

СГЛАЖИВАНИЕ КАПИЛЛЯРНОГО ГРЕБНЯ С ПОМОЩЬЮ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ*

А. С. ОВЧАРОВА

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия*

e-mail: ovcharova@hydro.nsc.ru

Formation of capillary ridges is a typical effect in the case of a flow of thin viscous films over a topographical feature. This process is studied using a two-dimensional model describing the slow motion of a thin viscous liquid layer flowing over complex topography. The model is based on the Navier — Stokes equations. The capillary ridges generated by the substrate features can be optimally leveled by using the external pressure. In this work it is shown how to construct the external pressure function to optimally smooth the capillary ridges. Numerical results for some model problems are presented.

Введение

При движении тонкого слоя вязкой жидкости по сложному рельефу возникают структуры, называемые капиллярными гребнями. Их образование обусловлено неровностями рельефа и поверхностным натяжением жидкости. В работе [1] в приближении тонкого слоя исследованы причины возникновения гребней на примере стекания изотермической жидкости поперек широкой канавки. В [2] данная проблема рассмотрена в приближении Стокса, замечено, что приближение тонкого слоя удовлетворительно описывают исследуемый процесс только для $Ca < 10^{-2}$ (Ca — капиллярное число).

Имеется большое число приложений, где требуется именно плоское покрытие пленкой твердой поверхности. В связи с этим возникает необходимость исследования возможности сглаживания капиллярных гребней, порожденных геометрией подложки. Известно, что пленка на плоской (без особенностей) подложке также может создавать свои собственные гребни и впадины под действием тепловой нагрузки. Такие свойства пленки, в свою очередь, дают возможность влиять на капиллярный гребень, порожденный подложкой с особенностями. В работах [3, 4] исследована возможность оптимального управления гребнем с помощью напряжений Марангони. Такое напряжение может быть продуцировано, например, локальным нагревателем, создающим температурное изменение на поверхности пленки. В [5] показано, что кроме эффекта Марангони для аннулирования капиллярных гребней могут быть использованы и другие механизмы — такие как эффект переменной плотности и эффект переменной вязкости. Они совершенно различны по своей природе и как следствие требуют различного теплового воздействия для аннулирования гребня,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00355) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 111).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

порожденного геометрией. Более того, при определенном соотношении параметров они могут даже исключить действие друг друга.

В настоящей работе исследуется возможность сглаживания капиллярного гребня, порожденного геометрией подложки, с помощью какого-либо внешнего давления при постоянной температуре. При этом исследуется стационарная модель, так как важно не только выровнять свободную поверхность пленки, но и далее удерживать ее в этом положении сколь угодно долго. Чтобы сделать идею конкретной, рассматривается геометрия подложки “шаг вниз”. При решении модельных задач использованы некоторые данные, приведенные в работе [2].

1. Математическая модель

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой изотермической жидкости в постоянном поле силы тяжести по рельефу “шаг вниз” (рис. 1). Течение, вызванное массовой силой, направлено вдоль x слева направо. Жидкость имеет плотность ρ , вязкость ν и коэффициент поверхностного натяжения σ . Здесь $f_0(x)$ — твердая поверхность; $f = f(x)$ — свободная поверхность; D — высота шага. Считается, что на входе в область решения задачи и выходе из нее движение жидкости плоскопараллельное, с некоторым постоянным расходом $\bar{v}h_0$; h_0 — толщина пленки. Движение жидкости будем описывать системой уравнений, которая в переменных ψ , ω , имеет вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega; \quad (1)$$

$$\Delta \psi + \omega = 0. \quad (2)$$

Так как исследуется стационарное движение пленки, в уравнениях (1), (2) и далее в изложении работы время t рассматривается только как параметр.

В качестве масштабов длины, скорости и давления выбраны величины h_0 , $\nu/\rho_0 h_0$, $\rho_0 v_0^2$ соответственно, так что число Рейнольдса $\text{Re} = 1$. Вектор силы тяжести \vec{g} параллелен оси x и совпадает с ее положительным направлением.

