

# ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ НА ТЕРМОДИФФУЗИЮ В ПЛОСКОМ СЛОЕ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ\*

А. Е. КАРТОШКИНА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН*

*Красноярск, Россия*

e-mail: kartoshkina\_a@bk.ru

A partially invariant solution of thermodiffusion equations is investigated. The solution describes a 2D motion of binary mixture in a layer with free boundaries. Equilibrium position of the layer is found, in which the heat and admixture transfer is governed by the molecular transport. The nonlinear problem is solved by Galerkin and finite-difference methods. Accounting of the dynamics effect results in decay of motion in finite time.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим двумерное термодиффузионное движение бинарной смеси в отсутствие внешних сил (условие полной невесомости). Оно описывается системой уравнений

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u}\nabla\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u}; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\theta = \chi\Delta\theta; \quad (1.3)$$

$$c_t + \mathbf{u} \cdot \nabla c = d\Delta c + \alpha\Delta\theta, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  — вектор скорости;  $p$  — давление;  $\theta$  — температура;  $c$  — концентрация более легкого компонента смеси;  $\rho$  — плотность;  $\nu$  — кинематическая вязкость;  $\chi$  — коэффициент температуропроводности;  $d$  — коэффициент диффузии;  $\alpha$  — коэффициент Соре;  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $d$  и  $\alpha$  предполагаются постоянными.

Условия на свободной границе  $\Gamma$  имеют вид

$$(p_{\text{gas}} - p)\mathbf{n} + 2\rho\nu D(\mathbf{u})\mathbf{n} = 0; \quad (1.5)$$

$$f_t + \mathbf{u} \cdot \nabla f = 0; \quad (1.6)$$

$$k\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} + \gamma(\theta - \theta_{\text{gas}}) = 0; \quad (1.7)$$

$$d\frac{\partial c}{\partial\mathbf{n}} + \alpha\frac{\partial\theta}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad (1.8)$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00836-а) и интеграционного проекта СО РАН (№ 2.15).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

где  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  есть уравнение  $\Gamma$ ;  $p_{\text{gas}}, \theta_{\text{gas}}$  — давление и температура окружающего газа;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к  $\Gamma$ ;  $D(\mathbf{u})$  — тензор скоростей деформаций;  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $\gamma$  — коэффициент межфазного теплообмена.

Необходимо учесть начальные условия

$$\begin{aligned} \mathbf{u}|_{t=0} &= \mathbf{u}_0, \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, f|_{t=0} = f_0, \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0, c|_{t=0} = c_0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Далее рассматривается движение в плоском слое  $\ell(t) \leq y \leq -\ell(t)$ ,  $|x| < \infty$ , границы которого  $y = \pm\ell(t)$  свободные. Ищется решение специального вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (xu(y, t), v(y, t)), \theta = a(y, t)x^2 + b(y, t), \\ c &= h(y, t)x^2 + g(y, t), p = p(y, t), \end{aligned} \quad (1.10)$$

которое является частично инвариантным [1]. Ему можно дать следующее физическое интерпретирование. Достаточно длинный слой смеси в окрестности точки  $x = 0$  нагревается, причем внешняя температура  $\theta_{\text{gas}}(x, t)$  имеет в этой точке минимум или максимум. Тогда в окрестности  $x = 0$   $\theta_{\text{gas}}(x, t)$  аппроксимируется по параболическому закону

$$\theta_{\text{gas}}(x, t) = a_{\text{gas}}(t)x^2 + b_{\text{gas}}(t). \quad (1.11)$$

Дальнейшее движение смеси описывается формулами (1.10). Эффект Соре ( $\alpha \neq 0$ ) приводит также к параболическому закону распределения концентрации в слое. В зависимости от знака  $a(y, t)$ ,  $h(y, t)$  температура и концентрация будут принимать максимальное или минимальное значение в точке  $x = 0$ . Поэтому в дальнейшем основной интерес представляет поведение функций  $a(y, t)$ ,  $h(y, t)$ .

