Вычислительные технологии **Том 11, Специальный выпуск, 2006**

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

И.В. Корытов
Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ, Россия
e-mail: kor2003@inbox.ru

A proof of the existence of representation of an error functional of cubature formula at weighted Sobolev space is presented. Such representation also known as a general form of functional is a basis for derivation of the norm of functional and its estimations on the space of functions.

Введение

Если принять во внимание обзор, приведенный в монографии [1], то результаты данного исследования можно отнести ко второму направлению в теории кубатурных формул — асимптотически оптимальным решетчатым формулам в пространствах функций конечной гладкости. Функционально-аналитический подход, составивший основу исследования, предполагает, что подынтегральные функции объединены в некоторое банахово пространство, а разность между вычисляемым интегралом и приближающей его линейной комбинацией значений подынтегральной функции — результат действия некоторого линейного функционала. Численное значение нормы этого функционала позволяет находить априорные оценки погрешности кубатурной формулы на элементах изучаемого пространства. В рамках данного подхода, в отличие от алгебраического, при оценке качества формулы приближенного интегрирования используется критерий минимальности нормы функционала погрешности. Нормы функционалов определяются через экстремальные функции, являющиеся обобщенными решениями дифференциальных уравнений в частных производных. Набор производных искомой функции, содержащихся в дифференциальном уравнении, зависит от набора производных функций, входящих в норму основного пространства. Иными словами, оператор, составляющий такое уравнение, порождается видом нормы функции в основном пространстве.

После построения С.Л. Соболевым теории для пространств $L_2^{(m)}$ происходило обобщение в направлениях от $L_2^{(m)}$ к $L_p^{(m)}$ [2–5] и от факторизации $L_2^{(m)}$ к $W_2^{(m)}$ [6, 7]. Первое из них развивалось В.И. Половинкиным. Переход от $W_2^{(m)}$ к $W_p^{(m)}$ осуществлен Ц.Б. Шойнжуровым [8] путем введения специальной нормы, для которой соответствующий дифференциальный оператор был хорошо изучен [9]. Независимо от этого М.Д. Рамазанов применил сходный прием нормирования пространства $W_p^{(m)}$ [10], что отражено также и в монографии С.Л. Соболева и В.Л. Васкевича [1].

Весовые пространства Соболева определяются как замыкание пространств бесконечно дифференцируемых функций, либо убывающих на бесконечности быстрее любой степени, либо финитных в ограниченной области по норме, содержащей линейную комбинацию модулей всех существующих обобщенных частных производных функции, произведения которых с некоторой заданной функцией, называемой весом, суммируемы в p-й степени. Начало исследованиям кубатурных формул в таких пространствах положено Ц.Б. Шойнжуровым в [8], где вес вводился в норму, заданную с помощью преобразования Фурье ядра Бесселя — Макдональда. Функционалы погрешности в фактор-пространстве $L_p^{(m)}$ со степенным весом $|x|^s$ изучались Г.Л. Францевым [11].

1. Нормы, операторы, фундаментальные решения

Рассматривается функционал погрешности кубатурной формулы (далее — функционал)

$$l(x) = \chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)}), \tag{1}$$

где $\chi_\Omega(x)$ — характеристическая функция ограниченной кусочно-гладкой поверхностью области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$; c_k — коэффициенты кубатурной формулы, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ — узлы.

Норма в весовом пространстве Соболева определяется как

$$\left\| \varphi(x) | W_{p,s}^{(m)}(\mathbb{R}_n) \right\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |x|^s \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi(x) \right|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{2}$$

где $|x|^s$ — степенная функция, называемая весом. Константы $\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!}$, $|\alpha| \le m$, указывают на наличие всех обобщенных частных производных функции основного пространства. При $s = 0$ получается норма, которую с учетом естественного количества существующих частных производных назовем “естественной”, подразумевая обобщение нормы из фактор-пространства $L_p^{(m)}$ на само пространство $W_p^{(m)}$. Здесь и далее $W_{p,0}^{(m)} = W_p^{(m)}$.

Оператор частного дифференцирования функции n переменных вида

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} a_{m-|\alpha|} \Delta^{|\alpha|} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_{m-k} \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha}, \tag{3}$$

где $a_{m-|\alpha|} > 0$, $|\alpha| \le m$, называется m-метагармоническим. Его фундаментальное решение в пространстве $W_2^{(m)}$ изучалось Ц.Б. Шойнжуровым [6]. Оператор порождается нормой функции из основного пространства. Если $a_{m-|\alpha|}$ — биномиальные коэффициенты, $|\alpha| \le m$, то он имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} D^{2\alpha} = (1 - \Delta)^m. \tag{4}$$

Этот оператор порожден нормой, введенной в [8]:

$$\left\|\varphi(x)|W_p^{(m)}(\mathbb{R}_n)\right\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} \left|(1-\Delta)^{\frac{m}{2}}\varphi(x)\right|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty. \tag{5}$$

Естественная норма порождает m-метагармонический оператор с единичными коэффициентами $a_{m-|\alpha|} = 1$, $|\alpha| \le m$:

$$\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\Delta^{|\alpha|} = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^{2\alpha}. \tag{6}$$

Во всех этих формулах Δ — оператор Лапласа.

