Вычислительные технологии **Том 11, Специальный выпуск, 2006**

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ МАЛЫХ ШЕВЕЛЕНИЯХ ВЕСОВ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ*

В. Л. Васкевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `vask@math.nsc.ru`

In the paper we examine how the error of a given cubature formula varies under small perturbations of its weights. Considering this problem in Sobolev spaces of periodic functions of finite smoothness we establish that the norm of a perturbed error functional does not exceed one and a half of the norm of the initial error functional provided that the number of nodes of a cubature formula under study is not greater then some upper boundary. This upper boundary depends on the smoothness of integrands, the dimension of the space of independent variables, and the constants of the machine arithmetic.

Пусть для приближения многомерного интеграла

$$I_\Omega(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\,dx = \int \chi_\Omega(x)\varphi(x)\,dx$$

по ограниченной области интегрирования $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей и единичным объемом используется кубатурная сумма

$$\Sigma_N(\varphi) = \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi(x^{(k)}) = \int \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)})\varphi(x)\,dx,$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака; числа c_k — это *веса формулы*, а множество

$$\Delta = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)} \mid x^{(j)} \in \overline{\Omega}\}$$

состоит из *узлов формулы*. Приближенное равенство $I_\Omega(\varphi) \cong \Sigma_N(\varphi)$ принято называть *кубатурной формулой*. Отметим, что правила, указывающие узлы $x^{(k)}$ и веса c_k кубатурной формулы, от выбора конкретной интегрируемой функции $\varphi(x)$ не зависят.

Подынтегральная функция φ принадлежит некоторому банахову пространству $X = X(\Omega)$, вложенному ограниченным образом в пространство $C(\Omega)$ непрерывных в замыкании

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00250).

области Ω функций. В частности, существует конечная *константа вложения* A, т. е. такое конечное положительное число, что

$$\sup_{x\in\overline{\Omega}} |\varphi(x)| \le A\|\varphi \mid X\| \quad \forall\,\varphi \in X, \tag{1}$$

причем A — минимальное из обладающих этим свойством. Предположим также, что тождественно единичная функция принадлежит $X = X(\Omega)$ и при этом ее норма в X равна единице. В этом случае заведомо имеет место неравенство $A \ge 1$.

Теоретически погрешность кубатурной формулы удобно определять с помощью *функционала погрешности* l_N [1], задаваемого равенством

$$(l_N, \varphi) = I_\Omega(\varphi) - \Sigma_N(\varphi) = \int \left[\chi_\Omega(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k \delta(x - x^{(k)})\right] \varphi(x)\,dx.$$

Функционал погрешности l_N линеен и ограничен на своей естественной области определения — банаховом пространстве непрерывных функций $C(\Omega)$. При этом для произвольной функции $\varphi(x)$ из X имеет место оценка

$$|(l_N, \varphi)| \le \|l_N \mid X^*\| \cdot \|\varphi \mid X\| \quad \forall\,\varphi \in X. \tag{2}$$

Предположив, что для вычисления кубатурной суммы $\Sigma_N(\varphi)$ использован компьютер (ЭВМ), что естественно, особенно для больших значений N, мы получим вместо $\Sigma_N(\varphi)$ некоторое число $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$, которое с исходной суммой $\Sigma_N(\varphi)$, вообще говоря, не совпадает. Тем самым на практике реализуется погрешность, характеризуемая уже не функционалом l_N, а некоторым иным “машинным” функционалом $\langle l_N\rangle_F$, задаваемым равенством

$$(\langle l_N\rangle_F, \varphi) = I_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi) \quad \forall\,\varphi \in X.$$

Функционалы $\langle l_N\rangle_F$ и l_N друг с другом не совпадают, ибо существуют функции φ из X, для которых $(\langle l_N\rangle_F, \varphi) \ne (l_N, \varphi)$. Более того, функционал $\langle l_N\rangle_F$ нелинеен, а следовательно, оценка (2) к нему уже неприменима. Тем самым возникает потребность в формулировке некоторого пригодного для функционала $\langle l_N\rangle_F$ аналога оценки (2).

