

СЛЕЖЕНИЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ СИГНАЛОМ В ИНТЕРВАЛЬНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ*

Е. М. СМАГИНА

Томский государственный университет, Россия

А. Н. МОИСЕЕВ

Анжеро-Судженский филиал

Томского педагогического университета, Россия

The paper is devoted to solving the problem of tracking for polynomial signal in a linear interval dynamic system with full state information. Represented method gives ability for change solving of this problem by a problem of modal regulator synthesis for some extended system. An example demonstrates a solving of tracking problem by this method.

1. Постановка задачи

Введем следующие обозначения: a, b, \dots, A, B, \dots — векторы и матрицы с числовыми элементами, $[a], [b], \dots, [A], [B], \dots$ — векторы и матрицы с интервальными элементами.

Рассмотрим интервальную динамическую систему с полностью измеряемым вектором состояния

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]u(t) + Ew(t), \quad (1)$$

здесь x — n -мерный вектор состояния, u — r -мерное управляющее воздействие и w — p -мерный вектор неизмеряемых возмущений, который является полиномиальной функцией по t :

$$w(t) = h_0 + h_1 t + \dots + h_{\mu-1} t^{\mu-1}, \quad (2)$$

где $h_0, \dots, h_{\mu-1}$ — p -векторы. Матрицы $[A], [B], E$ имеют размеры $n \times n$, $n \times r$ и $n \times p$ соответственно.

Задача. Требуется определить управление $u(t)$ как функцию регулируемого l -мерного выхода

$$z(t) = Dx(t), \quad (3)$$

состояния x и заданного командного сигнала z_{ref} (размерности l) полиномиального вида

$$z_{\text{ref}}(t) = g_0 + g_1 t + \dots + g_{\eta-1} t^{\eta-1} \quad (4)$$

*Работа выполнена при поддержке Госкомитета Российской Федерации по высшей школе, грант в области "Автоматика и телемеханика. Вычислительная техника".

© Е. М. Смагина, А. Н. Моисеев, 1998.

($\eta \geq \mu; g_0, \dots, g_{\eta-1}$ — l -векторы) таким образом, чтобы обеспечивалось асимптотическое приближение регулируемого выхода $z(t)$ к командному сигналу $z_{\text{ref}}(t)$:

$$z(t) \rightarrow z_{\text{ref}}(t) \text{ при } t \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Частным случаем поставленной задачи при $\mu = \eta = 1$ является задача слежения за постоянным (кусочно-постоянным) сигналом при наличии на входе системы неизмеряемого постоянного (кусочно-постоянного) возмущения, рассмотренная в [3, 8, 9].

2. Решение задачи слежения

Для решения задачи будем использовать предложенный в работе [7] регулятор, представляющий собой серию интеграторов

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= z - z_{\text{ref}}, \\ \dot{q}_2 &= q_1, \\ &\vdots \\ \dot{q}_\eta &= q_{\eta-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$u = Kx + (K_1, \dots, K_\eta) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_\eta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $q_i = q_i(t)$, $i = \overline{1, \eta}$ — l -мерные векторы, а матрица K и блоки K_i имеют размеры $r \times n$ и $r \times l$ соответственно.

Введем новый $(n + \eta l)$ -мерный вектор состояния $(x, q_1, \dots, q_\eta)^\top$ и объединим уравнения (1), (3) и (6) в следующую систему дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [B] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -I_l & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\text{ref}} \\ w \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Уравнение (7) представляет собой пропорциональную линейную обратную связь по состоянию для объединенной системы (8)

$$u = (K, K_1, \dots, K_\eta) \begin{pmatrix} x \\ q_1 \\ \vdots \\ q_\eta \end{pmatrix} \quad (9)$$

Таким образом, если для интервальной динамической системы (8), (9) найти матрицу коэффициентов регулятора (например, методом модального управления [4]), обеспечивающую асимптотическую устойчивость замкнутой системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [A] + [B]K & [B]K_1 & \cdots & [B]K_{\eta-1} & [B]K_\eta \\ D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -I_l & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\text{ref}} \\ w \end{pmatrix}, \quad (10)$$

то динамический регулятор (6), (7) при соответствующих значениях K, K_1, \dots, K_η будет обеспечивать асимптотическое слежение (5) в системе (1), (3). Покажем это.