## 2. Точное решение

С помощью уравнения сохранения массы  $u + v_y = 0$ , справедливого для решения (1.10), можно задачу свести к отысканию только функции  $u(y, t)$ , а затем определять функции  $v$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $g$  и  $p$ . Начально-краевая задача для  $u(y, t)$  исследована в [2]. Оказалось, что для задачи с двумя свободными границами решение существует  $\forall t \geq 0$ , если  $u_0(y) \geq 0$ . Если же  $u_0(y) \geq \delta$ ,  $y \in [0, 1]$ ,  $\delta > 0$ , — постоянная, то это решение имеет асимптотику

$$u(y, t) = t^{-1}[1 + 0(t^{-1})], \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.1)$$

равномерную при  $y \in [0, \ell(t)]$ , причем

$$\ell(t) = kt^{-1}[1 + 0(t^{-1})] \quad (2.2)$$

с постоянной  $k = k(u_0) > 0$ . Здесь толщина слоя стремится к нулю с ростом времени. В [2] также найдено точное решение

$$u(y, t) = a(t) + b(t) \cos[\pi ny/\ell(t)], \quad (2.3)$$

где функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\ell(t)$  есть решение задачи Коши:

$$a_t = -a^2 - b^2, \quad b_t = -[2a + (\pi n/\ell(t))^2] b, \quad \ell_t = -a\ell; \quad (2.4)$$

$$a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0, \quad \ell(0) = 1, \quad a_0, b_0 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Свойства решения задачи (2.4), (2.5) зависят от знака постоянной  $a_0$ . Решение этой системы численно исследовано в [3], где подтверждены качественные выводы работы [2].

### 3. Молекулярный перенос тепла и примеси

Пусть жидкость находится в состоянии покоя, т. е. в системе уравнений (1.1)–(1.9)  $\mathbf{u} = 0$ . В этом случае возможен только молекулярный перенос тепла и примеси. После подстановки (1.10) в данную систему задачу можно свести к задаче об отыскании функций  $a(y, t)$ ,  $h(y, t)$ . В полученной системе вводим безразмерные переменные и функции равенствами

$$\tau = \frac{\nu}{\ell_0^2} t, \quad z = \frac{y}{\ell_0}, \quad A(z, \tau) = \frac{\ell_0^2}{T_0} a, \quad H(z, \tau) = \frac{\ell_0^2}{C_0} h, \quad (3.1)$$

где  $T_0$  — характерная температура;  $C_0$  — характерная концентрация. Получаем задачу в интервале  $-1 < z < 1$ :

$$A_\tau - \frac{1}{\text{Pr}} A_{zz} = 0; \quad (3.2)$$

$$H_\tau - \frac{1}{\text{Pe}} H_{zz} - \text{Sr} A_{zz} = 0. \quad (3.3)$$

Граничные условия при  $z = \pm 1$ :

$$A_z + \text{Bi}(A - A_{\text{gas}}) = 0; \quad (3.4)$$

$$H_z + \text{PrSr} A_z = 0, \quad (3.5)$$

где  $\text{Pr} = \nu/\chi$  — число Прандтля;  $\text{Bi} = \gamma\ell_0/k$  — число Био;  $\text{Pe} = \nu/d$  — число Пекле;  $\text{Sr} = \alpha T_0/\nu C_0$  — число Сорэ;  $A_{\text{gas}}(\tau) = a_{\text{gas}}\ell_0^2/T_0$ , где  $a_{\text{gas}}$  из (1.11). Следует добавить начальные условия

$$A(z, 0) = A_0(z), \quad H(z, 0) = H_0(z), \quad (3.6)$$

причем  $\pm A_{0z} + \text{Bi}(A_0 - A_{\text{gas}}(0)) = 0$ ,  $H_{0z} + \text{PrSr} A_{0z} = 0$  при  $z = \pm 1$ . Ясно, что можно в силу симметрии считать функции  $A$ ,  $H$  четными по  $z$  и решать задачу на  $0 < z < 1$ , так что при  $z = 0$  выполнены условия