Функция тока введена соотношениями

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

На твердой поверхности $f_0(x)$ граничные условия соответствуют условиям прилипания

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

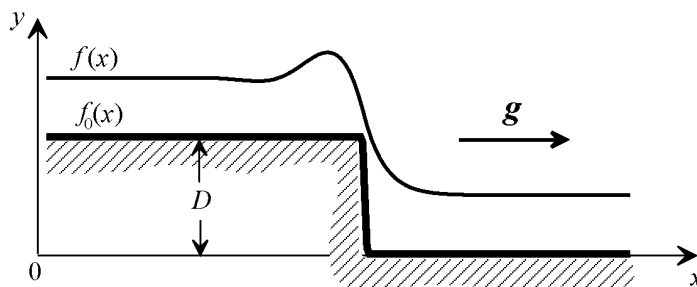


Рис. 1.

На входе в область решения задачи и выходе из нее функция тока задается таким образом, чтобы в сечении, перпендикулярном к твердой поверхности, профиль скорости имел вид полупараболы. При этом $\partial\omega/\partial x = 0$.

На свободной поверхности $f(x)$ имеют место следующие условия. Для определения самой свободной поверхности используется кинематическое условие

$$f_t + \sqrt{1 + f_x^2} \frac{\partial\psi}{\partial s} = 0, \quad (3)$$

а граничные условия для ψ и ω записываются в явном виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = v_s, \quad (4)$$

$$\omega = 2 \frac{v_s}{R}, \quad (5)$$

где v_s — решение уравнения,

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} = 2 \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2} - \frac{\partial\omega}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} \left(P_0 + \text{Ca}^{-1} \frac{1}{R} \right) + \frac{G}{\sqrt{1 + f_x^2}}. \quad (6)$$

Здесь v_s — касательная скорость точек, лежащих на свободной поверхности; P_0 — какое-либо внешнее давление (например, атмосферное); R — радиус кривизны поверхности $f(x)$; $\text{Ca} = \rho v_0 \nu / \sigma_0$ — капиллярное число; $G = g_0 h_0 / v_0^2$ — число Галилея; g_0 — ускорение свободного падения.

Векторы нормали и касательной к свободной поверхности $f(x)$ в каждой ее точке определены как

$$\vec{n} = \left\{ \frac{-f_x}{\sqrt{1 + f_x^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}} \right\}, \quad \vec{s} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2}}, \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2}} \right\}.$$

Для получения формулы (5) использовано соотношение, выражающее непрерывность тангенциальных напряжений на свободной поверхности. Уравнение (6) получено следующим образом. Если векторное уравнение Навье — Стокса, записанное в естественных переменных (\vec{v}, P) , скалярно умножить на вектор $\vec{s}(x)$, то в результате получим скалярное уравнение относительно v_s . Производную $\partial P / \partial s$ в правой части полученного уравнения можно исключить, если продифференцировать также по s соотношение, выражающее непрерывность нормальных напряжений на свободной поверхности. Уравнение (6) играет очень большую роль. Кроме того, что с его помощью можно получить граничные условия для искомых функций ψ и ω в явном виде, оно, как будет показано ниже, является важным инструментом для исследования рассматриваемого процесса. Вообще говоря, именно уравнение (6) осуществляет обмен информацией между течением внутри области и ее свободной границей.

2. Метод решения

При такой развязке граничных условий на свободной поверхности для решения задачи (1)–(6) можно использовать любые методы, применяемые для решения задач о движении жидкости в замкнутых областях в переменных ψ, ω . В настоящей работе применялся

метод решения в регулярной области. Область, занятая жидкостью, отображается на прямоугольник со сторонами $0 \leq \xi \leq L$, $0 \leq \eta \leq 1$ с помощью преобразования

$$x = \xi, \quad y = f_0(x) + \eta(f(x) - f_0(x)).$$

Тогда все границы области, включая свободную поверхность, будут лежать на координатных линиях, а уравнения (1), (2) примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \\ & = \frac{1}{I} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$0 = \frac{1}{I} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(B_{11} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B_{12} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B_{21} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + \omega. \quad (8)$$

Здесь

$$B_{11} = I, \quad B_{12} = -(f_{0\xi} + \eta I_\xi),$$

$$B_{21} = B_{12}, \quad B_{22} = \frac{1 + B_{12}^2}{I};$$

$$I = f - f_0.$$

Условия на свободной поверхности

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{v_s}{\sqrt{1 + f_\xi^2}}; \quad \omega = 2 \frac{v_s}{R};$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f_\xi^2}} \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(P_0 + \frac{\text{Ca}^{-1}}{R} \right) - \left(B_{21} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + B_{22} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + G. \quad (9)$$