Фундаментальное решение $G(|x|)$ оператора (4) носит название ядра Бесселя — Макдональда [9] и выражается через известную функцию $K_\nu(|x|)$ Макдональда:

$$G(|x|) = \frac{1}{2^{m-1}\Gamma(m)}\frac{K_{\frac{n-2m}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-2m}{2}}}, \tag{7}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция; n и m — как и прежде, размерность пространства аргумента x и гладкость пространства функций $W_p^{(m)}$ соответственно. Производные этой функции имеют асимптотические оценки при $|x| \to 0$ и $|x| \to \infty$:

$$|D^\alpha G(|x|)| \le c \begin{cases} \dfrac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}}, & |x| > 1,\ n,\ m,\ \alpha \text{ — любые;} \\ \ln\dfrac{1}{|x|} + 1, & |x| < 1,\ n-2m+|\alpha| = 0,\ |\alpha| \text{ — четное;} \\ \dfrac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, & |x| < 1,\ n-2m+|\alpha| > 0,\ n-2m+|\alpha| = 0, \\ & \qquad |\alpha| \text{ — нечетное;} \\ 1, & |x| < 1,\ n-2m+|\alpha| < 0. \end{cases} \tag{8}$$

2. Фундаментальное решение m-метагармонического оператора с биномиальными коэффициентами в весовом пространстве

Оценки (8) производных $D^\alpha G(|x|)$ фундаментального решения $G(|x|)$ оператора (4) по множествам $|x| < 1$ и $|x| > 1$ послужат основой доказательства всех наших утверждений.

В теоремах фигурируют функции, заданные на всем $\mathbb{R}_n$.

Теорема 1. *Фундаментальное решение* $G(|x|)$ *оператора* (4) *принадлежит пространству* $W^{(m)}_{p',-\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}_n)$, *где* $1/p + 1/p' = 1$, $1 < p < \infty$, $pm > n + s$.

Доказательство. Здесь потребуется рассмотрение $L_{p',-\frac{s}{p-1}}$ — норм производных $D^\alpha G(|x|)$ при $1 < p < \infty$:

$$\|D^\alpha G(|x|)|L_{p',-\frac{s}{p-1}}\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} |x|^{-\frac{s}{p-1}}|D^\alpha G(|x|)|^{p'}dx\right)^{1/p'}. \tag{9}$$

Для использования оценок интеграл из (9) удобнее разбить на сумму

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} |x|^{-\frac{s}{p-1}} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx =$$

$$= \int\limits_{|x|<1} |x|^{-\frac{s}{p-1}} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx + \int\limits_{|x|>1} |x|^{-\frac{s}{p-1}} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx = I_1 + I_2, \tag{10}$$

после чего оценить каждое из слагаемых:

$$I_1 = \int\limits_{|x|<1} |x|^{-\frac{s}{p-1}} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx \le C_1 \int\limits_{|x|<1} |x|^{-\frac{s}{p-1}} \left| \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}} \right|^{p'} dx =$$

$$= C_1 \int\limits_{|x|<1} |x|^{-\frac{s}{p}p'} \left| \frac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}} \right|^{p'} dx = C_1 \int\limits_{|x|<1} \left| \frac{|x|^{-\frac{s}{p}}}{|x|^{n-2m+|\alpha|}} \right|^{p'} dx =$$

$$= C_1 \int\limits_{|x|<1} \frac{1}{|x|^{(n-2m+|\alpha|+\frac{s}{p})p'}} dx = C_2 \int\limits_0^1 \frac{1}{r^{(n-2m+|\alpha|+\frac{s}{p})p'}} r^{n-1} dr =$$

$$= C_2 \int\limits_0^1 r^{n-1-(n-2m+|\alpha|+\frac{s}{p})p'} dr, \tag{11}$$

$$I_2 = \int\limits_{|x|>1} |x|^{-\frac{s}{p-1}} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx = \int\limits_{|x|>1} |x|^{-\frac{s}{p}p'} |D^\alpha G(|x|)|^{p'} dx \le$$

$$\le C_3 \int\limits_{|x|>1} \left(\frac{e^{-|x|} |x|^{-\frac{s}{p}}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}} \right)^{p'} dx = C_3 \int\limits_{|x|>1} \left(\frac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}+\frac{s}{p}}} \right)^{p'} dx. \tag{12}$$

