ПРИМЕРЫ СЕРИЙ РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ $d(k)$-СВОЙСТВОМ В ПЯТИМЕРНОМ СЛУЧАЕ*

О. П. Боровых
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: `olegatorvt@yandex.ru`

In the five-dimensional case for any integer r $(-18 \leqslant r \leqslant 1)$ a sequence of lattice rules with trigonometric $d(k)$-property is constructed, where $d(k) = 20k + r$. The efficiency of all sequences is equal $20^5/39050 \approx 81.95$.

Целью работы является улучшение некоторых известных результатов по построению серий решетчатых кубатурных формул с тригонометрическим $d(k)$-свойством в пятимерном случае (см., например, [1–3]). Для построения серий с бо́льшим коэффициентом эффективности используется методика, впервые предложенная в работе [2]. В трехмерном случае эта методика реализована в [4], а в четырехмерном — в [5].

Как базовую для построения хороших по качеству серий в пятимерном случае можно взять решетчатую кубатурную формулу, имеющую 39 050 узлов и обладающую тригонометрическим 20-свойством [3]. Ее коэффициент эффективности равен

$$20^5/39050 \approx 81.95$$

и является на данный момент наибольшим из известных. Решетка M — дуальная к решетке узлов этой кубатурной формулы — определяется матрицей

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & -1 & -4 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & -1 & -4 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 5 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решетка M является допустимой для гипероктаэдра

$$X = \{x \in \mathbb{R}^5 : \|x\| < 20\}$$

и имеет в точности 25 пар вида $\pm b$ граничных (т. е. принадлежащих границе X) точек. Далее через U будем обозначать матрицу, столбцы которой составлены из координат граничных точек b в базисе, образованном столбцами матрицы B (матрица U определена с

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00823).

точностью до перестановки столбцов и изменения их знака). Размер матрицы U не позволяет привести ее здесь, однако заметим, что она состоит только из чисел 0 и ± 1. Кроме того, матрица BU обладает следующим свойством: среди ее элементов нет нулей (т. е. все граничные точки лежат строго внутри граней гипероктаэдра X). Важным свойством решетки M является ее экстремальность по отношению к X [6].

Фиксируем теперь целое число r в пределах $-18 \leqslant r \leqslant 1$ и положим

$$d(k) = 20k + r.$$

Пусть матрица C выбрана так, что при любом $k \geqslant 1$ решетчатая кубатурная формула с решеткой узлов $\Lambda_k = M_k^\perp$, где M_k — решетка с матрицей

$$B_k = kB + C,$$

обладает тригонометрическим $d(k)$-свойством. Иными словами, предположим, что при любом $k \geqslant 1$ решетка M_k допустима для гипероктаэдра

$$X_{(k,r)} = \{x \in \mathbb{R}^5 : \|x\| < 20k + r + 1\}.$$

В частности, при любом $k \geqslant 1$ должны быть справедливы неравенства

$$\|b_t(k)\| \geqslant 20k + r + 1, \quad 1 \leqslant t \leqslant 25, \tag{1}$$

где $b_t(k)$ — столбцы матрицы B_kU. Обозначим через B^*_{st} и C^*_{st} элементы матриц $B^* = BU$ и $C^* = CU$ соответственно и положим

$$\widetilde{C}_{st} = \begin{cases} C^*_{st}, & \text{если } B^*_{st} > 0, \\ -C^*_{st}, & \text{если } B^*_{st} < 0. \end{cases}$$

Ясно, что неравенства (1) эквивалентны неравенствам

$$\sum_{s=1}^{5} \widetilde{C}_{st} \geqslant r + 1, \quad 1 \leqslant t \leqslant 25, \tag{2}$$

если только k достаточно велико.

Таким образом, матрицу C необходимо подбирать так, чтобы было выполнено условие (2). Кроме того, имеет смысл дополнительно потребовать, чтобы

$$C \approx C^\circ = \frac{r+1}{20}\, B,$$

поскольку при любом $k \geqslant 1$ решетка с матрицей $kB + C^\circ$ будет допустимой для гипероктаэдра $X_{(k,r)}$. Для конкретности это приближенное равенство будем понимать следующим образом ($[a]$ — целая часть числа a):

$$0 \leqslant C_{st} - [C^\circ_{st}] \leqslant 1, \quad 1 \leqslant s, t \leqslant 5, \tag{3}$$

где C_{st} и C°_{st} — элементы матриц C и C° соответственно.