Легко видеть, что в рамках рассматриваемой модели уравнения (7), (8) — одного типа, и для их решения с учетом граничных условий может быть использована одна и та же вычислительная процедура. Стационарное решение задачи (7), (9) находится методом установления. Для численного решения уравнений (7), (8) использована конечно-разностная схема стабилизирующей поправки [6, 7]. Модернизация этой схемы для решения уравнений такого типа достаточно подробно описана, например, в [8]. Уравнение (9) относится к типу уравнений Бюргерса — Хопфа с правой частью. Для его решения была использована консервативная схема повышенного порядка точности [8]. Повышенный порядок аппроксимации нужен для того, чтобы схемная вязкость, которая имеет место в схемах первого порядка аппроксимации, не подавила вязкость самого уравнения. Поэтому для решения уравнения (9) использована неявная схема второго порядка точности по “времени” и по пространству. Однако в этом случае имеют место большие градиенты, в силу чего решение близко к разрывному. Как показано в [9, 10], для более точной передачи параметров течения в области с большими градиентами важно, чтобы схема была консервативной, т. е. потоковые члены аппроксимировались в дивергентной форме.

3. Численные расчеты и обсуждение результатов

Эффект капиллярного числа Ca. Чтобы прогнозировать следствие, необходимо исследовать причину явления. С этой целью вначале рассмотрим эволюцию изотермического движения тонкого слоя жидкости поверх подложки с особенностью “шаг вниз” под действием массовых сил ($g_x = 1, g_y = 0$) для параметров $Ca = 0.025, D = 2, G = 1$. Безразмерная толщина пленки $h = 1$, угол наклона борта составляет примерно 80° . На рис. 2, *a* показано, как происходит изменение свободной поверхности пленки из начального положения покоя (обозначено штриховой линией). Если исследовать уравнение (6), то сценарий развития движения можно было бы предсказать заранее. Действительно, на начальном этапе движения скорость жидкости очень мала и доминирующую роль в уравнении (6) играет слагаемое с капиллярным числом Ca . В результате этого влияния сразу же возникают две капиллярные волны: гребень над входом в верхний угол и впадина после выхода из нижнего угла, так как производная от кривизны в уравнении (6) имеет разные знаки в этих областях. Слева от входа в верхний угол она отрицательна, в результате чего правая часть уравнения (6) убывает и касательная скорость уменьшается. Происходит естественное торможение жидкости, и возникает жидкий вал — капиллярный гребень. Справа, после выхода из нижнего угла, производная от кривизны положительна, правая часть уравнения (6) возрастает, увеличивается также и касательная скорость в этой области, что ведет к образованию впадины сразу же после выхода из нижнего угла.