В предпоследнем равенстве (11) совершен переход к сферическим координатам. Максимально возможный порядок производной равен m, а потому

$$I_1 \le C_2 \int\limits_0^1 r^{n-1-(n-m+\frac{s}{p})p'} dr. \tag{13}$$

Несобственный интеграл второго рода в правой части неравенства (13) существует, если

$$-\left(n - 1 - \left(n - m + \frac{s}{p} \right) p' \right) < 1,$$

т. е.

$$mp > n + s. \tag{14}$$

Сходимость несобственного интеграла первого рода в правой части (12) очевидна. Из (12)–(14) следует, что при $mp > n+s$ $D^\alpha G(|x|) \in L_{p',-\frac{s}{p-1}}$, $|\alpha| \le m$, т. е. $G(|x|) \in W^{(m)}_{p',-\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}_n)$, $1 < p < \infty$. Теорема доказана. $\square$

3. Фундаментальное решение m-метагармонического оператора с единичными коэффициентами в весовом пространстве

Фундаментальное решение $\mathcal{E}(|x|)$ оператора (6) как обобщенной функции, действующей на основные функции из $W_p^{(m)}(\mathbb{R}_n)$, $1 < p < \infty$, можно получить в виде несобственного интеграла, если применить к уравнению

$$\sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^{2\alpha} \mathcal{E}(|x|) = \delta(x) \tag{15}$$

преобразование Фурье

$$\mathcal{E}(|x|) = F^{-1} \left[\frac{1}{\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} |2\pi\xi|^{2|\alpha|}} \right] = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \frac{e^{-2\pi i \xi x}}{\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} |2\pi\xi|^{2|\alpha|}} d\xi. \tag{16}$$

Здесь

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} |2\pi\xi|^{2|\alpha|} = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (-2\pi i \xi)^{2\alpha}.$$

Теорема 2. *Функция*

$$\lambda(|x|) = \frac{(1+|x|^2)^m}{\left(\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} |x|^{2|\alpha|} \right)}, \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

является множителем Марцинкевича при $1 < p < \infty$.

Доказательство. Как функция n действительных переменных $\lambda(|x|)$, где $|x| = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}$, является отношением многочленов равных степеней. Знаменатель ее не имеет действительных корней, и потому $\lambda(|x|)$ непрерывна на $\mathbb{R}_n$. Так как вдобавок $\lim\limits_{|x| \to \infty} \lambda(|x|) = 1$, то $\lambda(|x|)$ ограниченна. Производные $D^k \lambda(|x|)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_j = 0, 1;\ j = 1, \ldots, n)$, также непрерывны, и $\lim\limits_{|x| \to \infty} x^k D^k \lambda(|x|) = 1$, откуда следует ограниченность произведения, стоящего под знаком предела.

Таким образом, выполнены условия теоремы 1.5.4 [8], что доказывает наше утверждение. □

Теорема 3. *Оценки для* $D^\alpha G(|x|)$ *справедливы и для* $D^\alpha \mathcal{E}(|x|)$, $|\alpha| \le m$, $1 < p < \infty$, $pm > n + s$.

Доказательство. Согласно определению [9], если λ — множитель Марцинкевича, то при $1 < p < \infty$ выполняется неравенство

$$\|F^{-1}[\lambda F[G]] | L_{p'}(\mathbb{R}_n)\| \le c_{p'} \|G | L_{p'}(\mathbb{R}_n)\|, \tag{17}$$

где $p' = (p-1)/p$, $c_{p'}$ — константа, зависящая от p'. Поскольку $|x|^{-\frac{s}{p-1}} > 0$, неравенство (17) выполняется и для $L_{p',-\frac{s}{p-1}}$-норм:

$$\|F^{-1}[\lambda F[G]]|L_{p',-\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}_n)\| \le c_{p'}\|G|L_{p',-\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}_n)\|. \tag{18}$$

Функции $\mathcal{E}(|x|)$ и $G(|x|)$ связаны выражением

$$\mathcal{E}(|x|) = F^{-1}\left[\frac{1}{\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m}|2\pi\xi|^{2|\alpha|}}\right] = F^{-1}\left[\frac{(1+|2\pi\xi|^2)^m}{\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m}|2\pi\xi|^{2|\alpha|}}\cdot\frac{1}{(1+|2\pi\xi|^2)^m}\right] =$$

$$= F^{-1}[\lambda(|2\pi\xi|)F[G]] = F^{-1}[\lambda]*G(|x|). \tag{19}$$

Последнее равенство на основании теоремы 2 вытекает из свойств множителя Марцинкевича [9]. Поскольку по правилу дифференцирования свертки $D^\alpha\mathcal{E} = F^{-1}[\lambda]*D^\alpha G$, $|\alpha| \le m$,

$$\|D^\alpha\mathcal{E}|L_{p',-\frac{s}{p-1}}\| = \|F^{-1}[\lambda F[D^\alpha G]]|L_{p',-\frac{s}{p-1}}\| \le c_{p'}\|D^\alpha G|L_{p',-\frac{s}{p-1}}\|,\ |\alpha| \le m. \tag{20}$$

