Вычислительные технологии **Том 12, № 1, 2007**

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИЛИ МЕТОДЫ МОНТЕ-КАРЛО?*

С. П. Шарый
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `shary@ict.nsc.ru`

The paper presents a critical survey, from probability theory standpoint, of some problem statements and solution techniques adopted in modern interval analysis. We discuss the concepts of "guarantee" and "reliability" of the computation results, show their relative character and propose possible ways of modification of the traditional interval problem statements that can lead to development of principally new interval methods for the solution of practical problems.

Введение

Представляемая работа посвящена выяснению границ применимости методов интервального анализа (см., к примеру, [1]). Мы попытаемся частично ответить на философские вопросы: зачем вообще нужен интервальный анализ? и что нового он привносит в практику математического моделирования?

В значительной мере это вопросы риторические, так как в течение последних десятилетий накоплено достаточно много примеров плодотворного применения интервальных методов к задачам, которые до сих пор никак иначе не решались или решались неудовлетворительно. Таковы, в частности, задачи доказательной глобальной оптимизации и доказательного глобального решения уравнений и систем уравнений [2–4]. Кроме того, интервальный анализ предоставляет нам новый язык для описания задач с ограниченными неопределенностями и неоднозначностями в данных [5], язык удобный и весьма выразительный, который существенно обогащает арсенал методов математического моделирования окружающей нас действительности.

Но вопросы о месте и роли интервального анализа не являются и совсем бессмысленными. Дело в том, что ряд задач, с которыми имеет дело современный интервальный анализ, ставились и решались и раньше, в "доинтервальную" эру. Например, прямым статистическим моделированием неопределенностей в данных задачи, которое известно также как "метод Монте-Карло" [6, 7]. В частности, именно так решались (и по сей день часто решаются) задачи оценивания областей значений многомерных функций и разброса решений уравнений с параметрами.

В методах Монте-Карло неопределенности и неоднозначности в исходных данных заменяются некоторыми вероятностными распределениями (в вышеупомянутых задачах, как

*Работа выполнена при финансовой поддержке Президентской программы "Ведущие научные школы РФ" (грант № НШ-9886.2006.9).

правило, равномерными), которые далее моделируются на ЭВМ путем статистических испытаний и сопровождаются вычислением значений функции, решением точечных уравнений и пр. По их результатам и строятся искомые оценки разброса значений функции, решений параметрического уравнения и т. п. Что же касается интервальных подходов, то, как известно [8], большинство интервальных задач в постановках, требующих оптимальных или гарантированно близких к оптимальным ответов, являются NP-трудными, так что получение для них "качественных" интервальных решений — очень трудоемкое дело. Наша цель — понять, в каких случаях применение интервального анализа в подобных задачах оправданно, а когда оно нецелесообразно и лучше воспользоваться статистическим моделированием.

1. Метод Монте-Карло в интервальных задачах

Традиционным аргументом в пользу интервальных методов является следующий: статистическое моделирование не способно обеспечить "гарантированности" и "доказательности" ответов. Действительно, это отсутствие гарантированности в строго математическом смысле сразу бросается в глаза при применении методов Монте-Карло. Рассмотрим в качестве примера задачу внешнего покоординатного оценивания множеств решений интервальных линейных систем уравнений вида

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} = (\,\boldsymbol{a}_{ij})$ — это интервальная $n \times n$-матрица и $\boldsymbol{b} = (\,\boldsymbol{b}_i)$ — интервальный n-вектор. Напомним, что *объединенным множеством решений* для (1) называется множество

$$\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists\, A \in \mathbf{A})(\exists\, b \in \mathbf{b})(Ax = b)\}, \tag{2}$$

образованное всевозможными решениями x точечных систем $Ax = b$, когда матрица A и вектор b независимо пробегают $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}$ соответственно. Далее в этой работе мы не рассматриваем никаких других множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) кроме объединенного, и потому для краткости будем называть множество (2) просто множеством решений.

Точное описание множества решений слишком трудоемко и практически нужно нечасто, так что обычно ограничиваются нахождением тех или иных его оценок. Одной из наиболее популярных задач оценивания множества решений $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ является задача отыскания интервального вектора (бруса), гарантированно содержащего $\Xi(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ [2–4, 9]. При этом наибольшую ценность имеют точные покоординатные оценки множества решений, которые называются также *оптимальными*.

Для интервальной линейной 3×3-системыНоймайера

$$\begin{pmatrix} 3.5 & [0,2] & [0,2] \\ [0,2] & 3.5 & [0,2] \\ [0,2] & [0,2] & 3.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ [-1,1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

множество решений изображено на рис. 1, и его оптимальной внешней оценкой является брус[1]

$$\begin{pmatrix} [-1.765, 1.765] \\ [-1.765, 1.765] \\ [-1.765, 1.765] \end{pmatrix} \tag{4}$$

[1]Здесь и всюду ниже мы для удобства сохраняем у числовых данных не более четырех значащих цифр.