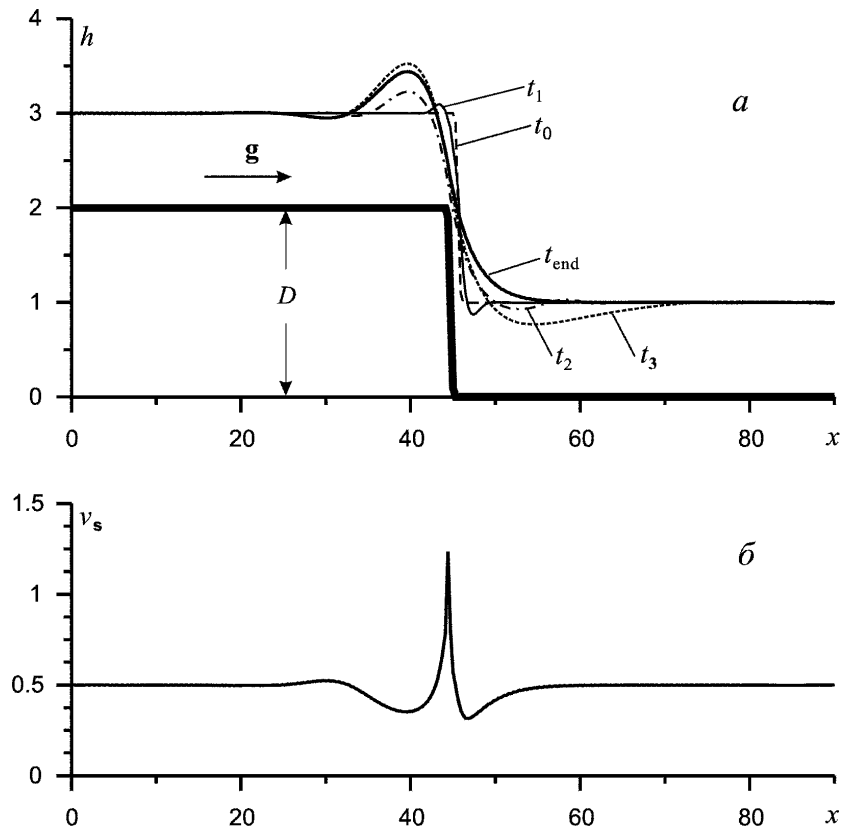


Рис. 2. Эволюция движения пленки из начального состояния покоя (t_0): *a* — профиль свободной поверхности для различных моментов времени: $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_{end}$, $h(t_{end})$ — результат стационарного решения; *б* — распределение касательной скорости V_s для момента времени t_{end} .

По мере развития движения гребень растет и при достижении стационарного решения стабилизируется. В то же время впадина у нижнего угла под действием массовой силы постепенно исчезает.

На рис. 2, б представлено распределение касательной скорости, соответствующее моменту установления t_{end} , которое адекватно отражает картину движения жидкости. Наблюдается уменьшение касательной скорости в областях, соответствующих увеличению толщины пленки. И напротив, в области наименьшей толщины пленки касательная скорость достигает максимального значения. В тех областях, где пленка покрывает подложку равномерно, касательная скорость постоянна.

Для того чтобы сгладить капиллярный гребень или хотя бы уменьшить его, в уравнении (6) необходимо каким-то образом ослабить действие слагаемого с капиллярным числом Ca , т.е. добиться того, чтобы касательная скорость точек, лежащих на свободной поверхности, была бы всюду одинаковой, за исключением небольшой области, занятой непосредственно шагом твердого профиля и некоторой малой его окрестностью. Сделать это можно, например, с помощью внешнего давления P_0 .

На приведенном выше рисунке показано, что перед основным капиллярным гребнем возникают мелкие волны, которые распространяются навстречу течению и быстро затухают к его началу. Экспериментально такие волны наблюдали авторы работы [11], исследуя стекание пленки по плоской подложке при локальном ее подогреве. Понятно, что возмущения, вызванные возникновением и ростом капиллярного гребня (неважно, какими причинами вызвано его появление — нагревом плоской подложки или ее искривлением), будут распространяться в обе стороны. Однако с одной стороны гребня они направлены против течения жидкости, а по другую — совпадают с ним. С помощью уравнения (6) это явление можно прокомментировать следующим образом. Действительно, если пленка, например, стекает по плоской подложке и тепловая нагрузка отсутствует, то для выбранных в этом исследовании параметров течения пленки свободная поверхность плоская, касательная скорость $v_s = \text{const}$, а величина $Ca^{-1}\partial(1/R)/\partial s = 0$ в уравнении (6). Но это слагаемое играет существенную роль при искривлении свободной поверхности под действием тепловой нагрузки или искривлении самой подложки.

Если проследить за динамикой возникновения и роста гребня, то можно отметить следующее. Как только возникает и начинает расти капиллярный гребень (например, продуцированный тепловой нагрузкой при стекании пленки по абсолютно плоской подложке), то по обе его стороны тотчас же образуются две впадины. При этом не только кривизна свободной поверхности, но и производная от нее имеют разные знаки в областях, занятых центральной частью гребня, и по обе стороны от нее. Сама производная от кривизны в областях, прилегающих к центральной части гребня по обе его стороны, может быть величиной малой, но если мало также капиллярное число, то их произведение в правой части уравнения (6) становится достаточно большой величиной и начинает играть существенную роль.

Правая часть (6) возрастает за счет слагаемого с производной от кривизны. Это обстоятельство приводит к росту касательной скорости по сравнению со скоростью равномерного режима и, соответственно, к уменьшению толщины пленки в этих областях. Так образуется первая мелкая волна перед основным гребнем. Амплитуда этой волны значительно меньше, чем у основного гребня, и зависит в основном от его крутизны. Чем круче основной гребень, тем глубже впадина перед ним. Перед этой впадиной может возникнуть еще ряд волн, направленных против течения, но они очень быстро затухают к его началу. Впадина за гребнем вниз по течению, образованная на начальном этапе возникновения гребня,

