). Используя оператор аппроксимации из раздела 3, построим $s_{m,0}$

$$s_{m,0} = A(\mathcal{T}_m, s_{m-1}).$$

Шаг 2 (уточнение). Используя метод уточнения решений, рассмотренный в разделе 6.6, мы можем уточнить $s_{m,0}$ и построим $s_{m,1}$.

Шаг 3 (уменьшение). В заключение построим решение s_m на сетке \mathcal{T}_m , используя оператор уменьшения ширины двустороннего решения с $p = p_m$:

$$s_m = D(s_{m,1}).$$

Вычислим ширину двустороннего решения, если ширина построенного двустороннего решения удовлетворяет неравенству (13), следовательно, требуемое решение построено, в противном случае переходим на следующую сетку \mathcal{T}_{m+1} .

Замечание 2. Один из возможных путей уменьшения ширины двустороннего решения — сгущение сетки в окрестности точек с большими значениями невязок.

Пусть $u \in C^{n+1}(\Omega)$, тогда ширина окончательного двустороннего решения \mathbf{s} удовлетворяет соотношению

$$\|\text{wid}(\mathbf{s})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq Kh^{n-1}, \quad (14)$$

где h — шаг сетки \mathcal{T}_M , K — константа, не зависящая от h .

7. Численный пример

Рассмотрим модельную задачу

$$\Delta u = f \in \Omega, \quad (15)$$

$$u_i = 0 \in \partial\bar{\Omega}, \quad (16)$$

где

$$f = -2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1].$$

Точное решение этой задачи:

$$u = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2).$$

Пусть нам необходимо построить двустороннее решение с шириной, не превышающей $\varepsilon = 0.01$. Функция s искалась в виде эрмитовых сплайнов третьей степени, сетки выбирались равномерные с шагами $h_i = 2^{-i}$, параметры $p_i = 2^i$.

Первая сетка имела всего одну внутреннюю точку. Сплайн $s_0(V_0)$ был построен как приближенное решение задачи

$$\Phi_2(V_0) = \min_V \Phi_2(V).$$

Вспомогательные сетки ω_h в (12) выбирались равномерными с шагами $h = h_i/4$. Значение ширины $\text{wid}(\mathbf{s}_i)$ построенных двусторонних решений приведены в таблице.

Номер сетки	1	2	3	4
$\text{wid}(\mathbf{s}_i)$	0.0629	0.0475	0.0136	0.0035

Для достижения требуемой точности нам потребовалось построить четыре сетки. Как видно из таблицы, асимптотическая сходимость ширины двустороннего решения соответствует теоретической оценке.

Заключительное замечание. Рассмотренный метод для построения двустороннего решения может быть с успехом применен для широкого класса уравнений в частных производных.

Как показано в монографии [1], оценка (14) может быть справедлива для s , построенных непосредственно как аппроксимации численных решений u^h на равномерных сетках, т. е. число сеток в многосеточном методе может быть равно единицам. Следовательно, при решении реальных задач (при условии, что начальные данные достаточно хорошие) достижение необходимой точности не требует большого числа сеток.

Список литературы

- [1] ДОБРОНЕЦ Б. С., ШАЙДУРОВ В. В. *Двусторонние численные методы*. Наука, Новосибирск, 1990.
- [2] DOBRONETS B. S. Numerical Methods using Defects. *Reliable Computing*, **1**, No. 4, 1995, 383–391.
- [3] COLLATZ L. *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*. Berlin et al., Springer-Verlag, 1964.

Поступила в редакцию 3 ноября 1997 г.