Чтобы записать искомую оценку для функционала $\langle l_N\rangle_F$ в явном виде, необходимо учесть, что конкретно приводит к различию величин $\Sigma_N(\varphi)$ и $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$. В основе этого различия лежит тот фундаментальный факт, что множество $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел не совпадает с множеством F машинных чисел, с которыми, собственно, компьютер и оперирует.

В частности, в отличие от $\mathbb{R}$ множество F машинных чисел конечно, и в нем существуют порог машинного нуля и порог переполнения — положительные элементы $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(F)$ и $\varepsilon_\infty = \varepsilon_\infty(F)$ соответственно (см., например, [2, с. 19]). Кроме того, существует положительное число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(F)$, определяемое тем условием, что $1 + \varepsilon_1$ принадлежит F, а на интервале $(1, 1 + \varepsilon_1)$ нет ни одного числа из F. Число ε_0, как правило, значительно меньше числа ε_1, которое, в свою очередь, значительно меньше единицы, в то время как ε_∞ превосходит единицу весьма существенно.

Параметры ε_0, ε_1 и ε_∞ относятся к фундаментальным компьютерным стандартам и должны быть заданы заранее, до проведения каких бы то ни было машинных вычислений.

Поэтому оценить результат этих машинных вычислений мы вправе с помощью следующей числовой функции:

$$R_F = R_F(X, \Sigma_N) = \sup_{\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A\|\varphi|X\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}} \frac{|I_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|}{\|\varphi \mid X\|}. \tag{3}$$

Здесь A — это константа вложения из (1). В силу самого определения параметра R_F имеет место оценка

$$|(\langle l_N \rangle_F, \varphi)| \le R_F \|\varphi \mid X\| \quad \text{при} \quad \forall\, \varphi \in X: \quad \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A\|\varphi \mid X\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}. \tag{4}$$

Константа R_F минимальна со свойством (4) и $R_F \ne \|l_N \mid X^*\|$. В пределе же при стремлении ε_1 к нулю, а порога переполнения ε_∞ — к бесконечности параметр R_F стремится к $\|l_N \mid X^*\|$. Поскольку на практике вместо теоретической оценки (2) приходится иметь дело с ее возмущенным вариантом — оценкой (4), естественно вывести для R_F соответствующую асимптотическую формулу и получить с ее помощью условия, при которых величины R_F и $\|l_N \mid X^*\|$ мало отличаются друг от друга.

Прежде чем такие условия записать явно, необходимо вспомнить стандарты представления вещественных чисел в виде машинных (имеется в виду широко известная модель арифметики с конечной точностью, или представление вещественных чисел с плавающей точкой [2–5]). Общепринят IEEE-стандарт двоичной арифметики [2, с. 19], в котором под запись машинного числа отводится 32 бита (1 бит — под двоичную запись знака s числа, 8 бит — под двоичную запись показателя e числа и 23 бита — под двоичные цифры его мантиссы f). Заданным s, e и f соответствует машинное число $(-1)^s 2^{e-127}(1+f)$. Представлению чисел в такой форме соответствует набор из трех машинных констант, включающий в себя упомянутые ранее положительные параметры ε_0, ε_1 и ε_∞. В выбранном варианте 32-битового представления двоичного числа имеют место соотношения [2]

$$\varepsilon_0 = 2^{-126} \approx 10^{-38}, \quad \varepsilon_\infty = 2^{127}(2 - 2^{-23}) \approx 2^{128} \approx 4 \cdot 10^{38}, \quad \varepsilon_1 = 2^{-23} \approx 12 \cdot 10^{-8}. \tag{5}$$

Отметим, что IEEE-стандарт двоичной арифметики реализован всеми персональными компьютерами.

Далее, необходимо остановиться на определенном алгоритме вычисления скалярного произведения (на компьютере с принятым форматом машинных чисел), ибо сумма $\Sigma_N(\varphi)$ по определению представляет собой скалярное произведение вектора $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_N)$ весов кубатурной формулы на вектор $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi(x^{(1)}), \ldots, \varphi(x^{(N)}))$ значений подынтегральной функции $\varphi(x)$ в узлах Δ формулы $\Sigma_N(\varphi) = (\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi})$. Тем самым величину $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$ действительно можно рассматривать как результат работы некоторого алгоритма по вычислению скалярного произведения.