развивается по другому сценарию. Она растет и расширяется по мере роста самого гребня. Когда основной гребень перестает расти и стабилизируется, впадина за ним под действием массовой силы постепенно исчезает, а кривая свободной поверхности плавно выходит на уровень, соответствующий равномерному режиму. Другими словами, мелкие волны перед основным гребнем не имеют непосредственного отношения к искривлению подложки. Их возникновение продуцировано образованием капиллярного гребня, который в свою очередь может быть порожден как искривлением подложки, так и тепловой нагрузкой при стекании пленки по абсолютно плоской подложке. Эти соображения очень важны для построения функции внешнего давления, с помощью которого можно было бы сгладить капиллярный гребень, порожденный геометрией подложки. Отметим также, что в проводимых численных экспериментах, направленных на сглаживание капиллярного гребня, основное внимание уделялось исследованию уравнения (6). При необходимости решать оптимизационную задачу гораздо проще минимизировать не высоту гребня, а отклонение касательной скорости на свободной поверхности при наличии гребня от касательной скорости, соответствующей равномерному режиму.

Сглаживание капиллярного гребня. Как выровнять касательную скорость с помощью внешнего давления и тем самым добиться равномерного обтекания пленкой твердого профиля с особенностями, т. е. какой должна быть функция внешнего давления P_0 в уравнении (6), с помощью которой можно выровнять свободную поверхность и далее удерживать ее в этом положении? Прежде всего отметим, что хотя функция давления была целенаправленно исключена из уравнений движения и граничных условий, тем не менее ее значение на свободной поверхности можно легко восстановить.

Действительно, пусть $P^{(1)}$ — давление на свободной поверхности при наличии капиллярного гребня. Соотношение, выражающее непрерывность нормальных напряжений, можно записать в виде

$$-P^{(1)} = \text{Ca}^{-1} \frac{1}{R^{(1)}} + 2 \frac{\partial v_s^{(1)}}{\partial s}.$$

Так как положение свободной поверхности (на рис. 3, *a* оно обозначено точечной линией 1) и распределение касательной скорости уже известны из решения прямой задачи, то давление можно определить по вышеприведенной формуле. Обозначим через $P^{(2)}$ давление на сглаженной свободной поверхности, т. е. на той кривой, которую желательно получить (на рис. 3, *a* кривая 3):

$$-P^{(2)} = \text{Ca}^{-1} \frac{1}{R^{(2)}} + 2 \frac{\partial v_s^{(2)}}{\partial s}.$$

Если первое слагаемое в правой части этого соотношения известно заранее, то о касательной скорости $v_s^{(2)}$ можно сказать лишь то, что она должна быть величиной постоянной всюду, за исключением небольшой области, занятой непосредственно шагом и некоторой его окрестностью. Но эта величина должна быть получена в процессе решения задачи в целом. К тому же надо не только выровнять свободную поверхность, но и далее удерживать ее в том же положении сколь угодно долго. Так как в выбранном методе численного решения задачи уравнение (6) приняло вид уравнения (9), в дальнейших рассуждениях удобнее использовать именно это уравнение.

Если в соотношении для $P^{(2)}$ всюду положить $v_s^{(2)} = \text{const}$, то качестве первого приближения для P_0 естественно взять выражение

$$P_0 = -P_1 - \text{Ca}^{-1} \frac{1}{R^{(2)}} + 2 \frac{\partial v_s}{\partial \xi}, \quad (10)$$

