Вычислительные технологии **Том 11, № 6, 2006**

НЕКООПЕРАТИВНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ В ЗАДАЧЕ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОГО МОМЕНТА ОБРАЩЕНИЯ К СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ*

В. В. Мазалов, Ю. В. Чуйко
Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН, Петрозаводск, Республика Карелия, Россия
e-mail vmazalov@krc.karelia.ru, julia@krc.karelia.ru

An optimal arrival time problem for the queuing system $?/M/1/0$ which accounts for a given “convenience” function is considered.

Введение

Рассматривается система массового обслуживания со следующими характеристиками:

— в каждый момент времени система способна обслуживать не более одной заявки;

— в системе отсутствует очередь. Если на момент поступления очередной заявки в системе уже обслуживается заявка, то поступившая заявка получает отказ в обслуживании;

— время обслуживания очередной заявки является экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $1/\mu$ ($\mu > 0$);

— для поступающих заявок задана функция “комфортности” $C(t)$, отражающая для заявки степень желательности начала обслуживания в системе в момент t.

В качестве примеров таких систем можно привести используемые во многих организациях сервисы общего доступа сотрудников к ресурсам сетей Интернет и Интранет: dial-up серверы удаленного доступа, терминалы для работы с электронной почтой и т. д. Другой пример — это различные сетевые сервисы бронирования мест (транспорт, гостиницы и т. п.), для которых важна гарантия того, что одно и то же место не будет забронировано одновременно двумя клиентами. Один из вариантов решения — установление разрешения на обслуживание не более одного соединения, в данном случае — оформление одновременно не более одного заказа. Аналогичная задача, в которой игроки выбирают момент обращения в системе, обслуживающей в каждый момент времени не более одной заявки, рассмотрена в [1]. В [2] игроки выбирают одну из двух таких систем. К похожим задачам относятся задачи угадывания одного из значений в последовательности случайных величин [3, 4].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Отделения математических наук РАН по программе “Математические и алгоритмические проблемы информационных систем нового поколения” и Фонда содействия отечественной науке.

Для каждого игрока необходимо определить равновесную стратегию поведения — выбора момента времени t поступления заявки в систему, максимизирующего выигрыш игрока на интервале $[t_0, T]$, где t_0 и T определяются в процессе решения задачи. Будем искать равновесие, по Нэшу, в смешанных стратегиях, где в качестве стратегий будем искать вероятностные распределения моментов поступления в систему заявок от игроков на интервале $[t_0, T]$. При этом рассмотрим случай абсолютно непрерывных распределений, когда существуют плотности этих распределений. В этом случае функции плотности однозначно определяют соответствующие искомые стратегии, поэтому далее под термином "смешанная стратегия игрока" будем понимать плотность распределения моментов поступления в систему заявок от данного игрока на интервале $[t_0, T]$.

1. Функция "комфортности" в данной модели

В модели, рассматриваемой в данной работе, введена функция "комфортности". "Комфортность" работы пользователей зависит от времени суток и может выражать прибыль или потери пользователя от выполнения заявки в момент t. В качестве примера возможной интерпретации функции "комфортности" можно рассмотреть систему доступа пользователей в сеть Интернет через один общий dial-up сервер удаленного доступа с одним модемом, обслуживающий одновременно не более одного пользователя. При этом пользователь оплачивает только время использования телефонной линии. Для простоты будем считать, что все пользователи работают с одним и тем же Интернет-узлом, например, загружают на свои компьютеры обновления программного обеспечения с официального Web-сервера производителя. Степень загруженности каналов связи и узлов Интернет в течение суток изменяется, соответственно меняются пропускная способность каналов и время отклика узлов. Это влияет на время выполнения заявок пользователя. В данном случае это время загрузки файлов с Интернет-узла на компьютер пользователя, которое пропорционально его затратам на оплату услуг телефонной компании. Если рассматривать снижение этих затрат как критерий "комфортности", то в качестве функции "комфортности" можно взять функцию, оценивающую скорость передачи информации между dial-up сервером удаленного доступа и используемым Интернет-узлом в каждый момент времени. В численном виде приближение такой функции можно получить, фиксируя значения оценок скорости прохождения пакета информации через равные промежутки времени в течение суток. При этом значение скорости можно оценить как $1/t_{\mathrm{answ}}(t)$, где $t_{\mathrm{answ}}(t)$ — время отклика в миллисекундах Интернет-узла, которое выводит программа ping, запускаемая на dial-up сервере удаленного доступа в момент времени t. Тогда такая оценка представляет собой число пакетов в миллисекунду, которые могут быть переданы от Интернет-узла до dial-up сервера удаленного доступа. Пример графика такой функции представлен на рис. 1. Значения данной функции "комфортности" отражают результаты измерений через каждые 20 минут в течение суток скорости передачи данных от узла download.com к dial-up серверу удаленного доступа КарНЦ РАН.