Пусть в следующей теореме скалярное произведение вычисляется посредством алгоритма, приведенного в [4, формула (5.6)], а также [5] — условимся обозначать его через Υ.

Теорема. *Пусть машинные константы* ε_0, ε_1 *и* ε_∞ *заданы соотношениями* (5), *константа вложения* A, *определяемая из* (1), *и веса* $(c_1, \ldots, c_N)$ *кубатурной формулы подчиняются условиям*

$$1 \le A \le \varepsilon_\infty^{1/3} \quad \text{и} \quad \left(\sum_{k=1}^{N} c_k^2\right)^{1/2} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

Тогда справедлива следующая оценка:

$$\Big|R_F - \|l_N \mid X^*\|\Big| \le 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right) \quad \textit{при} \quad N \le 1/\varepsilon_1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть функция φ принадлежит шаровому слою

$$\left\{\varphi \in X \mid \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A\|\varphi \mid X\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}\right\}.$$

С помощью оценки (1), а также в соответствии с неравенством $N \le 1/\varepsilon_1$, справедливым по условию, и неравенством $2\varepsilon_\infty^{1/3} \le \sqrt{\varepsilon_\infty \varepsilon_1}$, вытекающим из (5), получаем

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{N} |\varphi(x^{(k)})|^2\Big)^{1/2} \le A\sqrt{N}\|\varphi \mid X\| \le \frac{A}{\sqrt{\varepsilon_1}}\|\varphi \mid X\| \le \frac{\varepsilon_\infty^{1/3}}{\sqrt{\varepsilon_1}} \le \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{2}.$$

Эта оценка и условие $\|\mathbf{c}\|_2 \le \sqrt{\varepsilon_\infty}/2$ достаточны для выполнимости вычислений в выбранном алгоритме Υ [4, с. 246], в частности, для справедливости соотношения

$$|(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi})| \le \|\mathbf{c}\|_2\|\boldsymbol{\varphi}\|_2 \le \varepsilon_\infty/4.$$

Тем самым к скалярному произведению $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) = \Sigma_N(\varphi)$ применимо округление в избранном двоичном формате и в условиях теоремы величина $\widetilde{\Sigma}_N(\varphi)$ заведомо определена.

Пусть $R_F(\varphi, \Sigma_N) = |I_\Omega(\varphi) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|$. Пользуясь неравенством треугольника, имеем

$$\begin{aligned} R_F(\varphi, \Sigma_N) &\le |I_\Omega(\varphi) - (\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi})| + |(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| = \\ &= |(l_N, \varphi)| + |(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \|l_N \mid X^*\| \cdot \|\varphi \mid X\| + |(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)|. \end{aligned} \tag{7}$$

Как доказано в [4], при $N\varepsilon_1 < 2$ имеет место неравенство

$$|(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le \frac{N\varepsilon_1}{1 - N\varepsilon_1/2} \sum_{k=1}^{N} \big|c_k\varphi(x^{(k)})\big| + \frac{N\varepsilon_0}{1 - N\varepsilon_1/2}. \tag{8}$$

По условию $\varepsilon_1 N \le 1$, а следовательно, $1 - N\varepsilon_1/2 \ge 1/2$. Подставляя эту оценку в (8) и в очередной раз пользуясь (1), приходим к соотношению

$$|(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2N\left(\varepsilon_1 A\|\varphi \mid X\| \sum_{k=1}^{N} |c_k| + \varepsilon_0\right). \tag{9}$$

Учитывая, что в условиях (5) справедливо равенство $\varepsilon_0 = \sqrt{2}\varepsilon_1^{11/2}$, а также условие, что $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A\|\varphi \mid X\|$, выводим из (9) следующую оценку:

$$|(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \le 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right) \|\varphi \mid X\|. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (7), имеем

$$\frac{R_F(\varphi, \Sigma_N)}{\|\varphi \mid X\|} \le \|l_N \mid X^*\| + 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right) \quad \text{при} \quad A\|\varphi \mid X\| \ge \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2}. \tag{11}$$

Отсюда и из (3) вытекает оценка

$$R_F - \|l_N \mid X^*\| \le 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right). \tag{12}$$