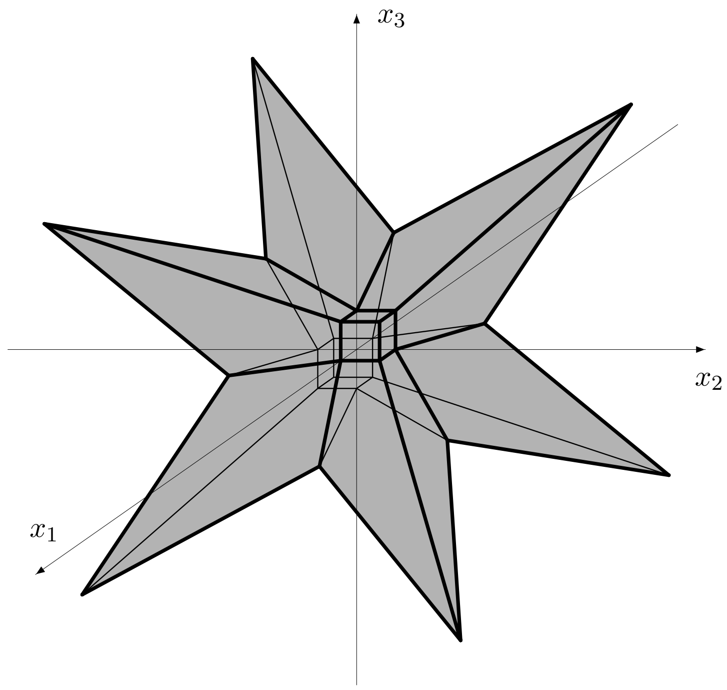

Рис. 1. Множество решений трехмерной системы Ноймайера.

(см., например, [4, 9]). Но типичный результат метода статистических испытаний за несколько миллионов бросаний точечных линейных систем из (3) имеет вид

$$\begin{pmatrix} [-1.204, 1.241] \\ [-1.349, 1.260] \\ [-1.231, 1.288] \end{pmatrix},$$

т. е. весьма сильно отличается от (4) (читатель может самостоятельно повторить этот несложный эксперимент на ЭВМ).

Ситуацию не исправляют принципиально ни более совершенные статистические процедуры, ни учет специфики задачи. К примеру, при оценивании разброса решений ИСЛАУ случайный выбор можно осуществлять только между концами входных интервалов, так как в силу теоремы Бека — Никеля [10] экстремальные значения каждой компоненты решения достигаются только в крайних матрице и правой части системы. Тем не менее для интервальной линейной 7×7-системы с матрицей Ноймайера

$$\begin{pmatrix} 10.5 & [0,2] & \cdots & [0,2] \\ [0,2] & 10.5 & \cdots & [0,2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0,2] & [0,2] & \cdots & 10.5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-1,1] \\ [-1,1] \\ \vdots \\ [-1,1] \end{pmatrix}$$

в результате 400 миллионов бросаний на множестве концов интервалов матрицы и правой части системы мы получим приблизительно следующие интервалы для разбросов решений:

$$\begin{pmatrix} [-0.2478, 0.2507] \\ [-0.2550, 0.2599] \\ [-0.2549, 0.2683] \\ [-0.2416, 0.2684] \\ [-0.2522, 0.2560] \\ [-0.2425, 0.2683] \\ [-0.2440, 0.2418] \end{pmatrix},$$

тогда как оптимальная (точная) внешняя оценка множества решений есть брус

$$\begin{pmatrix} [-0.2972, 0.2972] \\ [-0.2972, 0.2972] \\ \cdots \\ [-0.2972, 0.2972] \end{pmatrix}.$$

И с возрастанием размера задачи результаты любого статистического моделирования при фиксированном объеме выборки все дальше отклоняются от оптимальной интервальной оценки множеств решений ИСЛАУ.

2. Теоретико-вероятностный анализ интервальных постановок задач

Но тезис об отсутствии гарантированности и доказательности в результатах статистического моделирования все-таки верен лишь отчасти, поскольку ответ, вероятность правильности которого превосходит, скажем, $(1 - 10^{-8})$, можно считать уже “практически достоверным”, как это аргументированно отмечают И.И. Блехман, А.Д. Мышкис и Я.Г. Пановко в книге [11]. Получается, что при достижении этого порога достоверности и методы Монте-Карло способны по-своему “гарантировать” выдаваемые ими результаты.

В пользу статистического моделирования при этом говорит то обстоятельство, что в функциях большого числа переменных, завязанных друг с другом, практически любые “не слишком плохие” вероятностные распределения на областях определения аргументов преобразуются на области значений функции в распределение, плотность вероятности которого пренебрежимо мала в точках, лежащих вблизи границы области значений. Рассмотрим это важное утверждение более подробно.