Интервальная динамическая система (10) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда устойчивы все динамические системы с числовыми параметрами

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + BK & BK_1 & \cdots & BK_{\eta-1} & BK_\eta \\ D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & E \\ -I_l & 0 \\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{\text{ref}} \\ w \end{pmatrix},$$

$$A \in [A], \quad B \in [B]. \quad (11)$$

Данные линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений будут асимптотически устойчивы, если и только если будут асимптотически устойчивы соответствующие однородные системы [1], т. е.

$$\text{Re } \lambda_i \{ \tilde{A}(A, B) \} < 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{pmatrix} A + BK & BK_1 & \cdots & BK_{\eta-1} & BK_\eta \\ D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

для всех $A \in [A], B \in [B]$. Продифференцируем η раз по t обе части всех систем (11). Поскольку $\mu \leq \eta$ и $w(t), z_{\text{ref}}(t)$ являются полиномиальными функциями по t , то для них имеют место следующие дифференциальные уравнения

$$\frac{d^\mu w(t)}{dt} = 0, \quad \frac{d^\eta z_{\text{ref}}(t)}{dt} = 0$$

с неизвестными начальными условиями для $w(t)$: $w(0) = h_0, w^{(1)}(0) = h_1, w^{(2)}(0) = 2h_2, \dots, w^{(\mu-1)}(0) = (\mu - 1)!h_{\mu-1}$ и заданными начальными условиями для $z_{\text{ref}}(t)$: $z_{\text{ref}}(0) = g_0, z_{\text{ref}}^{(1)}(0) = g_1, \dots, z_{\text{ref}}^{(\eta-1)}(0) = (\eta - 1)!g_{\eta-1}$. Поэтому дифференцирование систем (11) дает множество следующих линейных однородных дифференциальных уравнений относительно вектора $\tilde{x} = (x^{(\eta)}, q_1^{(\eta)}, \dots, q_\eta^{(\eta)})^\top$:

$$\left\{ \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(A, B)\tilde{x} \mid A \in [A], B \in [B] \right\}.$$

Так как для всех матриц $\tilde{A}(A, B)$ выполняются условия (12), то при $t \rightarrow \infty$ имеет место предел $\tilde{x}(t) \rightarrow 0$, т. е.

$$\text{для всех } A \in [A], B \in [B] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x^{(\eta)} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_i^{(\eta)} = 0, \quad i = \overline{1, \eta}.$$

Учитывая (6), получаем

$$q_\eta^{(\eta)} = q_{\eta-1}^{(\eta-1)} = \dots = \dot{q}_1 = z - z_{\text{ref}}.$$

Отсюда следует, что $z - z_{\text{ref}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ для всех $A \in [A]$ и $B \in [B]$, что означает выполнение асимптотического слежения в замкнутой интервальной динамической системе (10).

Таким образом, условия разрешимости задачи слежения за сигналом вида (4) в интервальной динамической системе (1)–(3) сводятся к условиям разрешимости задачи синтеза пропорционального регулятора (9), обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (10). Такие задачи подробно рассмотрены в [2, 4, 5].

3. Условия разрешимости задачи слежения

Критерий разрешимости задачи слежения за сигналом полиномиального вида в интервальной динамической системе аналогичен критерию разрешимости задачи слежения за постоянным сигналом [3].

Теорема. *Для того, чтобы в линейной интервальной динамической системе (1)–(3) выполнялось слежение (5) за полиномиальным командным сигналом (4) при наличии на входе неизмеряемого возмущения (2), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) пара интервальных матриц $([A], [B])$ управляема,

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -[A] & [B] \\ -D & 0 \end{pmatrix} = n + l$$

(понятие ранга интервальной матрицы определено в [8, 9]).