Другим более обобщенным критерием для построения функции "комфортности" может быть степень удобства для пользователя обращения к системе обслуживания в различное время суток. Она может зависеть от множества факторов, в том числе психологических, которые сложно оценить численно. Такая функция может быть построена на основе статистических результатов опросов пользователей. Например, сотрудникам некоторой организации выделена одна подключенная к сети Интернет рабочая станция общего доступа для

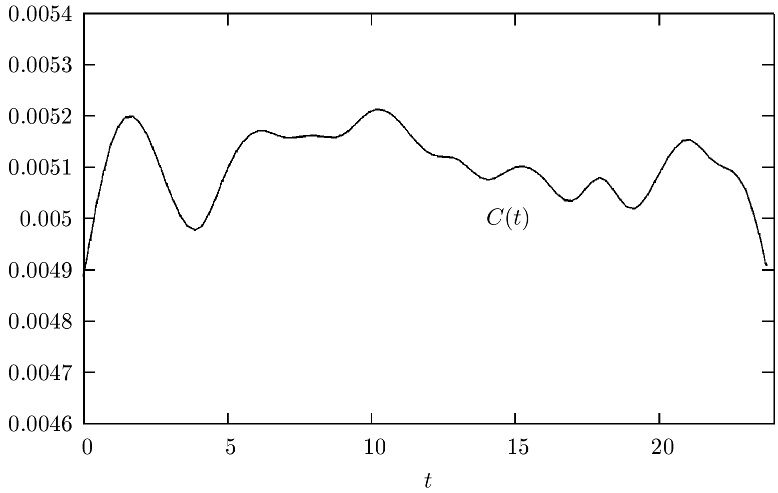

Рис. 1. Пример функции "комфортности" работы в сети Интернет через dial-up сервер удаленного доступа.

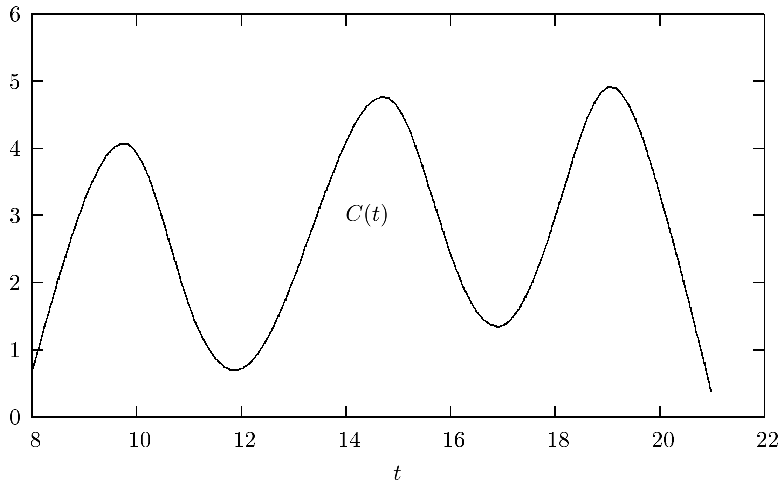

Рис. 2. Пример функции "комфортности" работы с рабочей станцией общего доступа в течение рабочего дня.

проверки своей электронной почты в течение рабочего дня. Если учесть режим занятости сотрудника, то удобнее всего ему работать с почтовым компьютером в начале и в конце рабочего дня и в обеденное время. Тогда функция "комфортности" может выглядеть примерно так, как показано на рис. 2 .

2. Математическая модель для системы с двумя игроками

Пусть систему обслуживания используют два игрока, выбирающих моменты времени обращения к системе t и s. Для заявки, поступающей в момент t, возможны три случая:

1) $t < s$, т. е. данная заявка приходит в систему раньше поступления заявки от другого игрока;

2) данная заявка приходит в систему после поступления заявки от другого игрока $(s < t)$, которая к моменту t еще не закончила обслуживаться;

3) данная заявка приходит в систему после поступления заявки от другого игрока $(s < t)$, обслуживание которой к моменту t уже завершилось.