Пусть теперь φ — произвольный элемент единичной сферы пространства X. Пользуясь неравенством треугольника и (10), что возможно, ибо $A \ge 1$, а $\sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le 1$, имеем

$$R_F(\varphi, \Sigma_N) \ge |(l_N, \varphi)| - |(\mathbf{c}, \boldsymbol{\varphi}) - \widetilde{\Sigma}_N(\varphi)| \ge |(l_N, \varphi)| - 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right). \tag{13}$$

Заметим теперь, что в силу условий на константу вложения $1 \le A \le \varepsilon_\infty^{1/3}$ единичная сфера пространства X является внутренним подмножеством шарового слоя

$$\left\{\varphi \in X \mid \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \le A\|\varphi \mid X\| \le \varepsilon_\infty^{1/3}\right\}.$$

Учитывая это и переходя в (13) к точной верхней грани, взятой по всем φ из единичной сферы пространства X, получаем

$$R_F \ge \sup_{\|\varphi|X\|=1} R_F(\varphi, \Sigma_N) \ge \|l_N \mid X^*\| - 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1\right). \tag{14}$$

Объединяя оценки (12) и (14), приходим к искомому неравенству (6). $\square$

Оценку (6) можно переписать в эквивалентном виде

$$\Big| R_F - \|l_N \mid X^*\| \Big| \le 2NA\|l_N \mid C^*\| \cdot \varepsilon_1.$$

В этой связи произведение $2NA\|l_N \mid C^*\|$ естественно рассматривать как оценку сверху числа обусловленности кубатурной формулы $I_\Omega(\varphi) \cong \Sigma_N(\varphi)$ на пространстве X.

Рассмотрим пример приложения теоремы к кубатурным формулам на периодических пространствах Соболева конечной гладкости. В качестве области интегрирования возьмем единичный куб:

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad 0 \le x_j < 1,\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

В качестве функционального пространства $X = X(Q)$ выберем $\widetilde{W}_2^m(Q)$ — пространство Соболева, образованное периодическими с единичной матрицей периодов функциями из $L_2(Q)$, обобщенные производные которых вплоть до порядка m также принадлежат пространству $L_2(Q)$. Норму в $\widetilde{W}_2^m(Q)$ зададим посредством следующего равенства:

$$\big\|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\big\| = \left[\Big|\int_Q \varphi(x)\,dx\Big|^2 + \int_Q \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|D^\alpha\varphi|^2\,dx\right]^{1/2} < \infty.$$

Хорошо известно, что пространство Соболева $\widetilde{W}_2^m(Q)$ при условии $m > n/2$ вложено ограниченным образом в пространство $C(Q)$ непрерывных в замыкании куба Q функций. Тождественно единичная функция принадлежит $\widetilde{W}_2^m(Q)$, и ее норма в $\widetilde{W}_2^m(Q)$ равна единице. Произвольная функция $\varphi(x)$ из $\widetilde{W}_2^m(Q)$ разлагается в сходящийся по норме ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_\varphi[\beta] e^{-i2\pi\beta x},$$

где

$$\beta x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j.$$

Через коэффициенты Фурье $c_\varphi[\beta]$ этого разложения норма функции $\varphi(x)$ в $\widetilde{W}_2^m(Q)$ выражается посредством равенства

$$\left\| \varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q) \right\|^2 = |c_\varphi[0]|^2 + \sum_{\beta \neq 0} |2\pi\beta|^{2m} |c_\varphi[\beta]|^2,$$

где

$$|2\pi\beta|^{2m} = (2\pi)^{2m} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \right)^m.$$

Следовательно, для произвольной функции $\varphi(x)$ из $\widetilde{W}_2^m(Q)$ имеет место оценка

$$\sup_{x \in \overline{Q}} |\varphi(x)| \leq A \|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\|, \quad A = \left\{ 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} \right\}^{1/2}.$$

В силу условия $m > n/2$ ряд в данном представлении константы вложения A заведомо сходится, а знак равенства в приведенной оценке достигается на функции

$$\varphi_0(x) = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} e^{-i2\pi\beta x}.$$