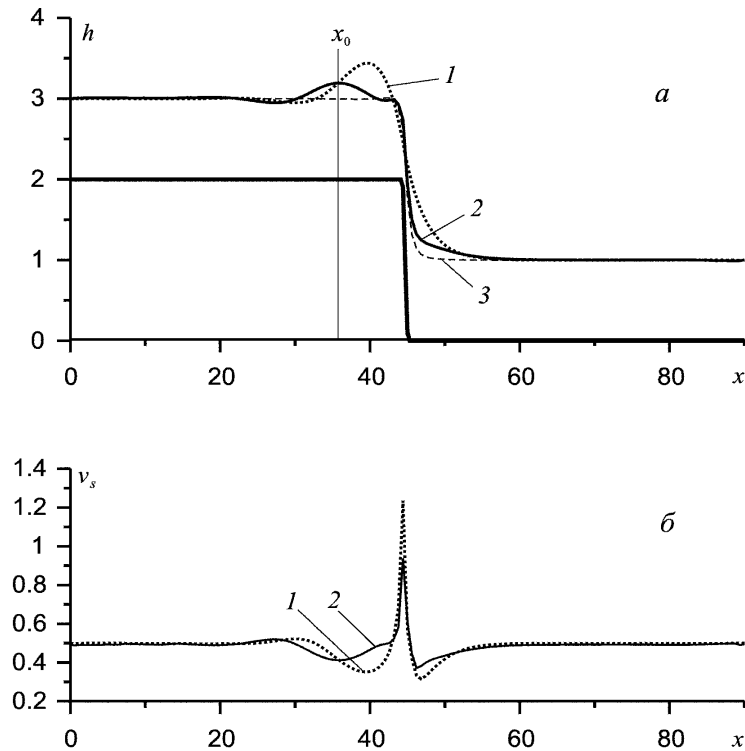


Рис. 3.

т. е. разность давлений $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ плюс некоторая управляющая функция v_s . Если теперь (10) подставить в уравнение (9), то при решении этого уравнения на каждом “временном” шаге значение v_s , которое входит в формулу (10), берется с предыдущего слоя. И хотя правая часть (10) содержит изменяемую по времени управляющую функцию, тем не менее на каждом временном шаге ее значение известно из решения задачи. На рис. 3, а представлен результат стационарного решения (сплошная линия 2), полученного для параметров, описанных выше, и при внешнем давлении P_0 , описанном формулой (10). На рис. 3, б кривыми 1 и 2 обозначено распределение касательной скорости для капиллярного гребня и полученного стационарного решения соответственно. Это ожидаемый результат, поскольку такое внешнее давление нейтрализует следствие, а не причину явления. Выше замечено, что впадина перед основным капиллярным гребнем продуцирована самим гребнем и не имеет непосредственного отношения к искривлению подложки. В области, занятой гребнем, давление больше гидростатического, в то время как в области, занятой впадиной перед этим гребнем, оно меньше гидростатического. Поэтому такой выбор функции P_0 привел к тому, что капиллярный гребень, аннулированный у входа в шаг, просто переместился в область меньшего давления, хотя и значительно уменьшился в размере. Характерно, что вершина нового капиллярного гребня приходится точно на точку перегиба старого x_0 . Поэтому в формулу (10) необходимо ввести коррелирующие множители. Логика выбора этих коэффициентов проста: в процессе сглаживания капиллярного гребня не позволять ему перемещаться в сторону меньшего давления. Тогда формула (10) для функции давления P_0 примет вид

$$P_0 = K(\xi) \left[-P_1 - \text{Ca}^{-1} \frac{1}{R^{(2)}} + 2 \frac{\partial v_s}{\partial \xi} \right]. \quad (11)$$

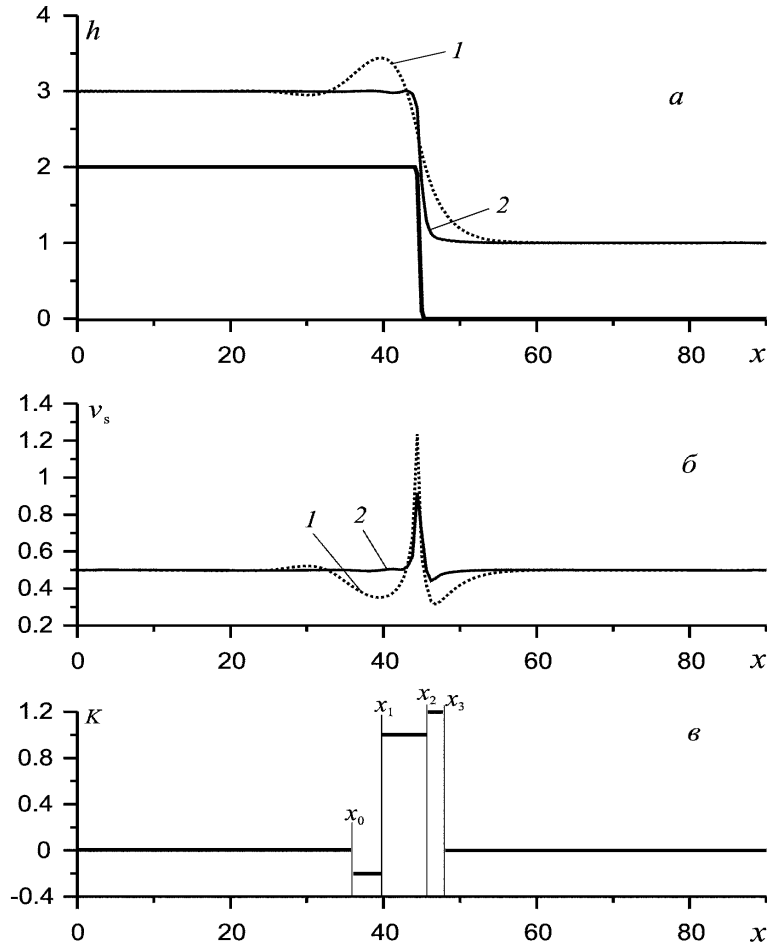


Рис. 4.