Заявка успешно попадает на обслуживание только в первом и третьем случаях и получает отказ в обслуживании во втором. В случае успешного обслуживания заявки при поступлении ее в момент t игрок получает прибыль, равную $C(t)$.

Пусть $f(t)$ и $g(s)$ — стратегии первого и второго игроков соответственно. Тогда ожидаемый выигрыш для каждого из игроков, когда противник использует смешанную стратегию, будет иметь вид

$$H_1(t,g) = C(t)\left(\int\limits_{-\infty}^{t} g(s)(1-e^{-\mu(t-s)})ds + \int\limits_{t}^{\infty} g(s)ds\right),$$
$$H_2(f,s) = C(s)\left(\int\limits_{-\infty}^{s} f(t)(1-e^{-\mu(s-t)})dt + \int\limits_{s}^{\infty} f(t)dt\right)$$

или, учитывая что f и g — плотности распределения:

$$H_1(t,g) = C(t)\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{t} g(s)e^{-\mu(t-s)}ds\right),$$
$$H_2(f,s) = C(s)\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{s} f(t)e^{-\mu(s-t)}dt\right).$$

Заметим, что функция “комфортности” входит в ожидаемый выигрыш игрока как множитель, это означает, что она может определяться с точностью до положительного постоянного множителя.

Будем искать симметричное равновесие Нэша, т. е. такое, где искомые стратегии для обоих игроков равны, поэтому достаточно рассмотреть задачу максимизации ожидаемого выигрыша первого игрока:

$$H(t,g) := H_1(t,g) = C(t)\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{t} g(s)e^{-\mu(t-s)}ds\right) \to \max.$$

Необходимо найти интервал времени $[t_0, T]$ и функцию $g(t)$, которая на данном интервале отражает плотность распределения моментов времени обращения второго игрока к системе обслуживания, а ожидаемый выигрыш на данном интервале принимает значение глобального максимума.

3. Равновесное, по Нэшу, решение задачи

Для равновесного решения [5, 6] должно выполняться необходимое условие $\dfrac{\partial H(t,g)}{\partial t} = 0$ на интервале $t \in (t_0, T)$. После преобразования $\dfrac{\partial H(t,g)}{\partial t} = 0$ получаем интегральное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{t} g(s)e^{\mu s}ds = \frac{C(t)g(t) - C'(t)}{\mu C(t) - C'(t)}e^{\mu t}, \tag{1}$$

дифференцируя которое по t и преобразовывая, в итоге получаем линейное неоднородное дифференциальное уравнение для нахождения $g(t)$:

$$g'(t)\left(C^2(t)\mu - C(t)C'(t)\right) + g(t)\left(C(t)C''(t) - 2(C'(t))^2 + C'(t)C(t)\mu\right) - \\ -\mu(C(t)C''(t) - 2(C'(t))^2 + C'(t)C(t)\mu) = 0. \tag{2}$$

Функция $g(t)$ определяется для интервала $[t_0, T]$, на котором происходит обращение игроков к системе обслуживания. За границами данного интервала полагаем $g(t) \equiv 0$.

Общее решение однородного уравнения:

$$g_{\text{о}}(t) = Ke^{I(t)},$$

где

$$I(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\dfrac{C''(\tau)}{C'(\tau)} - 2\dfrac{C'(\tau)}{C(\tau)} + \mu}{1 - \mu\dfrac{C(\tau)}{C'(\tau)}} d\tau.$$

Частное решение неоднородного уравнения очевидно $g_{\text{н}}(t) = \mu$. Тогда окончательным результатом решения уравнения (2) является

$$g(t) = Ke^{I(t)} + \mu,$$

где постоянная K определяется подстановкой полученного решения дифференциального уравнения в исходное интегральное уравнение (1):

$$K = e^{\mu t_0}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{I(s)+\mu s} ds - \frac{C(t)e^{I(t)+\mu t}}{\mu C(t) - C'(t)}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Учитывая, что K не зависит от t, в выражении (3) полагаем $t = t_0$ и получаем

$$K = \frac{C'(t_0)}{C(t_0)} - \mu.$$

Тогда окончательный вид искомой плотности распределения

$$g(t) = \left(\frac{C'(t_0)}{C(t_0)} - \mu\right)e^{I(t)} + \mu.$$

Необходимо также учесть, что $g(t)$ — плотность распределения моментов времени обращения игрока к системе обслуживания, следовательно, границы интервала $[t_0, T]$ выбираются такими, что для $t \in [t_0, T]$ выполняются соотношения $g(t) \geq 0$ и

$$\int\limits_{t_0}^{T} g(t)dt = 1. \tag{4}$$

Равновесное значение ожидаемого выигрыша постоянно на $[t_0, T]$, т.е. для всех $t \in [t_0, T]$ $H(t, g) \equiv v = C(t_0)$. Данное равновесное значение будет являться решением, если для всех $t \in (-\infty, \infty)$ $H(t, g) \leq C(t_0)$. Значение ожидаемого выигрыша на