Доказательство. Очевидно, что разрешимость задачи слежения эквивалентна управляемости пары интервальных матриц $([\hat{A}], [\hat{B}])$, где

$$[\hat{A}] = \begin{pmatrix} [A] & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ D & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_l & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_l & 0 \end{pmatrix}, \quad [\hat{B}] = \begin{pmatrix} [B] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для доказательства теоремы будем анализировать следующий критерий управляемости пары интервальных матриц [8]: пара матриц $([\hat{A}], [\hat{B}])$ управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}(\lambda I_{n+\eta l} - [\hat{A}], [\hat{B}]) = n + \eta l \quad (13)$$

для любых комплексных λ . Это эквивалентно тому, что не существует таких $\hat{A} \in [\hat{A}]$, $\hat{B} \in [\hat{B}]$ и λ , что $\text{rank}(\lambda I_{n+\eta l} - \hat{A}, \hat{B}) < n + \eta l$, где I_k единичная матрица размера $k \times k$.

Рассмотрим два возможных случая.

1) $\lambda \neq 0$. Тогда критерий (13) эквивалентен равенству

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \lambda I_n - [A] & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [B] \\ -D & \lambda I_l & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_l & \lambda I_l & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I_l & \lambda I_l & 0 \end{pmatrix} = n + \eta l. \quad (14)$$

Анализ блочной структуры матрицы в левой части (14) показывает, что при $\lambda \neq 0$ ее η последних блочных строк линейно независимы. Следовательно,

$$\text{rank}(\lambda I_{n+\eta l} - [\hat{A}], [\hat{B}]) = \eta l + \text{rank}(\lambda I_n - [A], 0, 0, \dots, 0, 0, [B]) = \eta l + \text{rank}(\lambda I_n - [A], [B]).$$

Правая часть данного выражения равна $n + \eta l$ тогда и только тогда, когда пара $([A], [B])$ управляема.

2) $\lambda = 0$. Очевидно, что

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -[A] & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & [B] \\ -D & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_l & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I_l & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\eta - 1)l + \text{rank} \begin{pmatrix} -[A] & [B] \\ -D & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\text{rank}(\lambda I_{n+\eta l} - [\hat{A}], [\hat{B}]) = n + \eta l$ тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -[A] & [B] \\ -D & 0 \end{pmatrix} = n + l, \tag{15}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Условие (15) выполняется тогда и только тогда, когда [3, 8, 9]

- 1) $r \geq l$,
- 2) интервальная система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A]x + [B]u, \\ z &= Dx \end{aligned}$$

не имеет нулей в начале координат.

Таким образом, анализ условий разрешимости задачи асимптотического слежения тесно связан с анализом структуры нулей системы.

4. Пример

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу слежения за квадратичным ($\eta = 3$) командным сигналом для интервального динамического объекта [2] со следующими значениями параметров:

$$[A] = \begin{pmatrix} [-0.031, -0.0128] & [-3.4, -0.7] & -9.8 \\ [-0.00077, -0.0007] & [-0.32, -0.31] & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[B] = \begin{pmatrix} [-18, -15] & 0 \\ 0 & [-3.3, -3] \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть командный сигнал задан для первой компоненты вектора x и на эту же компоненту на входе действуют неизмеряемые возмущения, т. е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = (1, 0, 0).$$

Анализ условий разрешимости показывает, что пара матриц $([A], [B])$ управляема:

$$\text{rank} Y([A], [B]) =$$

$$= \text{rank} \begin{pmatrix} [-18, -15] & 0 & [0.192, 0.558] & [2.1, 11.22] & [-0.064, -0.01] & [25.462, 31.662] \\ 0 & [-3.3, -3] & [0.011, 0.014] & [0.93, 1.056] & [-0.005, -0.003] & [-0.347, -0.29] \\ 0 & 0 & 0 & [-3.3, -3] & [0.011, 0.014] & [0.93, 1.056] \end{pmatrix} = 3.$$

Второе условие разрешимости тоже выполняется, так как

$$\text{rank} \begin{pmatrix} -[A] & [B] \\ -D & 0 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} [0.0128, 0.031] & [0.7, 3.4] & 9.8 & [-18, -15] & 0 \\ [0.0007, 0.00077] & [0.31, 0.32] & 0 & 0 & [-3.3, -3] \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = 4 = n + l,$$

т. е. данная интервальная динамическая система не имеет нулей в начале координат.