Для простых функций и простых вероятностных распределений оно может быть обосновано даже аналитически, и в качестве примера мы рассмотрим сумму

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n, \tag{5}$$

в которой ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые равномерно распределенные на интервале $[\,0, 1\,]$ случайные величины. Плотность вероятности каждого слагаемого в (5) есть поэтому

$$p_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{на интервале } [0,1], \\ 0 & \text{вне интервала } [0,1]. \end{cases}$$

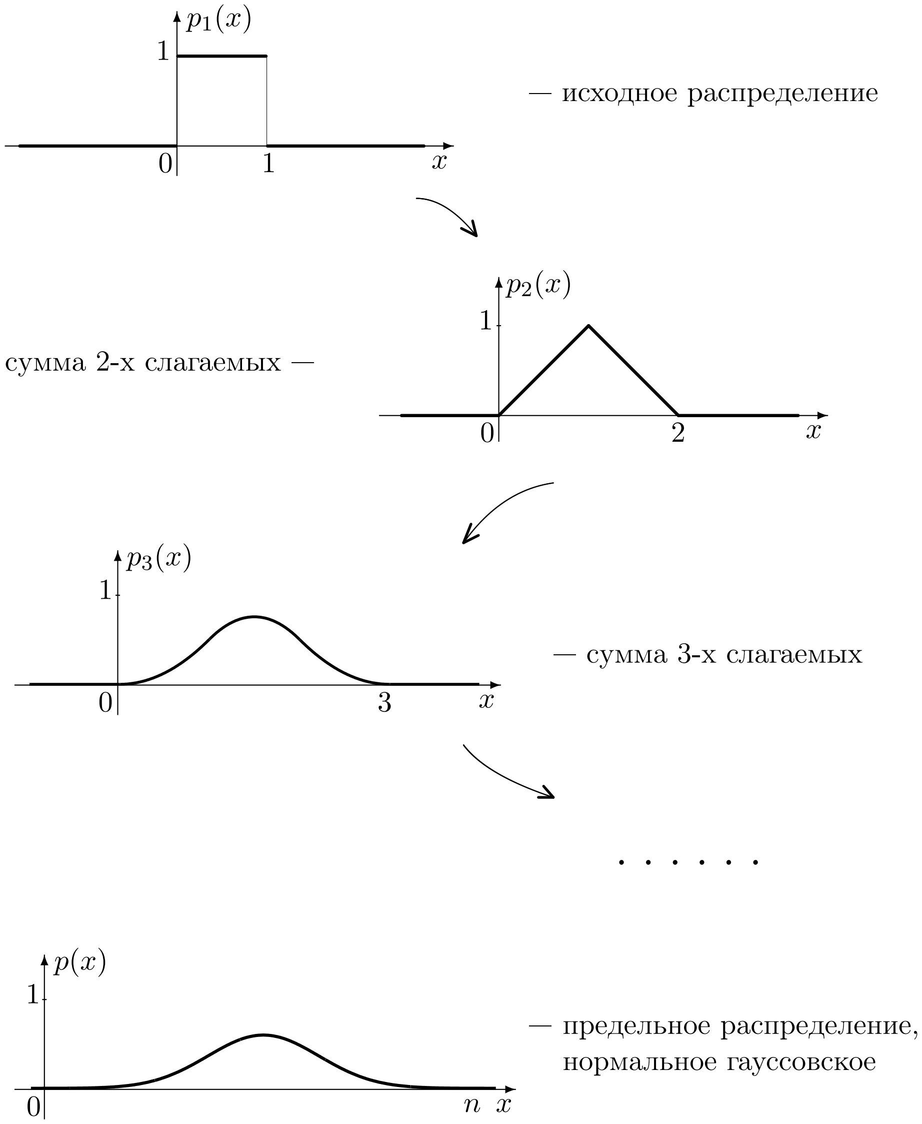

Рис. 2. Эволюция плотности вероятности на множестве значений суммы нескольких интервалов и предельное распределение суммы.

Обозначим через $p_n(x)$ плотность вероятности суммы (5). Очевидно, функция $p_n(x)$ равна нулю вне интервала $[\,0, n\,]$.

Вспомним теперь (см., например, [12, 13]), что плотность вероятности $p_{\xi+\eta}$ суммы $(\xi+\eta)$ двух независимых случайных величин ξ и η является сверткой плотностей вероятности слагаемых p_ξ и p_η, так что

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x-s)\, p_\eta(s)\, ds.$$

Поэтому для плотности суммы (5) справедливо рекуррентное соотношение

$$p_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_1(x-s)\, p_n(s)\, ds = \int\limits_{x-1}^{x} p_n(s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Пользуясь им, нетрудно точно вычислить плотность вероятности суммы равномерно распределенных слагаемых, и соответствующие результаты приведены во многих пособиях по теории вероятностей, например, в книге Г. Крамера [13]. В частности, плотность вероятности суммы двух слагаемых равна

$$p_2(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ -x+2 & \text{при } 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

а плотность вероятности суммы трех равномерно распределенных слагаемых есть

$$p_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ -x^2+3x-\frac{3}{2} & \text{при } 1 \le x \le 2, \\ \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2} & \text{при } 2 \le x \le 3. \end{cases}$$

Как видим (см. рис. 2), при $n = 2, 3$ плотность вероятности суммы (5) оказывается убывающей от центра к границам области значений, причем с ростом количества слагаемых в сумме график ее плотности вероятности вблизи границ прижимается к нулю сильнее, чем в центре.