Далее, для заданного числа узлов N условимся рассматривать на функциях из $\widetilde{W}_2^m(Q)$ кубатурную формулу, получающуюся как прямое произведение n квадратурных формул трапеций, построенных для отрезков $0 \leq x_j \leq 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Предполагается, что каждая из квадратурных формул в этом прямом произведении имеет на своем отрезке равномерное распределение узлов с шагом h, где $1/h$ — натуральное число. Ясно, что при этом $Nh^n = 1$, а веса соответствующей кубатурной формулы положительны и дают в сумме единицу: $\sum_{k=1}^{N} |c_k| = |\sum_{k=1}^{N} c_k| = 1$. Квадрат нормы соответствующего многомерной формуле трапеций функционала погрешности l_N выражается через шаг h решетки узлов формулы с помощью равенства

$$\left\| l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q) \right\|^2 = h^{2m} \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} = h^{2m}(A^2 - 1).$$

Здесь A — указанная выше константа вложения.

Таким образом, в рассматриваемом случае периодических пространств Соболева оценка (6) принимает вид

$$\left| R_F - \|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\| \right| \leq 2NA\varepsilon_1 \left(\sum_{k=1}^{N} |c_k| + 1 \right) = 4NA\varepsilon_1 \quad \text{при} \quad N \leq \frac{1}{\varepsilon_1}. \tag{15}$$

Из полученных выше явных выражений для нормы $\|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\|$ и константы вложения A заключаем, что неравенство

$$4NA\varepsilon_1 \leq \frac{1}{2} \|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\| \tag{16}$$

эквивалентно неравенству

$$8NA\varepsilon_1 \le h^m(A^2-1)^{1/2} = N^{-m/n}(A^2-1)^{1/2}$$

или, что то же самое,

$$N^{\frac{m+n}{n}}\sqrt{\frac{A^2}{A^2-1}} \le \frac{1}{8\varepsilon_1}. \tag{17}$$

Преобразуем оценку (17) к более удобному виду. Заметим, что

$$A^2-1 = \sum_{\beta\neq 0}\frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} \ge \frac{2n}{(2\pi)^{2m}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{n|\mathrm{B}_{2m}|}{(2m)!}, \tag{18}$$

где B_{2m} — число Бернулли. При $n=1$ в (18) имеет место точное равенство. Как известно (см., например, [6, формула (23.1.15)]), справедлива оценка снизу

$$\frac{|\mathrm{B}_{2m}|}{(2m)!} > \frac{2}{(2\pi)^{2m}}.$$

Учитывая ее, а также пользуясь соотношениями (18), получаем

$$\frac{A^2}{A^2-1} = 1+\frac{1}{A^2-1} \le 1+\frac{(2m)!}{n|\mathrm{B}_{2m}|} \le 1+\frac{(2\pi)^{2m}}{2n} \le \frac{(2\pi)^{2m}}{n}.$$

Последнее неравенство имеет место в силу справедливого при $m > n/2$ соотношения $2n < (2\pi)^{2m}$. Таким образом, неравенство (17) будет заведомо выполнено, если

$$N^{\frac{m+n}{n}}\frac{(2\pi)^m}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{8\varepsilon_1} \quad\Longleftrightarrow\quad N \le \left(\frac{\sqrt{n}}{8\varepsilon_1(2\pi)^m}\right)^{\frac{n}{m+n}}.$$

Учитывая эквивалентность неравенств (16) и (17), а также пользуясь оценкой (15), заключаем, что при

$$N \le \min\left\{\frac{1}{\varepsilon_1}, \left(\frac{\sqrt{n}}{8\varepsilon_1(2\pi)^m}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right\} = \left(\frac{\sqrt{n}}{8\varepsilon_1(2\pi)^m}\right)^{\frac{n}{m+n}}$$

справедлива следующая двусторонняя оценка:

$$\frac{1}{2}\|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\| \le R_F \le \frac{3}{2}\|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\|.$$

Список литературы

[1] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1996. 484 с.

[2] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001. 430 с.

[3] Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 549 с.

[4] Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах / С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.П. Кирилюк, В.И. Костин. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1988. 456 с.

[5] Васкевич В.Л. Критерий гарантированной точности вычисления многомерных интегралов // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9. Спецвыпуск: Избр. докл. VII Междунар. семинара-совещания “Кубатурные формулы и их приложения”. Красноярск, август 2003. Новосибирск: ИВТ СО РАН. С. 44–49.

[6] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука. 1979. 832 с.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.