Используя метод квазимодальной стабилизации [4] для расширенной системы (8) с параметрами

$$[\hat{A}] = \begin{pmatrix} [-0.031, -0.0128] & [-3.4, -0.7] & -9.8 & 0 & 0 & 0 \\ [-0.00077, -0.0007] & [-0.32, -0.31] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\hat{B}] = \begin{pmatrix} [-18, -15] & 0 \\ 0 & [-3.3, -3] \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получаем следующую матрицу коэффициентов усиления регулятора (9):

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} -0.020 & -0.018 & -0.028 & 0 & 0 & 0 \\ -3.758 & 2.283 & 15.307 & -3.601 & -2.017 & -0.780 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы динамики замкнутой системы

$$[\hat{A}] + [\hat{B}]\hat{K} = \\ = \begin{pmatrix} [0.269, 0.347] & [-3.128, -0.374] & [-9.375, -9.290] & 0 & 0 & 0 \\ [11.272, 12.399] & [-7.856, -7.159] & [-50.525, -45.909] & [10.804, 11.884] & [6.050, 6.655] & [2.340, 2.573] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

интервальный характеристический полином

$$[\varphi_{[\hat{A}]+[\hat{B}]\hat{K}}(s)] = s^6 + [6.812, 7.587]s^5 + [47.395, 87.387]s^4 + [91.213, 141.070]s^3 + \\ + [102.627, 132.230]s^2 + [57.076, 70.438]s + [21.734, 24.126]$$

устойчив (по Харитонову [6]).

Моделирование трубок слежения за квадратичными сигналами различного вида в данной замкнутой интервальной системе при наличии возмущений квадратичной формы представлено на рис. 1, 2 (начальные условия: $x(0) = (0, 0, 0)^T$).

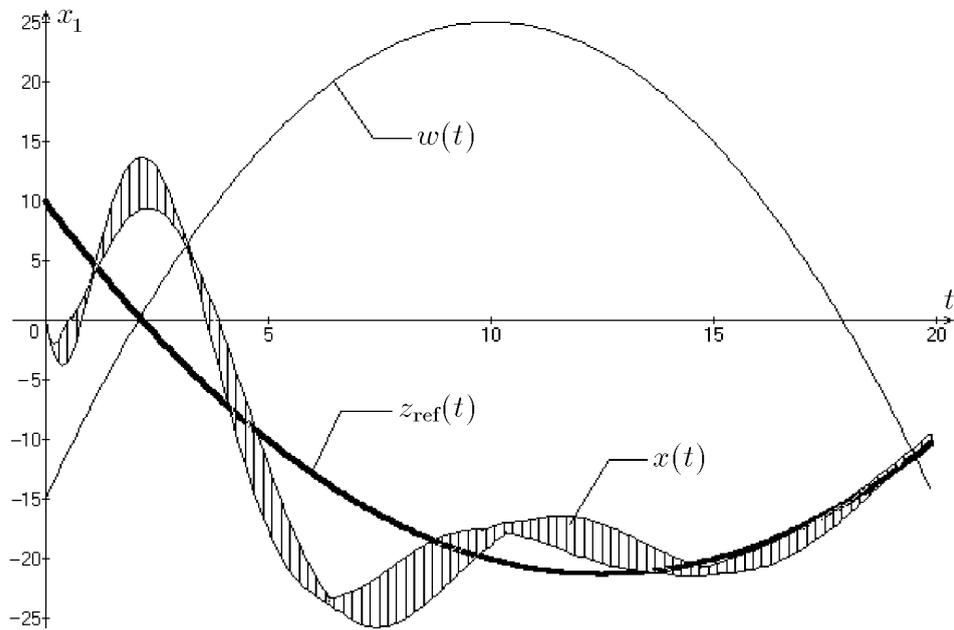


Рис. 1. Моделирование трубки слежения за командным сигналом $z_{\text{ref}}(t) = 10 - 5t + 0.2t^2$ при наличии возмущения $w(t) = -15 + 8t - 0.4t^2$ в замкнутой системе (??), (16).