Используя математическую индукцию, можно показать справедливость следующей общей формулы [13]:

$$p_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1} - C_n^1(x-1)^{n-1} + C_n^2(x-2)^{n-1} - \dots \right),$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты (т. е. количества сочетаний из n по k), и при каждом фиксированном значении аргумента x суммирование в скобках осуществляется только по тем слагаемым, для которых значение $(x-k)$, $k = 1, 2, \dots$, неотрицательно. Выводить из этой формулы качественные свойства $p_n(x)$ довольно затруднительно, но с помощью той же математической индукции на основе соотношения (6) несложно доказать, что $p_n(x)$ — унимодальная функция с максимумом в $n/2$, симметричная относительно этого значения. Поэтому вблизи границ области значений рассматриваемой суммы (5)

$$p_n(x) = \frac{1}{n-1}\, x^{n-1} \qquad \text{при} \quad x \in [\,0, 1\,], \tag{7}$$

$$p_n(x) = \frac{1}{n-1}\, (n-x)^{n-1} \qquad \text{при} \quad x \in [\,n-1, n\,], \tag{8}$$

т. е. в этих приграничных областях интервала значений при приближении к его концам плотность вероятности суммы в самом деле убывает все более резко с ростом числа слагаемых.

При дальнейшем возрастании числа слагаемых вероятностное распределение суммы (5) согласно центральной предельной теореме теории вероятностей быстро стремится к нормальному гауссовскому распределению с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right), \tag{9}$$

где m — среднее значение (математическое ожидание) и σ — стандартное (среднее квадратичное) отклонение, определяемые из средних $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и стандартных отклонений $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ для слагаемых посредством соотношений

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2$$

(см., к примеру, [12, 13] и другие пособия по теории вероятностей). Наша ситуация охватывается так называемой теоремой Линдеберга — Леви [13], широко известным частным случаем центральной предельной теоремы, который утверждает, что если у одинаково распределенных слагаемых средние и дисперсии конечны, то при "достаточно большом" количестве слагаемых в сумме ее плотность вероятности с хорошей степенью приближения дается выражением (9). В данном случае среднее значение суммы равно $n/2$, а стандартное отклонение — $\sqrt{n/12}$, коль скоро средние и дисперсии исходных равномерных распределений составляют $1/2$ и $1/12$ соответственно. Как видим, плотность вероятности суммы (5) в центре при $x = n/2$ примерно равна $\sqrt{6/\pi n}$, а относительная разница этой величины с (7) и (8) при возрастании n может стать сколь угодно большой.

В вышеописанном иллюстративном примере равномерно распределенные на одном и том же интервале случайные величины взяты для удобства точного вычисления свертки (6). В действительности качественный вывод о свойствах распределения суммы "достаточно большого" числа слагаемых остается тем же самым для гораздо более общих типов вероятностных распределений на интервалах-слагаемых. Его основой является обширный ряд результатов теории вероятностей, объединяемых под названием "центральной предельной теоремы" и утверждающих, что нормальность предельного распределения суммы случайных величин — это распространенное явление и сохраняется при весьма необременительных условиях на распределения слагаемых. В нашем примере мы лишь косвенно выводили различие плотностей вероятности суммы в центре и вблизи границ области значений из центральной предельной теоремы потому, что для небольшого конечного числа слагаемых ее применение было бы не вполне корректным. Кроме того, известно, что поточечная сходимость распределения суммы к предельному нормальному распределению существенно хуже в точках, далеких от среднего значения. Но для более общих вероятностных распределений слагаемых, когда мы не можем уже воспользоваться точными аналитическими средствами, имеет смысл более существенно опираться на центральную предельную теорему теории вероятностей.

Вспомним, что помимо использованной нами выше теоремы Линдеберга — Леви существует немало других формулировок этого утверждения, например формулировка Ляпунова [12, 13] и т. д. В любом случае применимости центральной предельной теоремы, когда предельное нормальное распределение имеет плотность (9), плотность вероятности при отходе от среднего значения резко спадает за счет экспоненциального множителя $e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$.