$t \in (-\infty, t_0]$ $H(t,g) = C(t)$, т. е. для функции "комфортности" должно выполняться условие $C(t) \le C(t_0)$ для $t \in (-\infty, t_0]$.

Ожидаемый выигрыш на $t \in [T, \infty)$ имеет вид

$$H(t,g) = C(t)\left(1 - e^{-\mu(t-T)} + Ke^{-\mu t}\int\limits_{t_0}^{T} e^{I(s)+\mu s}ds\right).$$

Используя $H(t_0,g) = H(T,g)$, получим

$$C(t_0) = C(T)e^{-\mu T}K\int\limits_{t_0}^{T} e^{I(s)+\mu s}ds,$$

$$\int\limits_{t_0}^{T} e^{I(s)+\mu s}ds = e^{\mu T}\frac{C(t_0)}{KC(T)}.$$

Тогда выигрыш на $t \in [T, \infty)$:

$$H(t,g) = C(t)\left(1 - e^{-\mu(t-T)}\left(1 - \frac{C(t_0)}{C(T)}\right)\right), \tag{5}$$

и для функции "комфортности" при $t \ge T$ должно выполняться

$$C(t_0) \ge C(t)\left(1 - e^{-\mu(t-T)}\left(1 - \frac{C(t_0)}{C(T)}\right)\right). \tag{6}$$

4. Решение для экспоненциальной функции "комфортности"

Пусть функция "комфортности" имеет вид $C(t) = ae^{bt}$ для $t \ge t_0$ и $C(t) = ae^{bt_0} = C(t_0)$ для $t \le t_0$. Тогда

$$g(t) = (b-\mu)e^{-b(t-t_0)} + \mu.$$

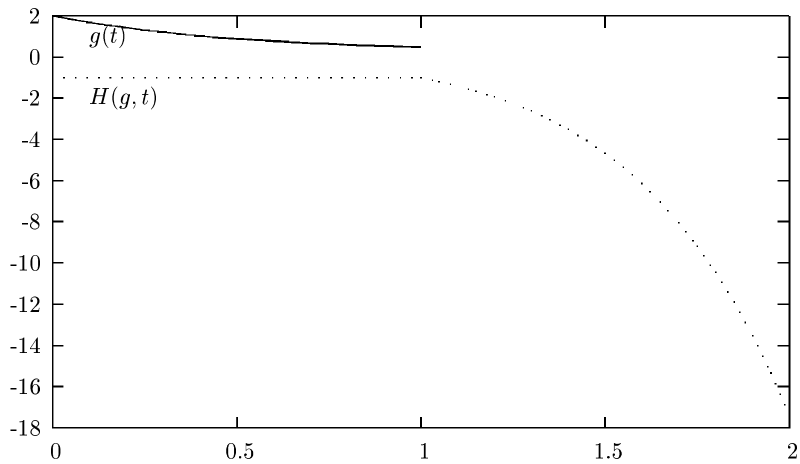

Рис. 3. Вид решения для экспоненциальной функции "комфортности".

Пусть t_0 задано, тогда правая граница интервала $[t_0, T]$ находится из условия (4)

$$\mu = \frac{be^{-b(T-t_0)}}{e^{-b(T-t_0)} - 1 + b(T - t_0)}.$$

В этом случае на интервале $[t_0, T]$ равновесный ожидаемый выигрыш имеет вид $H(t, g) \equiv ae^{bt_0}$. Для $t \leq t_0$ ожидаемый выигрыш равен $C(t_0)$. Для того чтобы полученное равновесное решение было решением исходной задачи, необходимо выполнение условия (6): для $t \geq T$

$$ae^{bt_0} \geq ae^{bt}\left(1 - e^{-\mu(t-T)}(1 - e^{-b(t-t_0)})\right).$$

При $b > 0$ и $a < 0$ данное условие будет выполнено.