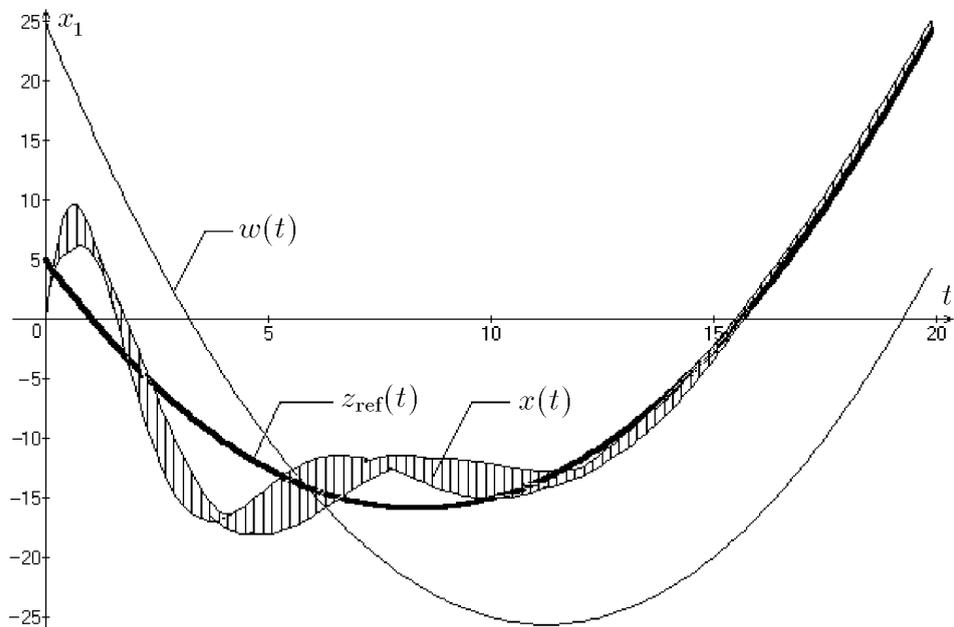


Рис. 2. Моделирование трубки слежения за командным сигналом $z_{\text{ref}}(t) = 5 - 5t + 0.3t^2$ при наличии возмущения $w(t) = 25 - 9t + 0.4t^2$ в замкнутой системе (??), (16).

Список литературы

- [1] ДЕМИДОВИЧ Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. Наука, М., 1967.
- [2] ДУГАРОВА И. В. *Применение интервального анализа при проектировании систем управления с неопределенными параметрами*. Дисс. ... канд. тех. наук, Томск, 1989.
- [3] ДУГАРОВА И. В., СМАГИНА Е. М. *Асимптотическое слежение за постоянным сигналом в системе с неопределенными параметрами*. Деп. в ВИНТИ, №9225–В88, 1988.
- [4] МОИСЕЕВ А. Н., СМАГИНА Е. М. *Модальное управление в многомерной системе с неопределенными параметрами*. Деп. в ВИНТИ, №1343–В97, 1997.
- [5] СМАГИНА Е. М., ДУГАРОВА И. В. *Синтез модального регулятора для систем с неопределенными параметрами*. Деп. в ВИНТИ. Редколлегия журн. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, №789–В87, 1987.
- [6] ХАРИТОНОВ В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений. *Диф. уравнения*, **14**, №11, 1978, 2086–2088.
- [7] PORTER B., BRADSHAW A. Design of linear multivariable continuous-time tracking system. *Int. J. Syst. Sci.*, **5**, No. 12, 1974, 1155–1164.
- [8] SMAGINA YE. M. General problem of asymptotic steady-output tracking for plant with interval parameters. *Int. Comput.*, No. 4(6), 1992, 94–99.
- [9] SMAGINA YE. M., BREWER I. V. Problem of asymptotic tracking for system with interval parameters. In *“Proc. 13. World Congress IFAC”*, June 30 – July 5, 1996. San-Francisco, USA, 1996, 423–428.

Поступила в редакцию 25 сентября 1997 г.