Аналогична ситуация и для других арифметических операций. В частности, вычитание можно рассматривать как частный случай сложения. Общая теория перемножения случайных величин весьма сложна [14], но для частных случаев качественный вывод о малой вероятности достижения граничных значений может быть обоснован с помощью простых рассуждений. Действительно, умножение случайных величин, сосредоточенных на положительных интервалах, логарифмированием приводится к сложению, и при возрастании числа сомножителей в таком произведении его распределение стремится в пределе к логарифмически-нормальному распределению [13], плотность которого также резко ниспадает к краям. Умножение случайных величин, распределенных на интервалах, не содержащих нуля, легко приводится путем манипуляции со знаками к положительному случаю.

Рассмотренные примеры позволяют также понять механизм возникновения разницы в плотности вероятности между центром и краями результата арифметических операций между интервалами. Образно говоря, средние значения результата оказываются более вероятными потому, что могут быть достигнуты на "бóльшем количестве" комбинаций исходных операндов, чем крайние значения результата. Например, взяв в интервальном произведении $[-1,1] \cdot [1,2] = [-2,2]$ близкую к границе результата точку 1.8, нетрудно сообразить, что она может быть получена как произведение $x \cdot y$ не из любых значений x и y, принадлежащих интервалам-сомножителям $[-1,1]$ и $[1,2]$. Именно, $x \cdot y = 1.8$ лишь при $x \in [0.9, 1]$ и $y \in [1.8, 2]$. Но точка, более близкая к середине интервала результата, скажем, 0.5, является произведением $x \cdot y$ для $x \in [0.25, 0.5]$, $y \in [1,2]$, и мера множества $[0.25, 0.5] \times [1,2]$ оказывается больше меры множества $[0.9,1] \times [1.8,2]$. Отчасти этот феномен можно усмотреть даже из формул классической интервальной арифметики, согласно которым концы интервала результата достигаются в одном наборе концов операндов, редко в двух, тогда как любая внутренняя точка результата получается из континуума различных сочетаний аргументов, взятых в интервалах-операндах.

Для сложных (и многомерных) выражений $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольных вероятностных распределений на областях определения x_1, x_2, ..., x_n результирующее распределение на множестве значений f уже невозможно найти или даже качественно исследовать аналитическими средствами. Этому препятствует, в частности, зависимость (связанность) величин, которые получаются результатами промежуточных вычислений в узлах дерева Канторовича при сколько-нибудь сложных выражениях для f. Но в подобных ситуациях на помощь может прийти статистическое моделирование на ЭВМ, и оно надежно подтверждает сформулированный выше качественный вывод о том, что у границ области значений функции плотность вероятности, как правило, на порядки ниже, чем в центральных точках.

В качестве модельного примера рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с интервальными системами уравнений, выполненных по заказу автора В.В. Колдаковым[2]. Он предпринял прямое статистическое моделирование разброса решений точечных линейных систем в пределах заданной интервальной линейной системы уравнений, предполагая равномерность распределений параметров на интервалах их изменения. Из интервалов в матрице и правой части случайно выбирались представители, полученная точечная система решалась точечным методом, и в процессе многократного повторения этой процедуры определялись частоты попаданий решений в те или иные участки пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. фактически значения эмпирической (выборочной) плотности вероятности решений. Ниже мы приводим результаты этих экспериментов, касающиеся систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

как известно, определяются при $D := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ формулами

$$x_1 = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12})/D, \quad x_2 = (b_2 a_{11} - b_1 a_{21})/D.$$

[2]Эти расчеты выполнены в 2003 году в компании "УниПро", г. Новосибирск.

Поэтому можно сказать, что в двумерном случае В.В. Колдаковым экспериментально исследовалась плотность вероятности на множестве значений отображения

$$f(\,a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2) : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2,$$

задаваемого правилом

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ b_2 a_{11} - b_1 a_{21} \end{pmatrix},$$

когда на интервалах изменений аргументов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 взяты равномерные распределения.

На рис. 3 изображены результаты такого статистического моделирования с популярной интервальной линейной системой

$$\begin{pmatrix} [2,4] & [-2,1] \\ [-1,2] & [2,4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-2,2] \end{pmatrix}$$

из работы В. Барта и Е. Нудинга [15].