На рис. 3 приведен вид $g(t)$ для значений параметров $a = -1$, $b = 2$, $\mu = 0.238$, $t_0 = 0$, $T = 1$.

5. Решение для параболической функции "комфортности"

Пусть функция "комфортности" имеет вид $C(t) = at(1-t)$, где $a > 0$. Тогда

$$g(t) = \frac{(1 - 2t - \mu t + \mu t^2)t_0(1 - t_0)}{t^2(1-t)^2} + \mu. \tag{7}$$

Границы интервала $[t_0, T]$ должны удовлетворять условию (4)

$$\mu = \frac{t_0(1-t_0)}{T(1-T)\left(T - t_0 + t_0(1-t_0)\ln\dfrac{t_0(1-T)}{T(1-t_0)}\right)}. \tag{8}$$

В этом случае на интервале $[t_0, T]$ равновесный ожидаемый выигрыш имеет вид $H(t, g) \equiv at_0(1-t_0)$. Для $t \leq t_0$ ожидаемый выигрыш $C(t)$. Для того чтобы полученное равновесное решение было решением исходной задачи, необходимо выполнение условия (6): для $t \geq T$

$$at_0(1-t_0) \geq at(1-t)\left(1 - e^{-\mu(t-T)}\left(1 - \frac{t_0(1-t_0)}{T(1-T)}\right)\right).$$

Лемма 1. *Существует такая пара $t_0 \in (0, 1/2)$ и $T \in [1/2, 1)$, что $g(T) = 0$, где $g(t)$ имеет вид (7) и выполняется (8).*

Доказательство. Покажем, что существует $T \in [1/2, 1)$ такое, что выполняется $g(T) = 0$, т. е. $h_1(T) := (1 - 2T - \mu T + \mu T^2)t_0(1-t_0) + \mu T^2(1-T)^2 = 0$,

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\mu}{4}t_0(1-t_0) + \frac{\mu}{16} \geq -\frac{\mu}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{\mu}{16} = 0,$$

$$h_1(1) = -t_0(1-t_0) < 0.$$

Следовательно, существует $T \in [1/2, 1)$, удовлетворяющее условию $g(T) = 0$. Проверим существование для него $t_0 \in (0, 1/2)$ такого, что выполняется (8):

$$h_2(t_0) := t_0(1-t_0) - \mu T(1-T)\left(T - t_0 + t_0(1-t_0)\ln\frac{t_0(1-T)}{T(1-t_0)}\right) = 0,$$

$$h_2(0) = -\mu T(1-T) < 0,$$
$$h_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \mu T(1-T)\left(\frac{1}{4}\ln\frac{T}{1-T} - T + \frac{1}{2}\right),$$
$$h_3(T) := \frac{1}{4}\ln\frac{T}{1-T} - T + \frac{1}{2}, \quad h_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$
$$h_3'(T) = \frac{1}{4T(1-T)} - 1 \geq \frac{1}{4}\cdot 4 - 1 = 0,$$

т. е. $h_3(T) \geq 0$ при $T \in [1/2, 1)$. Тогда $h_2(1/2) \geq 1/4 > 0$. Доказательство закончено. □

Лемма 2. *Если $g(t)$ имеет вид (7) и выполнено $g(T) = 0$, то для всех $t \in [t_0, T]$ выполняется $g(t) \geq g(T)$.*

Доказательство. Пусть выполняется $g(T) = 0$, т. е.

$$\frac{1 - 2T - \mu T + \mu T^2}{T^2(1-T)^2} = -\frac{\mu}{t_0(1-t_0)}.$$

Пусть для некоторого $t \in (t_0, T)$ $g(t) < g(T)$, т. е.

$$\frac{t_0(1-t_0)(1-2t-\mu t+\mu t^2)}{t^2(1-t)^2} < \frac{t_0(1-t_0)(1-2T-\mu T+\mu T^2)}{T^2(1-T)^2}$$

или, учитывая, что $t_0(1-t_0) > 0$,

$$\frac{(1-2t-\mu t+\mu t^2)}{t^2(1-t)^2} < \frac{(1-2T-\mu T+\mu T^2)}{T^2(1-T)^2} = -\frac{\mu}{t_0(1-t_0)}. \tag{9}$$