На рис. 4, *a* изображен результат стационарного решения (кривая 2), полученного при использовании внешнего давления P_0 , определяемого формулой (11). На рис. 4, *б* представлено распределение касательной скорости на свободной поверхности гребня (кривая 1) и сглаженной поверхности (кривая 2) соответственно. На рис. 4, *в* приведено распределение коррелирующей функции $K(\xi)$:

$$\begin{aligned}
 K_1(\xi) &= 0, & 0 \leq \xi \leq \xi_0, \\
 K_2(\xi) &= -0,2, & \xi_0 < \xi < \xi_1, \\
 K_3(\xi) &= 1, & \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\
 K_4(\xi) &= 1,2, & \xi_2 < \xi < \xi_3, \\
 K_5(\xi) &= 0, & \xi_3 \leq \xi.
 \end{aligned}$$

В действительности важны только два первых значения $K(\xi)$, где ξ_0 — точка перегиба старого капиллярного гребня, ξ_1 — точка, лежащая слева от его вершины. Во всех остальных точках можно было бы положить $K(\xi) = 1$. Значение $K(\xi) = 1,2$ выбрано исключительно для лучшего обтекания пленкой области нижнего угла подложки. Значения $K_2(\xi)$ и $K_4(\xi)$, вообще говоря, зависят от параметров, определяющих задачу (таких

как Ca , D и G), поскольку именно от них зависят размеры капиллярного гребня. При более плавном изменении параметров $K(\xi)$ можно добиться идеального обтекания пленкой твердого профиля подложки, но положение особых точек ξ_0 и ξ_1 остается неизменным: это точка перегиба старого капиллярного гребня и его вершина соответственно. Таким образом, решив численно задачу (1)–(6), полагая вначале P_0 равным нулю, а затем еще раз при P_0 , определенном по формуле (11), мы тем самым можем подготовить все необходимые данные для проведения лабораторного эксперимента.

Список литературы

- [1] KALLIADASIS S., BIELARZ C., HOMSY G.M. Steady free-surface thin film flows over topography // J. Phys. Fluids. 2000. Vol. 12, N 8. P. 1889–1898.
- [2] MAZOUCHI A., HOMSY G.M. Free surface Stokes flow over topography // J. Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, N 10. P. 2751–2761.
- [3] GRAMLICH C.M., KALLIADASIS S., HOMSY G.M., MESSER C. Optimal leveling of flow over one-dimensional topography by Marangoni stresses // J. Phys. Fluids. 2002. Vol. 14, N 6. P. 1841–1850.
- [4] ОВЧАРОВА А.С. Управление формой свободной поверхности пленки, стекающей по сложному рельефу // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 4. С. 79–84.
- [5] ОВЧАРОВА А.С. Сглаживание капиллярного гребня, порожденного геометрией подложки // Вычисл. математика и мат. физика. 2006. Т. 46, N 2. С. 318–328.
- [6] DOUGLAS J. (JR.), RACHFORD H.H. (JR.) On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1956. Vol. 82, N 2. P. 421–439.
- [7] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [8] ОВЧАРОВА А.С. Численное решение стационарной задачи Стефана в области со свободной границей // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 88–99.
- [9] ОСТАПЕНКО В.В. Метод теоретической оценки дисбалансов разностных схем на ударной волне // Докл. АН СССР. 1987. Т. 295, № 2. С. 292–297.
- [10] ОСТАПЕНКО В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // Вычисл. математика и мат. физика. 2000. Т. 40, № 12. С. 1857–1874.
- [11] КАВОВ О.А., LEGROS J.C., MARCHUK I.V., SCHEID B. Deformation of free surface in a moving locally-heated thin liquid layer // J. Fluid Dyn. 2001. Vol. 36 (3). P. 521–528.