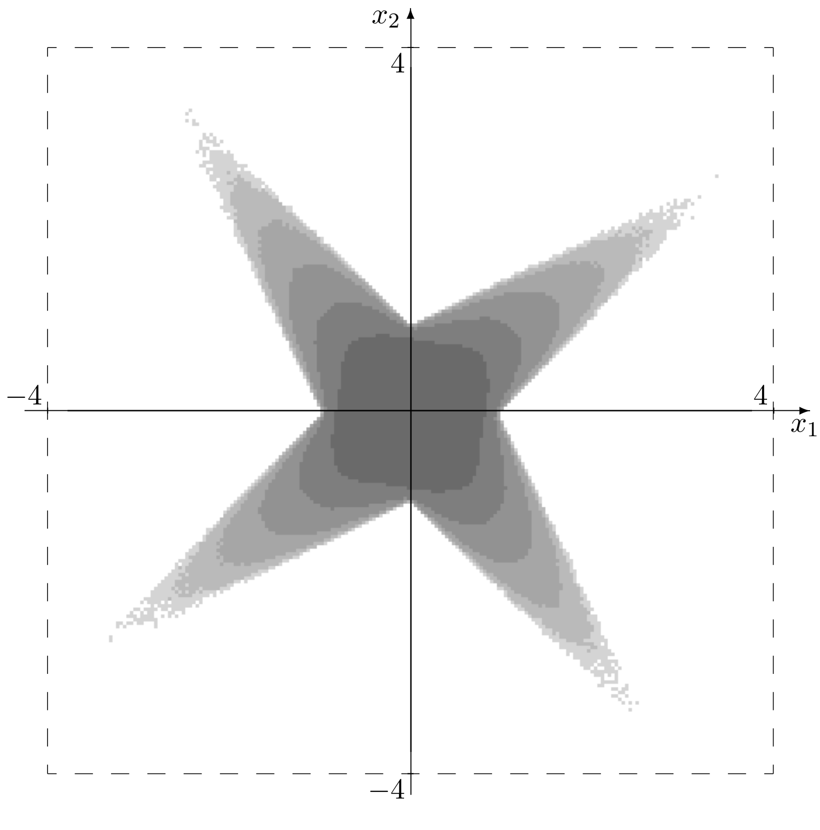

Рис. 3. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы Барта — Нудинга и оптимальные покоординатные оценки множества решений.

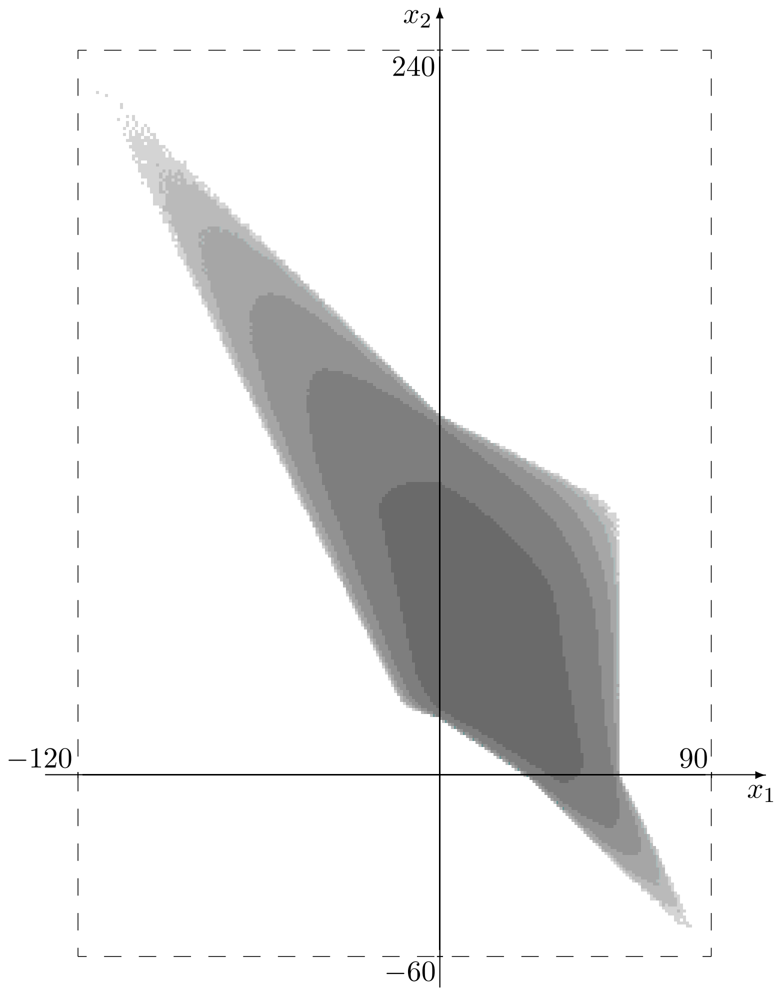

Рис. 4. Эмпирическая плотность вероятности на множестве решений интервальной линейной системы уравнений Хансена и оптимальные покоординатные оценки множества решений.