Пусть $t \in [t_0, 1/2]$, тогда $t_0(1-t_0)(1-2t) + \mu t(1-t)(t(1-t) - t_0(1-t_0)) \geq 0$, что противоречит предположению (9). Пусть $t \in [1/2, T]$, тогда $t(1-t) \geq T(1-T)$ и

$$\begin{aligned}(1-2t)T^2(1-T)^2 - (1-2T)t^2(1-t)^2 = (2T-1)t^2(1-t)^2 - (2t-1)T^2(1-T)^2 =\\ = \left(T^2 - (1-T)^2\right)t^2(1-t)^2 - \left(t^2 - (1-t)^2\right)T^2(1-T)^2 =\\ = T^2t^2\left((1-t)^2 - (1-T)^2\right) + (1-t)^2(1-T)^2\left(T^2 - t^2\right) \geq 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}(1-2t-\mu t+\mu t^2)T^2(1-T)^2 - (1-2T-\mu T+\mu T^2)t^2(1-t)^2 =\\ = (1-2t)T^2(1-T)^2 - (1-2T)t^2(1-t)^2 + \mu T(1-T)t(1-t)\left(t(1-t) - T(1-T)\right) \geq 0,\end{aligned}$$

что противоречит предположению (9). Доказательство закончено. □

Лемма 3. *Если $g(t)$ имеет вид (7) и выполнено $g(T) = 0$ и $T \in [1/2, 1)$, то функция ожидаемого выигрыша $H(t)$ вида (5) убывает на $t \in (T, \infty)$.*

Доказательство. Пусть выполняется $g(T) = 0$, т. е.

$$t_0(1-t_0)(1-2T) + \mu T(1-T)(T(1-T) - t_0(1-t_0)) = 0.$$

Для $t \geq T$

$$H(t) = at(1-t)\left(1 - e^{-\mu(t-T)}\left(1 - \frac{t_0(1-t_0)}{T(1-T)}\right)\right),$$

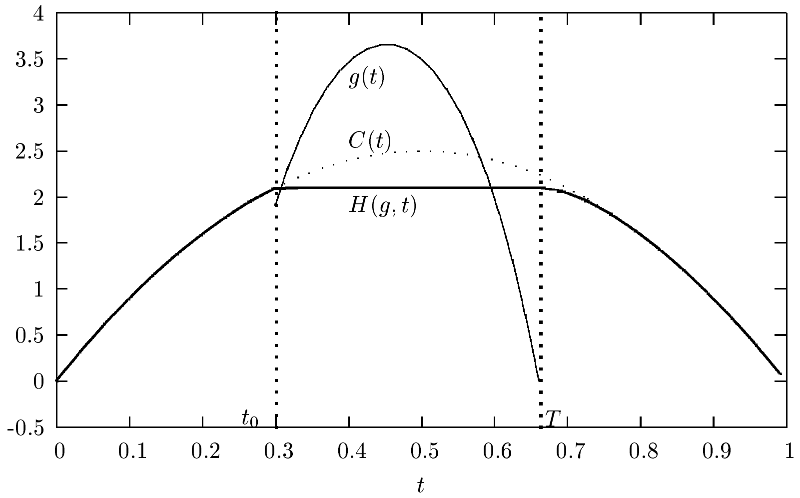

Рис. 4. Вид решения для параболической функции “комфортности”.

$$H'(t)/a = (1-2t)\left(1-e^{-\mu(t-T)}\right)+$$
$$+\frac{e^{-\mu(t-T)}}{T(1-T)}\left(t_0(1-t_0)(1-2t)+\mu t(1-t)(T(1-T)-t_0(1-t_0))\right)<$$
$$<(1-2t)\left(1-e^{-\mu(t-T)}\right)+$$
$$+\frac{e^{-\mu(t-T)}}{T(1-T)}\left(t_0(1-t_0)(1-2T)+\mu T(1-T)(T(1-T)-t_0(1-t_0))\right)=$$
$$=(1-2t)\left(1-e^{-\mu(t-T)}\right)<0.$$

Доказательство закончено. □

Тогда на основании приведенных лемм может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема. *Стратегия* $g(t)$ *вида (7) на интервале* $[t_0, T]$, *где* $0 < t_0 < 1/2 \le T < 1$, *такие что* $g(T) = 0$ *и* $\int\limits_{t_0}^{T} g(t)dt = 1$, *является равновесным решением задачи с заданной функцией “комфортности”* $C(t) = at(1-t)$, *где* $a > 0$.