Перебирая все целочисленные матрицы C, удовлетворяющие ограничениям (2) и (3), остановимся на той из них, для которой величина

$$N(k) = \det(M_k)$$

Т а б л и ц а 1. Матрица C в зависимости от r

r	C	r	C
-18	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$	-17	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & -4 & -5 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & 1 & 3 & -3 \\ -3 & -4 & -5 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$
-16	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 3 & -3 & -4 \\ -3 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & -4 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & -4 & -5 & 1 \end{bmatrix}$	-15	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ -4 & -4 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & -4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
-14	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & -3 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	-13	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & -4 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
-12	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$	-11	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
-10	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$	-9	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
-8	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$	-7	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
-6	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	-5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
-4	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	-3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
-2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	-1	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
0	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	1	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Т а б л и ц а 2. Число узлов $N(k)$ в зависимости от r

r	$N(k)$	$N(1)$
-18	$39050k^5 - 158442k^4 + 256783k^3 - 207804k^2 + 83977k - 13558$	$k \geqslant 2$
-17	$39050k^5 - 152798k^4 + 238974k^3 - 186714k^2 + 72868k - 11362$	$k \geqslant 2$
-16	$39050k^5 - 138424k^4 + 195970k^3 - 138483k^2 + 48835k - 6873$	75
-15	$39050k^5 - 133404k^4 + 182196k^3 - 124342k^2 + 42402k - 5780$	122
-14	$39050k^5 - 120552k^4 + 148799k^3 - 91801k^2 + 28308k - 3490$	314
-13	$39050k^5 - 114318k^4 + 134174k^3 - 78918k^2 + 23260k - 2748$	500
-12	$39050k^5 - 100306k^4 + 103616k^3 - 53809k^2 + 14050k - 1476$	1125
-11	$39050k^5 - 94662k^4 + 92208k^3 - 45124k^2 + 11098k - 1098$	1472
-10	$39050k^5 - 81502k^4 + 67884k^3 - 28210k^2 + 5849k - 484$	2587
-9	$39050k^5 - 75268k^4 + 58272k^3 - 22672k^2 + 4434k - 348$	3468
-8	$39050k^5 - 62416k^4 + 40233k^3 - 13061k^2 + 2133k - 140$	5799
-7	$39050k^5 - 54734k^4 + 29944k^3 - 7920k^2 + 996k - 46$	7290
-6	$39050k^5 - 41379k^4 + 17652k^3 - 3793k^2 + 411k - 18$	11923
-5	$39050k^5 - 36218k^4 + 13522k^3 - 2610k^2 + 268k - 12$	14000
-4	$39050k^5 - 22796k^4 + 5001k^3 - 489k^2 + 18k$	20784
-3	$39050k^5 - 16254k^4 + 2330k^3 - 116k^2$	25010
-2	$39050k^5 - 4571k^4$	34479
-1	$39050k^5$	39050
0	$39050k^5 + 16254k^4 + 2814k^3 + 244k^2 + 9k$	58371
1	$39050k^5 + 23366k^4 + 5410k^3 + 610k^2 + 28k$	68464

(число узлов k-й кубатурной формулы из серии) принимает наименьшее значение при $k = 1$. Результаты этого перебора представлены в табл. 1 и 2.

Теперь осталось проверить, что полученные таким образом серии решетчатых кубатурных формул действительно обладают заданным тригонометрическим $d(k)$-свойством при любом $k \geqslant 1$. Другими словами, следует убедиться, что решетка M_k с матрицей B_k (матрица C взята из табл. 1) будет допустимой для гипероктаэдра $X_{(k,r)}$ при любом $k \geqslant 1$. Это можно сделать, опираясь на следующее предложение [5].