На рис. 4 представлены результаты статистического моделирования поведения решений для другой известной интервальной линейной системы

$$\begin{pmatrix} [2,3] & [0,1] \\ [1,2] & [2,3] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [0,120] \\ [60,240] \end{pmatrix},$$

предложенной Э. Хансеном (см. [2] и более ранние работы). Градации плотности серого цвета на этих рисунках изображают различные плотности вероятности решений, причем самому темному тону соответствует максимальная плотность вероятности решений, принимающая значение из сегмента $[\,10^{-2}, 10^{-1}[$ для системы Барта — Нудинга и $[\,10^{-4}, 10^{-3}[$ для системы Хансена. Каждый переход к более светлому тону соответствует уменьшению сегмента значений плотности вероятности на один порядок, т. е. в 10 раз. Напомним, что оптимальные (точные) внешние оценки множеств решений для этих интервальных систем равны

$$\begin{pmatrix} [-4,4] \\ [-4,4] \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} [-120,90] \\ [-60,240] \end{pmatrix},$$

а сами эти множества решений изображены на рис. 5.

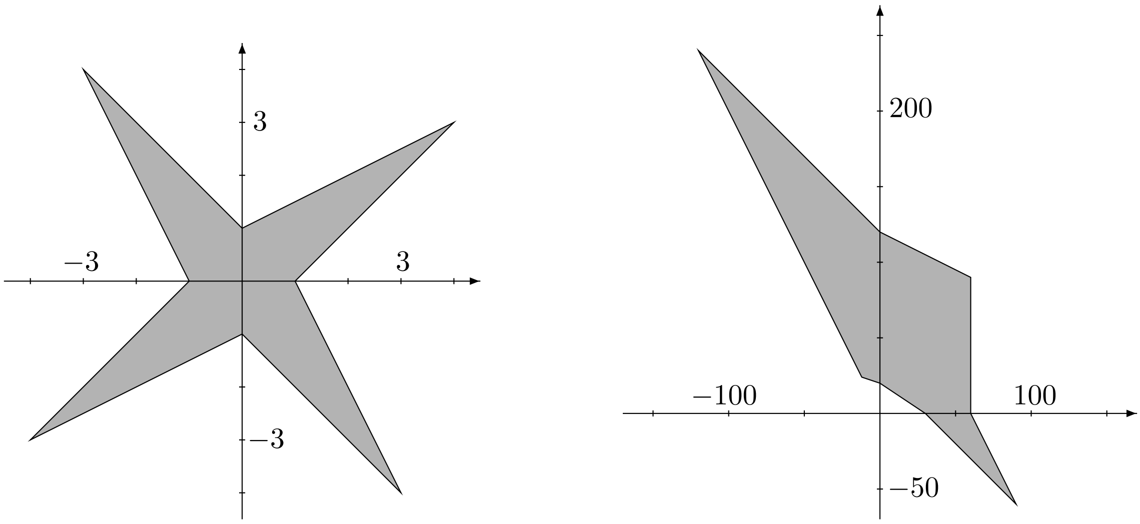

Рис. 5. Множества решений интервальных систем Барта — Нудинга (слева) и Хансена (справа).

Хорошо видно, что в тех частях множеств решений, которые прилегают к удаленным границам, плотность вероятности на 6–7 порядков меньше той, что зафиксирована в центральных областях. Поэтому вероятность того, к примеру, что первая компонента точечного решения для системы Барта — Нудинга попадет, скажем, в интервал $[3.9, 4]$, не превосходит 10^{-9}, что уже "практически невозможно" в рамках рассматриваемой теоретико-вероятностной модели. По этой причине брус $([-3.95, 3.9], [-3.9, 3.92])^\top$, к примеру, будет столь же практически "гарантированной" и "доказательной" внешней оценкой множества решений системы уравнений Барта — Нудинга, как и оптимальная интервальная оценка $([-4, 4], [-4, 4])^\top$.

Исчезающе малая плотность вероятности решений в приграничных точках наводит на серьезные вопросы. Насколько вообще ценна в этих условиях гарантированность наших ответов? Может быть, иногда можно поступиться "гарантированностью" и "доказательностью" ответов в духе традиционного интервального анализа, если этим достигается более простое или более эффективное решение задачи? Надежду на это дают как теоретические результаты, касающиеся трудоемкости так называемых вероятностных (стохастических) алгоритмов [16], так и результаты недавних вычислительных экспериментов со стохастическими интервальными методами оптимизации [17].

Таким образом, при корректном сравнении результатов интервального и статистического подходов следует принимать во внимание, что "гарантированность" интервальных внешних оценок областей значений и множеств решений нередко является избыточной, так как крайние точки области значений, близкие к экстремальным оценкам, несут исчезающе малую плотность вероятности и на практике "почти никогда" не достигаются.

3. Анализ вычислительной сложности

Посмотрим теперь на проблему с точки зрения вычислительной сложности. В экспериментах В.В. Колдакова для получения рис. 3 и 4 было выполнено по 400 000 000 (т. е. $4 \cdot 10^8$) бросаний, что потребовало около десятка минут работы четырехпроцессорной ЭВМ Sun Ultra 450.[3] При увеличении размеров задачи мы уже не сможем выполнять столь дорогостоящие эксперименты за практически приемлемое время. Действительно, для 3×3-систем интервальных уравнений выполнение 400 000 000 аналогичных испытаний потребовало около 32 мин работы той же ЭВМ, а для систем размера 7×7 — уже 8 ч 54 мин при полной загрузке всех четырех процессоров. Далее, при возрастании в 100 раз, всего до 700×700, размера системы уравнений, не обладающей специальной разреженностью, трудоемкость ее решения возрастет в $100^3 = 1\,000\,000$ раз (а в реальности еще больше), так что за то же время на той же ЭВМ мы сможем выполнить в подобной задаче лишь около 400 испытаний.