Доказательство. Неотрицательность функции плотности $g(t)$ на $[t_0, T]$ следует из леммы 2. Из леммы 1 ($t_0 < 1/2$) следует возрастание функции ожидаемого выигрыша при $t < t_0$. Из леммы 3 следует убывание функции ожидаемого выигрыша при $t > t_0$. Доказательство закончено. □

На рис. 4 приведен вид $g(t)$ для значений параметров $a = 5$, $\mu = 21.876$, $t_0 = 0.3$, $T = 0.66167$.

6. Ожидаемый выигрыш для системы с числом игроков ≥ 3

Пусть систему обслуживания используют $n+1$ игроков, выбирающих моменты времени обращения к системе $\tau_1, \dots, \tau_n$ и t. Необходимо найти ожидаемый выигрыш игрока, использующего чистую стратегию t, когда все остальные игроки с номерами $i = 1, \dots, n$ используют одинаковые смешанные стратегии вида $g(\tau_i)$.

Найдем ожидаемый выигрыш для случая трех игроков. Заявка от игрока, выбирающего момент t, может не попасть на обслуживание в том случае, когда заявка от одного из двух других игроков ранее поступила в систему и к моменту t не успела обслужиться. Пусть это игрок, выбирающий момент τ_1. Для успешного начала обслуживания заявки данного игрока заявка от игрока, выбирающего τ_2, должна была либо поступить и успеть обслужиться до момента τ_1, либо поступить после момента τ_1. Тогда вероятность того, что заявка, поступившая в момент t, встанет на обслуживание

$$P_2(t,g) := 1 - 2\int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}\left(\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} g(\tau_2)(1-e^{-\mu(\tau_1-\tau_2)})d\tau_2 + \int\limits_{\tau_1}^{+\infty} g(\tau_2)d\tau_2\right)d\tau_1 =$$

$$= 1 - 2\int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}\left(1 - \int\limits_{-\infty}^{\tau_1} g(\tau_2)e^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}d\tau_2\right)d\tau_1.$$

Аналогично для ситуации $n+1$ игроков соответствующая вероятность будет

$$P_n(t,g) := 1 - n\int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}\times$$

$$\times\left(1-(n-1)\int\limits_{-\infty}^{\tau_1} g(\tau_2)e^{-\mu(\tau_1-\tau_2)}\left(1-(n-2)\int\limits_{-\infty}^{\tau_2}\ldots\right)d\tau_2\right)d\tau_1.$$

В рекуррентной записи данные вероятности имеют вид

$$P_1(t,g) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}d\tau_1,$$

$$P_2(t,g) = 1 - 2\int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}P_1(\tau_1,g)d\tau_1,$$

$$\ldots$$

$$P_n(t,g) = 1 - n\int\limits_{-\infty}^{t} g(\tau_1)e^{-\mu(t-\tau_1)}P_{n-1}(\tau_1,g)d\tau_1,$$

а соответствующие выигрыши

$$H(t,g^n) = C(t)P_n(t,g).$$

Рассмотрим теперь данную задачу с другой стороны, а именно, какой должна быть функция “комфортности” для того, чтобы равновесие, по Нэшу, имело заданный вид. Начнем с равномерного случая, а затем рассмотрим экспоненциальный случай как более сложный.

7. Вид функции "комфортности" в случае равномерных стратегий игроков

Пусть нашей целью является нахождение вида такой функции "комфортности", чтобы для нее равновесные стратегии игроков представляли собой плотности равномерного распределения на интервале $[0,1]$, т. е. $g(t)=1$. В этом случае вероятность попадания заявки на обслуживание

$$P_n(t,g)=1+\frac{n!(-1)^n}{\mu^n}\left((1-e^{-\mu t})\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-\mu)^i}{i!}-e^{-\mu t}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\mu t)^i}{i!}\sum_{j=0}^{n-i-1}\frac{(-\mu)^j}{j!}\right)=$$

$$=1+\frac{n!}{(-\mu)^n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-\mu)^i}{i!}-e^{-\mu t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-\mu)^i(1-t)^i}{i!}\right).$$

Так как в равновесии ожидаемый выигрыш должен быть постоянным на интервале $[0,1]$, функция "комфортности" на нем должна иметь вид $C_n(t)=\mathrm{const}/P_n(t,g)$.