$$A_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (3.7)$$

Система уравнений (3.2)–(3.7) решается методом Фурье. Естественно начать с определения функции  $A(z, \tau)$ , которая удовлетворяет параболическому уравнению (3.2), условиям на границе третьего рода (3.4), второго рода (3.7) и начальному условию (3.6). Решение этой начально-краевой задачи имеет вид

$$A(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ f_0^n + \frac{2\sqrt{\lambda_n} \sin(\sqrt{\lambda_n})}{\text{Pr} h_n} \int_0^\tau \exp\left(\frac{\lambda_n}{\text{Pr}} s\right) A_{\text{gas}}(s) ds \right] \exp\left(-\frac{\lambda_n}{\text{Pr}} \tau\right) - \frac{2 \sin(\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n} h_n} A_{\text{gas}}(\tau) \right\} \cos(\sqrt{\lambda_n} z) + A_{\text{gas}}(\tau), \quad (3.8)$$

где

$$h_n = 1 + \frac{\text{Bi}}{\lambda_n} \cos^2(\sqrt{\lambda_n}), \quad f_0^n = 2 h_n^{-1} \int_0^1 A_0(x) \cos(\sqrt{\lambda_n} x) dx$$

и  $\sqrt{\lambda_n}$  есть решение уравнения  $\sqrt{\lambda} \tan(\sqrt{\lambda}) = \text{Bi}$ , оно имеет счетное число вещественных решений. Так, для  $\text{Bi} = 0$  имеем  $\lambda_n = \pi^2 n^2$  и

$$A(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0^n \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pr}} \tau\right) \cos(\pi n z). \quad (3.9)$$

Аналогично находим решение неоднородного уравнения (3.3) со вторым краевым условием (3.5), (3.7) и начальным условием (3.6). С учетом (3.8) и (3.9) получим решение

$$H(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pe}} \tau\right) \cos(\pi n z) + \text{PrSr} A(z, \tau) + \text{PrSr} \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Pe}} + 1\right) \times \\ \times \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pe}} \tau\right) \int_0^{\tau} \exp\left(\frac{(\pi n)^2}{\text{Pe}} s\right) I_A^n(s) ds \cos(\pi n z),$$

где

$$g_0^n = 2^{-1} \int_0^1 (H_0(z) - \text{PrSr} A_0(z)) \cos(\pi n z) dz; \quad I_A^n(s) = \int_0^1 A'_\tau(z, s) \cos(\pi n z) dz;$$

для  $\text{Bi} = 0$ ,  $\text{Pr} \neq \text{Pe}$

$$H(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pe}} \tau\right) \cos(\pi n z) + \\ + \frac{\text{SrPr}(\text{Pr} + \text{Pe})}{\text{Pr} - \text{Pe}} \sum_{n=0}^{\infty} r_0^n \left( \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pr}} \tau\right) - \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pe}} \tau\right) \right) \cos(\pi n z);$$

для  $\text{Bi} = 0$ ,  $\text{Pr} = \text{Pe}$

$$H(z, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pr}} \tau\right) \cos(\pi n z) - 2\text{Sr} \pi^2 \tau \sum_{n=0}^{\infty} r_0^n n^2 \exp\left(-\frac{(\pi n)^2}{\text{Pr}} \tau\right) \cos(\pi n z),$$

где

$$r_0^n = 2^{-1} \int_0^1 A_0(z) \cos(\pi n z) dz.$$

На рис. 1–4 представлены графики функций  $A$  и  $H$  при  $z = 1$ , т. е. на границе слоя. Приняты следующие значения безразмерных параметров:  $\text{Pr} = 0.2$ ,  $\text{Bi} = 2$ ,  $\text{Pe} = 1000$ ,  $\text{Sr} = -3$ :