Предложение. *Пусть решетка $\widetilde{M} \subset \mathbb{R}^n$ задана матрицей $\widetilde{B}$. Если $x \in \widetilde{M}$ и*

$$\|x\| < d + 1,$$

то для координат $(m_1, \ldots, m_n)$ точки x в базисе, образованном столбцами матрицы $\widetilde{B}$, справедливы неравенства

$$|m_t| < \frac{(d+1)P_t}{\det(\widetilde{M})}, \quad 1 \leqslant t \leqslant n.$$

Величины P_t определяются равенством

$$P_t = \max_{1 \leqslant s \leqslant n} |P_{st}|,$$

где P_{st} — алгебраические дополнения к элементам определителя $\det(\widetilde{B})$.

В рассматриваемом случае ($\widetilde{M} = M_k$, $\widetilde{B} = B_k$ и $d = d(k)$) можно показать, что координаты $(m_1, \ldots, m_5)$ любой точки $x \in M_k$, принадлежащей гипероктаэдру $X_{(k,r)}$, должны удовлетворять независимо от k и r ограничениям

$$|m_1| \leqslant 2, \quad |m_2| \leqslant 1, \quad |m_3| \leqslant 2, \quad |m_4| \leqslant 2, \quad |m_5| \leqslant 2 \tag{4}$$

(речь идет о координатах в базисе, образованном столбцами матрицы B_k). Перечислив все такие точки с координатами

$$(m_1, \ldots, m_5) \neq (0, \ldots, 0),$$

удовлетворяющими (4), мы проверим, что для каждой из них имеет место неравенство

$$\|x\| \geqslant 20k + r + 1,$$

каково бы ни было $k \geqslant 1$ (кроме случаев $r = -18, -17$, где это верно при $k \geqslant 2$). Но это и будет означать допустимость решетки M_k для гипероктаэдра $X_{(k,r)}$.

Сделаем несколько замечаний по поводу качества построенных серий.

По сравнению с таблицей, приведенной в работе [3] для пятимерного случая, наши серии в диапазоне значений $4 \leqslant d \leqslant 25$ дают решетчатые кубатурные формулы с тригонометрическим d-свойством и меньшим числом узлов, за исключением $d = 7$, 8, 9, 14, 23. Указанные в той же работе серии решетчатых кубатурных формул с тригонометрическим $(6k + r)$-свойством имеют существенно меньший коэффициент эффективности

$$6^5/124 \approx 62.71$$

и потому при больших d заведомо хуже наших (на самом деле исключения составляют лишь два случая — $d = 7$ и $d = 9$). Вместе с тем отметим, что последние результаты компьютерного поиска K-оптимальных решетчатых кубатурных формул в пятимерном случае (см. препринт [7], где приведена таблица для $4 \leqslant d \leqslant 11$) нам повторить не удалось.

Автор благодарит своего научного руководителя Н.Н. Осипова за полезные замечания, сделанные в процессе обсуждения результатов настоящей работы.

Список литературы

[1] Семенова А.Р. Серии кубатурных формул для периодических функций пяти переменных // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и приложения. V: Числ. методы. Уфа: ИМ с ВЦ РАН, 1996. С. 137–146.

[2] Осипов Н.Н. О построении серий решетчатых кубатурных формул ранга 1, точных на тригонометрических многочленах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 11. С. 1628–1637.

[3] Cools R., Govaert H. Five- and six-dimensional lattice rules generated by structured matrices // J. Complexity. 2003. Vol. 19, N 4. P. 715–729.

[4] Осипов Н.Н. Наилучшие по числу узлов серии решетчатых кубатурных формул, точных на тригонометрических многочленах трех переменных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 2. С. 212–223.

[5] Осипов Н.Н., Петров А.В. Построение серий решетчатых кубатурных формул, точных на тригонометрических многочленах четырех переменных // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. Спецвыпуск. С. 102–110.

[6] Осипов Н.Н. Примеры экстремальных решеток для гипероктаэдра в $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^6$ // Вест. Краснояр. гос. ун-та. Физ.-мат. науки. 2005. № 1. С. 93–96.

[7] Lyness J.N., Sorevik T. Five-dimensional K-optimal lattice rules / Preprint ANL/MCS P1244-0105. `http://www-fp.mcs.anl.gov/`

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.