КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ, НА ПЛОСКОСТИ

Ц. Б. Шойнжуров
Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ, Россия
e-mail: `ili04@mail.ru`

A simple method for integral calculation is given. It takes into account the function values and its derivatives in the direction of straight lines parallel to the coordinate axes.

Рассмотрим кубатурные формулы, содержащие значения функции и ее производных на плоскости с коэффициентами, зависящими от уравнения границы.

Пусть область Ω, имеющая гладкую границу $\Gamma(\Omega) \subset C^m$, делится на k частей ω_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, кусками прямых, параллельных координатным осям, и $\Phi_1(x)$ — срезывающая функция

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ \dfrac{(2m+1)!}{m!^2} \int\limits_0^x t^m (1-t)^m dt, & \text{если } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{если } x \ge 1. \end{cases}$$

Построим элементарный функционал ρ_1 для области ω_1. Для этого произведем замену переменных $y_1 = x_1$ и $y_2 = x_2 - \lambda(x_1)$, где $\lambda(x)$ — уравнение границы $\Gamma(\omega_1)$. При таком преобразовании область ω_1 перейдет в область ω_1', $\Phi_1(x_1)$ — в $\widehat{\Phi}_1(y_1)$, граница $\Gamma(\Omega)$ — в кусок оси $y_1 = 0$, криволинейный параллелограмм $\Delta_{h\beta}$ — в куб $\Delta'_{h\beta}$.

Элементарный функционал $l_{\Delta'_{h\beta}}(y)$ в переменных y принимает вид

$$\langle l_{\Delta'_{h\beta}}, y^\alpha \rangle = \int\limits_{\Delta'_{h\beta}} y^\alpha \Bigg[1 - h^2 \sum_{\gamma_1=0}^{1} \sum_{\alpha_1=0}^{1} C_{\gamma_1}^{\alpha_1} d^{\alpha_1} \delta(y_1 - h\beta_1 - h\gamma_1) \times$$

$$\times \sum_{\gamma_2=0}^{1} \sum_{\alpha_2=0}^{1} C_{\gamma_2}^{\alpha_2} d^{\alpha_2} \delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2) \Bigg] dy, \qquad (1)$$

где коэффициенты функционала (1) определяются из систем

$$\sum_{\gamma=0}^{1} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1,$$

$$C_0^0 = \frac{1}{2}, \quad C_1^0 = \frac{1}{2}, \quad C_0^1 = -\frac{1}{12}, \quad C_1^1 = \frac{1}{12}. \tag{2}$$

В формуле (1) функцию $d^{\alpha_2}\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2)$ аппроксимируем $\delta(x)$-функциями и их производными с узлами, сдвинутыми на дробную часть числа $\eta(\beta_1) = \left\{\dfrac{\lambda(h\beta)}{h}\right\}$:

$$d^{\alpha_2}\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2) = \sum_{s=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1} h^2 D_s^\sigma(\beta_1) d^\sigma \delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2 - hs + \eta(\beta_1)h), \tag{3}$$

где коэффициенты вычисляются из системы

$$\sum_{s=0}^{1}\sum_{\alpha=0}^{1} h^2 D_s^\alpha = \eta^\alpha(\beta_1), \quad \alpha = 0, 1,$$

$$D_0^0 = 1 + 2\eta^3 - 3\eta^2, \quad D_1^0 = 3\eta^2 - 2\eta^3, \quad D_0^1 = -2\eta^2 + \eta + \eta^3, \quad D_1^1 = \eta^3 - \eta^2. \tag{4}$$

Построим функционал $\rho_1(y)$ для области ω_1' путем суммирования элементарных функционалов:

$$\sum_\beta l_{\Delta'_{h\beta}}(y)\widehat{\Phi}_1(y) = \widehat{\Phi}_1(y) -$$

$$-\widehat{\Phi}_1(y) \sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} h^2 \sum_{\gamma_1=0}^{1}\sum_{\alpha_1=0}^{1} C_{\gamma_1}^{\alpha_1} d^{\alpha_1}\delta(y_1 - h\beta_1 - h\gamma_1)\times$$

$$\times \sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\gamma_2=0}^{1}\sum_{\alpha_2=0}^{1} C_{\gamma_2}^{\alpha_2} d^{\alpha_2}\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2). \tag{5}$$

Подставим формулу (3) в (1):

$$\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\gamma_2=0}^{1}\sum_{\alpha_2=0}^{1} h^2 C_{\gamma_2}^{\alpha_2} d^{\alpha_2}\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2) =$$

$$= \sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\gamma_2=0}^{1}\sum_{\alpha_2=0}^{1} h^2 C_{\gamma_2}^{\alpha_2} \sum_{s=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1} D_s^\sigma(\beta_1) d^\sigma\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2 - hs + \eta(\beta_1)h). \tag{6}$$

В силу финитности функции $\widehat{\Phi}_1(y)$ все коэффициенты в первой сумме формулы (1) соответственно равны единице.

В дальнейшем при преобразовании опускаем первую сумму в записи, единицу и дробную часть $\eta(\beta_1)$. Смысл выражения после такого соглашения будет ясен из самого преобразования.