Интеграл справа, определяющий норму, существует при $pm > n+s$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы для $1 < p < \infty$. □

Следствие. *Фундаментальное решение* $\mathcal{E}(|x|)$ *оператора* (6) *принадлежит пространству* $W^{(m)}_{p',-\frac{s}{p-1}}(\mathbb{R}_n)$*, где* $1/p+1/p' = 1$, $1 < p < \infty$, $pm > n+s$.

4. Существование представления функционала в пространстве Соболева с весом $W^m_{p,s}(\mathbb{R}_n)$

Теорема 4. *Представление функционала* (1) *в пространстве* $W^{(m)}_{p,s}(\mathbb{R}_n)$*, где* $1/p+1/p' = 1$, $1 < p < \infty$, $pm > n+s$, *имеет вид*

$$\langle l,\varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\alpha(\mathcal{E}*l)\,D^\alpha\varphi dx. \tag{21}$$

Доказательство. Представление выводится из уравнения (15) с правой частью, равной l, путем замены ее левой частью с последующим интегрированием по частям.

В следующей цепочке преобразований применение неравенств Гёльдера для сумм и интегралов приводит к оценке, позволяющей судить о существовании интеграла, реализующего данное представление:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\alpha(\mathcal{E}*l)\,D^\alpha\varphi dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}|x|^{-\frac{s}{p}}\left|D^\alpha(\mathcal{E}*l)\right||x|^{\frac{s}{p}}\left|D^\alpha\varphi\right|dx \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}_n}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left||x|^{-\frac{s}{p}}\left|D^\alpha(\mathcal{E}*l)\right|\right|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left||x|^{\frac{s}{p}}\left|D^\alpha\varphi\right|\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_n} \left(\sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |x|^{-\frac{s}{p-1}} \left| D^\alpha \left(\mathcal{E} * l \right) \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |x|^s \left| D^\alpha \varphi \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |x|^{-\frac{s}{p-1}} \left| D^\alpha \left(\mathcal{E} * l \right) \right|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |x|^s \left| D^\alpha \varphi \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (22)$$

Один из множителей правой части последнего неравенства из (22) является нормой функции φ в пространстве $W^{(m)}_{p,s}$. Другой множитель – норма свертки фундаментального решения $\mathcal{E}(|x|)$ оператора (6) с функционалом l в пространстве $W^m_{p',-\frac{s}{p-1}}$. Ее существование следует из принадлежности функции $\mathcal{E}$ пространству $W^m_{p',-\frac{s}{p-1}}$ и того факта, что l содержит линейную комбинацию δ-функций, свертка с которыми существует и принадлежит тому же пространству, что и указанное фундаментальное решение. Таким образом, из существования оценивающих интегралов (22) следует существование представления (21), что и требовалось доказать. □

Список литературы

[1] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.

[2] Половинкин В.И. Кубатурные формулы в $L_2^{(m)}(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 1. С. 42–44.

[3] Половинкин В.И. Последовательности функционалов с пограничным слоем // Сиб. мат. журн. 1974. Т. XV, № 2. С. 413–429.

[4] Половинкин В.И. Асимптотическая оптимальность последовательностей формул с регулярным пограничным слоем при нечетных m // Сиб. мат. журн. 1975. Т. XVI, № 2. С. 328–335.

[5] Половинкин В.И. Последовательности кубатурных формул и функционалов с пограничным слоем: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Л., 1979. 18 с.

[6] Шойнжуров Ц.Б. Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967. 83 с.

[7] Рамазанов М.Д. Построение асимптотически оптимальной кубатурной формулы над пространством $W_2^{(m)}(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 290–293.

[8] Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Улан-Удэ, 1977. 235 с.

[9] Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.

[10] Рамазанов М.Д. Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа: Башкир. гос. ун-т, 1973. 174 с.

[11] Францев Г.Л. Оценка погрешности кубатурных формул с пограничным слоем и узлами на решетке в весовых пространствах Соболева: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2001. 99 с.

[12] Корытов И.В. Элементарный периодический функционал погрешности в пространстве Соболева при $p = \infty$ // Кубатурные формулы и их приложения: Матер. V Междунар. семинара-совещания. Красноярск: КГТУ, 2000. С. 90–98.

Поступила в редакцию 2006 г.