Как следствие, с ростом размеров задачи количество испытаний должно быть уменьшено, что неизбежно приведет и к снижению уровня достоверности результатов статистического моделирования. В конце концов по мере увеличения размера задачи этот уровень достоверности неизбежно уменьшится до такого неприемлемо низкого значения, что для достижения гарантированности решений никакой альтернативы методам интервального анализа уже не останется.

Конечно, сложность решения NP-трудных задач при росте их размера быстро обгоняет возможности даже многопроцессорной вычислительной техники, и далеко не всегда интервальные методы способны досчитать "до конца" оптимальные внешние оценки множеств решений интервальных систем уравнений или множеств значений функций. Тем не менее некоторые (иногда весьма качественные) внешние оценки можно вычислить интервальными методами *всегда*. Что же касается статистического моделирования, то за счет уменьшения объема выборки при росте размерности задачи погрешность получаемых с его помощью негарантированных оценок множеств решений быстро нарастает, так что в конце концов их достоверность и практичность делаются сомнительными. То есть для задач достаточно большой размерности, в которых требуются действительно гарантированные оценки решений, применение статистического моделирования может привести к ненадежным ответам, которые явно ничего не гарантируют.

Заключение

Свойство "гарантированности" ответов, обеспечиваемое методами интервального анализа при решении задач оценивания областей значений функций, разброса решений систем уравнений и т. п., часто является избыточным с теоретико-вероятностных позиций, а соответствующие интервальные оценки (даже оптимальные) — недостижимыми и излишне "пессимистичными".[4]

Ослабление требований "гарантированности" и "доказательности" решений до условия "приемлемой достоверности" в теоретико-вероятностном смысле в некоторых интервальных задачах может, на наш взгляд, привести к упрощению постановок и/или созданию более эффективных алгоритмов для их решения.

Интервальный анализ явно выигрывает конкуренцию с методами Монте-Карло в тех случаях, когда требуется за практически приемлемое время (т. е. "достаточно быстро") или

[3]Эта вычислительная машина корпорации Sun Microsystems (США) имела четыре 64-разрядных процессора UltraSPARC IV с тактовой частотой 450 МГц. Эксперименты В.В. Колдакова проводились на ней в среде Unix-подобной операционной системы Solaris версии 9.

[4]Важно лишь иметь в виду, что мы совершенно не рассматриваем, насколько адекватной ситуации является при этом сама теоретико-вероятностная модель объекта.

в условиях ограниченных ресурсов ЭВМ вычислить действительно гарантированные оценки множеств решений задач, областей значений функций и т. п., невзирая на возможное огрубление ответа в сравнении с идеальным математическим.

Список литературы

[1] Интервальный анализ. Веб-сайт http://www.ict.nsc.ru/interval

[2] Hansen E.R., Walster G.W. Global optimization using interval analysis. N.Y.: Marcel Dekker, 2003.

[3] Kearfott R.B. Rigorous global search: continuous problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[4] Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[5] Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М.; Ижевск: РХД, 2005.

[6] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982.

[7] Соболь И.М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978.

[8] Kreinovich V., Lakeyev A.V., Rohn J., Kahl P. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. Dordrecht: Kluwer, 1997.

[9] Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение. Дис. … докт. физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт вычисл. технологий СО РАН, 2000.

[10] Nickel K. Die Überschatzung des Wertebereiches einer Funktion in der Intervallrechnung mit Anwendungen auf lineare Gleichungssysteme // Computing. 1977. Vol. 18. P. 15 – 36.

[11] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. М.: Наука, 1990.

[12] Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: УРСС Эдиториал, 2003.

[13] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

[14] Золотарев В.М. Общая теория перемножения независимых случайных величин // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 788–791.

[15] Barth W., Nuding E. Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen // Computing. 1974. Vol. 12. P. 117–125.

[16] Успенский В.А., Семенов А.Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987.

[17] Панов Н.В., Шарый С.П. Стохастические подходы в интервальных методах глобальной оптимизации // Всерос. (с международным участием) совещание по интервальному анализу и его приложениям — ИНТЕРВАЛ-06, 1–4 июля 2006 г., Петергоф, Россия. Расширенные тез. докл. СПб.: Санкт-Петербург. гос. ун-т, 2006. С. 101–105.

Поступила в редакцию 6 октября 2006 г.,
в переработанном виде — 23 ноября 2006 г.