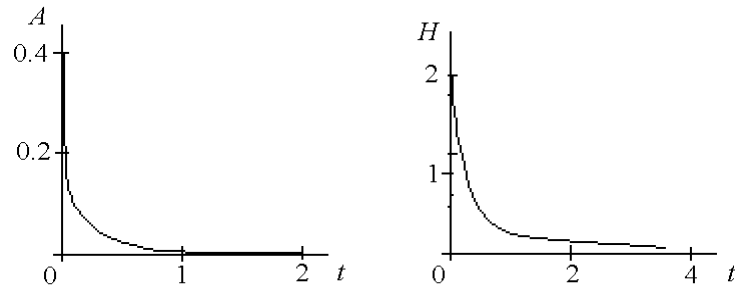
$$A_0(z) = z^2 - \frac{\text{Bi} + 2}{\text{Bi}}, \quad H_0(z) = -2^{-1} \text{PrSr} \left(1 - \frac{\text{Bi} + 2}{\text{Bi}}\right) z^2 \quad (3.10)$$

при  $\text{Bi} \neq 0$ ;

$$A_0(z) = -2/3z^3 + z^2, \quad H_0(z) = -2/3z^3 + z^2 \quad (3.11)$$

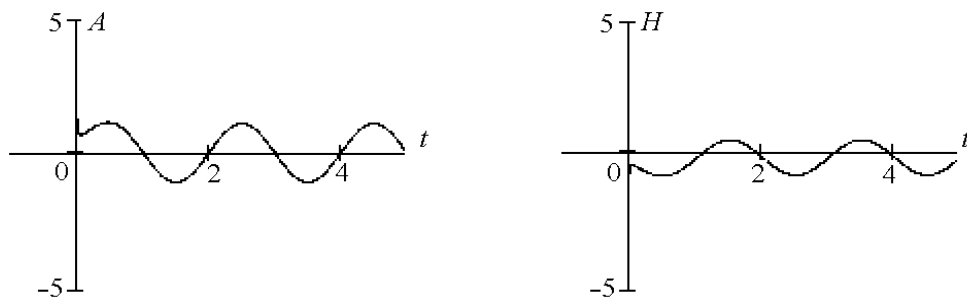
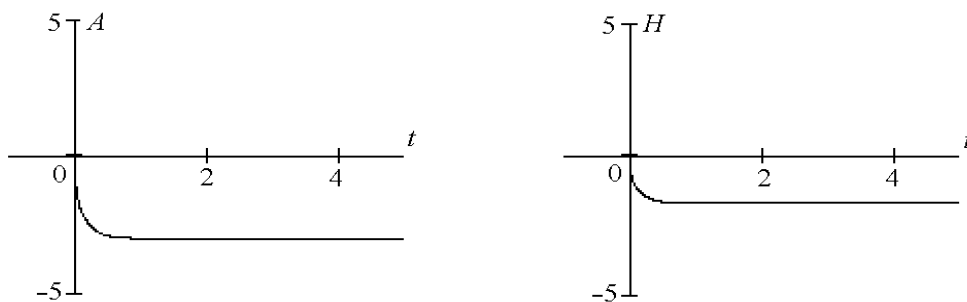
при  $\text{Bi} = 0$ . Функции (3.10), (3.11) выбраны согласно граничным условиям (3.4), (3.5).

На рис. 1 представлены графики функций, когда  $\text{Bi} = 0$ , т. е. отсутствует теплообмен через свободную границу. В этом случае  $A(1, \tau)$ ,  $H(1, \tau)$  стремятся к нулю. Таким образом, температура и концентрация зависят только от времени.

Рис. 1. Поведение функций  $H(1, \tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $Bi = 0$ .