Преобразуем выражение

$$\sum_{\gamma_2=0}^{1}\sum_{\gamma_2=0}^{1}\sum_{\alpha_2=0}^{1} h^2 C_{\gamma_2}^{\alpha_2} \sum_{s=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1} D_s^\sigma(\beta_1) d^\sigma\delta(y_2 - h\beta_2 - h\gamma_2 - hs) =$$

$$= \sum_{\alpha_2=0}^{1} h^2 C_0^{\alpha_2} \sum_{s=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1} D_s^\sigma(\beta_1) d^\sigma\delta(y_2 - h\beta_2 - hs) +$$

$$+\sum_{\alpha_2=0}^{1} h^2 C_1^{\alpha_2} \sum_{s=0}^{1}\sum_{\sigma=0}^{1} D_s^{\sigma}(\beta_1) d^{\sigma}\delta(y_2-h\beta_2-h-hs)=$$
$$=C_0^0 D_0^0\delta(y_2-h\beta_2)+C_0^0 D_1^0\delta(y_2-h\beta_2-h)+C_0^1 D_0^0\delta(y_2-h\beta_2)+$$
$$+C_1^0 D_1^0\delta(y_2-h\beta_2-2h)+C_0^1 D_1^0\delta(y_2-h\beta_2-h)+$$
$$+C_0^1 D_1^0\delta(y_2-h\beta_2-h)+C_1^0 D_0^0\delta(y_2-h\beta_2-h)+$$
$$+C_0^1 D_1^0\delta(y_2-h\beta_2-h)+C_0^0 D_0^1\delta'(y_2-h\beta_2)+$$
$$+C_0^0 D_1^1\delta'(y_2-h\beta_2-h)+C_0^1 D_0^1\delta'(y_2-h\beta_2)+$$
$$+C_0^1 D_1^1\delta'(y_2-h\beta_2-h)+C_1^0 D_0^1\delta'(y_2-h\beta_2-h)+$$
$$+C_1^0 D_1^1\delta'(y_2-h\beta_2-2h)+C_1^1 D_0^1\delta'(y_2-h\beta_2-h)+C_1^1 D_1^1\delta'(y_2-h\beta_2-2h). \tag{7}$$

Выражение (7) запишем в виде

$$A_{\beta_2}^0+A_{\beta_2}^1=\sum_{s=0}^{\min(1,\beta_2)} D_s^0 \sum_{\gamma_2=0}^{\min(1,\beta_2-s)} \sum_{\alpha_2=0}^{1} C_{\gamma_2}^{\alpha_2}\delta(y_2-h\beta_2-h\gamma_2-hs)+$$
$$+\sum_{s=0}^{\min(1,\beta_2)} D_s^1 \sum_{\gamma_2=0}^{\min(1,\beta_2-s)} \sum_{\alpha_2=0}^{1} C_{\gamma_2}^{\alpha_2}\delta'(y_2-h\beta_2-h\gamma_2-hs). \tag{8}$$

Вычислим выражения $A_{\beta_2}^0$ и $A_{\beta_2}^1$:

$$A_0^0=D_0^0\sum_{\alpha_2=0}^{1} C_0^{\alpha_2}\delta(y_2)=(1+2\eta^3-3\eta^2)(C_0^0+C_0^1)\delta(y_2)=\frac{5(1+2\eta^3-3\eta^2)}{12}\delta(y_2),$$

$$A_0^1=D_0^1\sum_{\alpha_2=0}^{1} C_0^{\alpha_2}\delta(y_2)=\frac{5(\eta-2\eta^2+\eta^3)}{12}\delta'(y_2), \tag{9}$$

$A_{\beta_2}^0=\delta(x-h\beta_2)$ при $\beta_2\geq 1$, $A_{\beta_2}^1=(\eta-3\eta^2+2\eta^3)\delta'(x-h\beta_2)$ при $\beta_2\geq 1$.

Учитывая носитель срезывающей функции $\widehat{\Phi}_1(y)$, имеем

$$\widehat{\Phi}_1(y)\widehat{\rho}_1(y)=\widehat{\Phi}_1(y)\left[\varepsilon_{\omega_1'}(y)-\sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} h^2\delta(y_1-h\beta_1)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{1} A_{\beta_2}^{\alpha}(\beta_1)d^{\alpha}\delta(y_2-h\beta_2+\eta(\beta_1)h)\right]. \tag{10}$$

В формуле (10), перейдя к старым переменным x по формулам $x_1=y_1$, $x_2=y_2+\lambda(y_1)$, получаем

$$\Phi_1(x)\rho_1(x)=\Phi_1(x)\left[\varepsilon_{\omega_1}(x)-h^2\sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} h^2\delta(x_1-h\beta_1)\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{\beta_2=0}^{\infty}\sum_{\alpha=0}^{1} A_{\beta_2}^{\alpha}(\beta_1)d^{\alpha}\delta(x_2-h\beta_2-\left[\frac{\lambda(\beta_1)}{h}\right]h)\right]. \tag{11}$$

Таким образом, построен функционал ρ_1 для области ω_1.

Аналогичные функционалы получаются для остальных областей ω_j, $j = 2, 3, \ldots, k$:

$$\Phi_j(x)\rho_j(x) = \Phi_j(x)\left[\varepsilon_\Omega(x) - h^2 \sum_{h\beta\in\Omega} \sum_{\alpha=0}^{1} A^\alpha_{\beta_2}(\beta_1) d^\alpha \delta(x_2 - h\beta_2)\right]. \tag{12}$$

Из формул (8), (11), (12) получаем кубатурную формулу

$$\int_\Omega \varphi(x)dx = \sum_{h\beta\in\Omega} h^2 \sum_{j=1}^{k} \Phi_j(h\beta) \sum_{\alpha=0}^{1} A^\alpha_j d^\alpha \varphi(h\beta).$$

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.