Рассмотрим поведение системы при бесконечно большом числе игроков:

$$P_n(t,g)=1+\frac{n!}{(-\mu)^n}\left(e^{-\mu}-r_n(-\mu)-e^{-\mu t}+e^{-\mu t}r_n(-\mu(1-t))\right)=$$

$$=1-\frac{n!}{(-\mu)^n}\left(r_n(-\mu)-e^{-\mu t}r_n(-\mu(1-t))\right),$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в разложении e^x в ряд Маклорена, для которого справедлива оценка $|r_n(x)|\le\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Учитывая, что

$$|r_n(-\mu)-e^{-\mu t}r_n(-\mu(1-t))|\le|r_n(-\mu)|+|e^{-\mu t}r_n(-\mu(1-t))|\le$$

$$\le\frac{\mu^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(\mu(1-t))^{n+1}}{(n+1)!}\le\frac{2\mu^{n+1}}{(n+1)!}$$

и

$$\left|\frac{n!}{(-\mu)^n}\frac{2\mu^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\frac{2\mu}{n+1}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

получаем $P_n(t,g)\to 1$ при $n\to\infty$. То есть при бесконечно большом числе игроков вероятность заявки попасть на обслуживание стремится к единице, а функция "комфортности" в этом случае не зависит от t и n.

8. Вид функции "комфортности" в случае экспоненциальных стратегий игроков

Пусть стратегии игроков имеют вид $g(t)=\lambda e^{-\lambda t}$, $t\ge 0$. Тогда вероятность заявки попасть на обслуживание

$$P_n(t,g)=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{e^{-i\lambda t}-e^{-(n-i)\lambda t-\mu t}}{\prod_{j=1}^{i}(j-\mu/\lambda)}.$$

Так как в равновесии ожидаемый выигрыш должен быть постоянным на $t \geq 0$, функция “комфортности” на $t \geq 0$ должна иметь вид $C_n(t) = \mathrm{const}/P_n(t,g)$.

Пусть μ близко к нулю, т. е. среднее время обслуживания очень велико. Тогда

$$\prod_{j=1}^{i}(j-\mu/\lambda) \approx i! \text{ и } e^{-\mu t} \approx 1,$$

$$P_n(t,g) \approx 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!} \frac{e^{-i\lambda t} - e^{-(n-i)\lambda t}}{i!} =$$
$$= 1 + (1+e^{-\lambda t})^n - 1 - (1+e^{\lambda t})^n e^{-n\lambda t} + e^{-n\lambda t} = e^{-n\lambda t}.$$

Тогда функция “комфортности” имеет вид $C_n(t) \approx \mathrm{const} \cdot e^{n\lambda t}$. При $n \to \infty$ $P_n(t,g) \to 0$, а $C_n(t) \to \infty$.

Заключение

Рассмотрена задача выбора оптимального момента обращения игрока к системе массового обслуживания $?/M/1/0$ с учетом заданной функции “комфортности”. Для случая двух игроков построена математическая модель, найден аналитический вид равновесного, по Нэшу, решения. Для частных случаев задачи с экспоненциальной и параболической функциями “комфортности” проведен анализ существования допустимого равновесного, по Нэшу, решения.

Для случая $n+1 \geq 3$ игроков найден ожидаемый выигрыш в общем виде и рассмотрены задачи нахождения вида необходимой функции “комфортности” для того, чтобы равновесные стратегии игроков имели заданный вид — равномерное и экспоненциальное распределение. Для этих задач проведен анализ поведения системы при бесконечно большом количестве игроков.

Список литературы

[1] Glazer A., Hassin R. $?/M/1$: On the equilibrium distribution of customer arrivals // Europ. J. of Operational Research. 1983. Vol. 13, N 2. P. 146–150.

[2] Altman E., Jimenez T., Nunez Queija R., Yechiali U. Optimal routing among $\cdot/M/1$ queues with partial information // Stochastic Models. 2004. Vol. 20, N 2. P. 149–172.

[3] Sakaguchi M., Szajowski K. Competitive prediction of a random variable // Mathematica Japonica. 1996. Vol. 43, N 3. P. 461–472.

[4] Belkovskii D.V., Garnaev A.Y. A competitive prediction number game under unsymmetrical conditions // Game Theory and Applications. Vol. X, Nova Sci. Publ., Commack, N.Y., 2005 (in appear).

[5] Оуэн Г. Теория игр. М.: Вузовская книга, 2004.

[6] Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учеб. пособие для университетов. М.: Высш. шк., 1998.

[7] Муллен Э. Теория игр с примерами из математической экономики: Пер. с франц. М.: Мир, 1985.

Поступила в редакцию 7 июня 2005 г.,
в переработанном виде — 18 октября 2006 г.