На рис. 2 представлены графики функций, когда  $A_{\text{gas}} = A \sin(\omega\tau)$ . В этом случае  $A(1, \tau)$  стремится к  $A_{\text{gas}}$ ;  $H(1, \tau)$  также ведет себя как синусоида. Если задавать  $A_{\text{gas}}$  в виде различных функций, то можно видеть, что  $A(1, \tau)$  всегда ведет себя аналогично  $A_{\text{gas}}(\tau)$ . Поведение концентрации веществ смеси обусловлено поведением температуры, т. е. когда температура становится максимальной в точке  $x = 0$ , концентрация также имеет максимум. И наоборот, если температура имеет минимум, то концентрация становится минимальной.

На рис. 3 представлены графики функций, когда  $A_{\text{gas}} = \text{const} < 0$ . В этом случае  $A(1, \tau)$  убывает и стремится к  $A_{\text{gas}}$ ;  $H(1, \tau)$  убывает и выходит на константу. Согласно (1.10) температура газа имеет максимум, температура жидкости и концентрация веществ смеси также имеют максимум в точке  $x = 0$ . Если взять  $A_{\text{gas}} = \text{const} > 0$ , то температура газа, температура на поверхности слоя и концентрация будут иметь минимум в этой точке.

Рис. 2. Поведение функций  $H(1, \tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $A_{\text{gas}} = A \sin(\omega\tau)$ .Рис. 3. Поведение функций  $H(1, \tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $A_{\text{gas}} < 0$ ,  $Sr < 0$ .

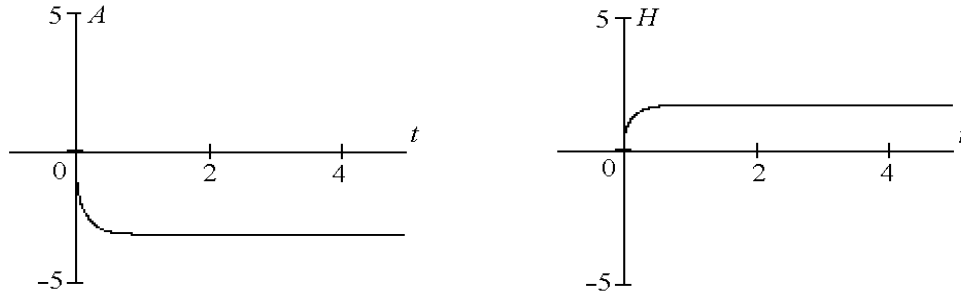


Рис. 4. Поведение функций  $H(1, \tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $A_{\text{gas}} < 0$ ,  $\text{Sr} > 0$ .

На рис. 4 представлены графики функций, когда  $A_{\text{gas}} = \text{const} < 0$ . Выше значения числа Соре  $\text{Sr}$  брались меньше нуля, здесь  $\text{Sr} = 3$ . В этом случае  $A(1, \tau)$  убывает и стремится к  $A_{\text{gas}}$ , как и в предыдущем случае. Однако  $H(1, \tau)$  возрастает и также выходит на константу. Температура газа имеет максимум, температура жидкости также имеет максимум в точке  $x = 0$ , а концентрация веществ имеет минимум в этой точке. Здесь мы имеем дело с аномальной концентрацией.

## 4. Расчет поля температур

Теперь учтем поле скоростей для точного решения (2.3)–(2.5). К системе уравнений (2.4), (2.5) добавим уравнение для температуры (1.3), а на свободной границе поставим условие третьего рода (1.7). В этой системе вводим безразмерные переменные (3.1) и

$$z = \frac{y}{\ell(t)}, \quad \ell(\tau) = \frac{\ell(t)}{\ell_0}, \quad U = \frac{\ell_0^2}{\nu} u. \quad (4.1)$$

Получаем систему уравнений

$$a_\tau = -a^2 - b^2, \quad b_\tau = -[2a + (\pi n z)^2] b, \quad \ell_\tau = -a\ell; \quad (4.2)$$

$$R \equiv A_\tau - A_z b \frac{\sin(\pi n z)}{\pi n} + 2Ab \cos(\pi n z) + 2Aa - \frac{1}{\text{Pr} \ell^2} A_{zz} = 0, \quad (4.3)$$

к которым следует добавить начальные условия (2.5), (3.6) и условия на свободной границе

$$A_z + \ell \text{Bi}(A - A_{\text{gas}}) = 0. \quad (4.4)$$

Решение задачи определялось методом Галеркина. В качестве базисных функций взяты полиномы Лежандра. Причем, как следует из симметрии рассматриваемой области, достаточно ограничиться только четными полиномами  $P_{2m}(z)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Приближенное решение ищется в виде ряда

$$A_n(z, \tau) = \sum_{m=0}^n A^m(\tau) P_{2m}(z). \quad (4.5)$$

Функции  $A^m(\tau)$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) находятся из системы

$$\int_0^1 R(A_n, \ell, a, b) P_{2m}(z) dz = 0,$$

$$\sum_{m=0}^n m(2m+1)A^m(\tau) + \text{Bi} \ell \left[ \sum_{m=0}^n A^m(\tau) - A_{\text{gas}}(\tau) \right] = 0. \quad (4.6)$$

Систему (4.2), (4.4) можно преобразовать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно  $n+3$  неизвестной функции:  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $\ell(\tau)$ ,  $A^m(\tau)$ ,  $m=0, \dots, n-1$ . Следует добавить начальные условия. Данная система решена методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности.

В случае  $a_0 > 0$  решение существует при всех  $t > 0$  и имеет асимптотику (2.1), (2.2). В случае  $a_0 \leq 0$ ,  $b \neq 0$  решение существует лишь конечное время ( $t_* < \infty$ ), при этом  $u \rightarrow -\infty$ ,  $\ell \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow t_*$ .

На рис. 5 при  $a_0 = -1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} = \text{const} > 0$  функция  $A(1, \tau)$  возрастает и уходит на  $+\infty$  за конечный промежуток времени;  $U(z, \tau)$  убывает и уходит на  $-\infty$ . Поскольку скорость меньше нуля, жидкость притекает к точке  $x = 0$ . Течение разрушается за конечный промежуток времени. Здесь  $A_{\text{gas}} > 0$ , т. е. внешняя температура имеет минимум,  $A(1, \tau) > 0$ , следовательно, температура жидкости на границе слоя имеет минимум при  $x = 0$ . Так как здесь температура минимальна, жидкость из более теплых мест притекает к этой точке. Как можно видеть выше,  $A(1, \tau)$  слоя стремилась к  $A_{\text{gas}}$ . При добавлении бесконечного поля скоростей  $A(1, \tau)$  стремится к бесконечности.

На рис. 6 приведены результаты расчетов для  $a_0 = -1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} = \text{const} < 0$ . Температура газа имеет максимум. В начальный момент времени  $A(1, \tau) > 0$ , т. е. температура газа имеет минимум, затем  $A(1, \tau)$  убывает и становится отрицательной, т. е. температура максимальна в точке  $x = 0$ , как и температура газа. При добавлении бесконечного поля скоростей от температуры газа зависит, какая (максимальная или минимальная) будет температура на границе слоя.

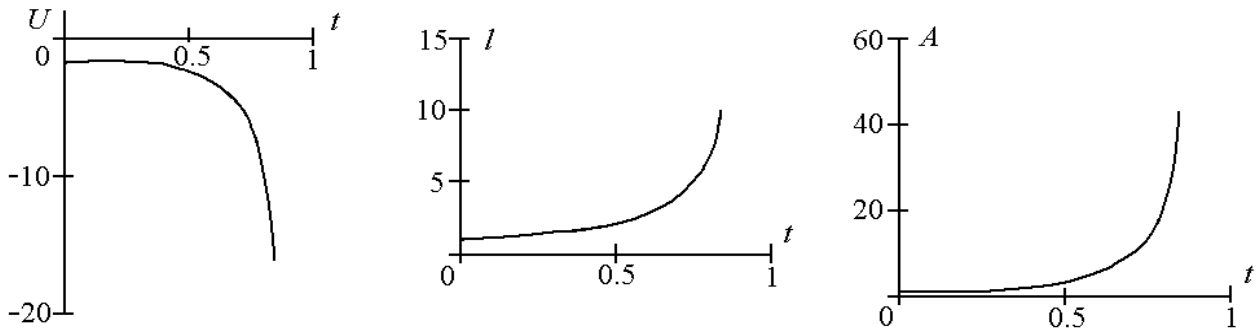


Рис. 5. Поведение функций  $U(1, \tau)$ ,  $\ell(\tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $a_0 = -1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} > 0$ .

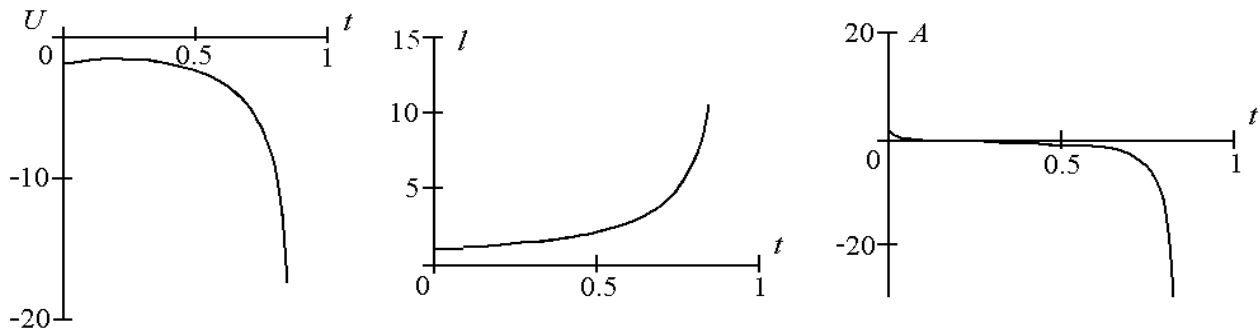


Рис. 6. Поведение функций  $U(1, \tau)$ ,  $\ell(\tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $a_0 = -1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} < 0$ .

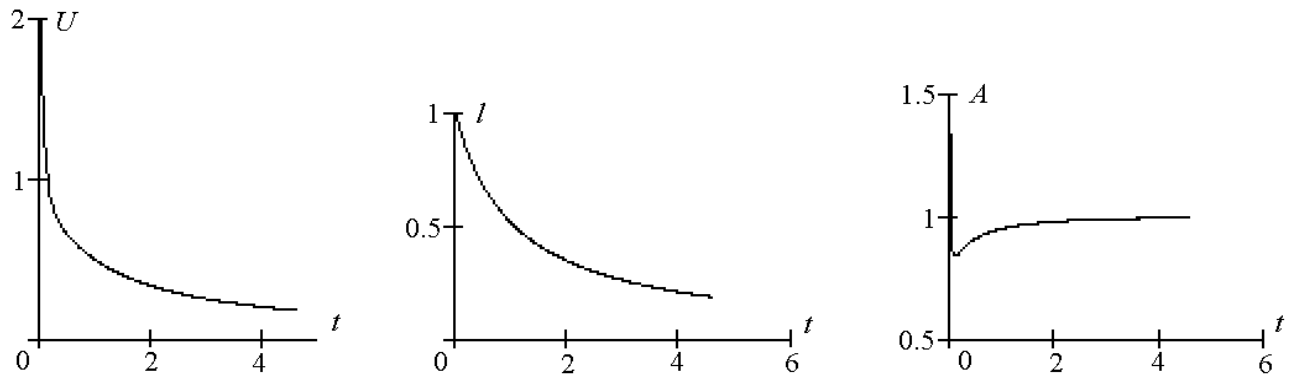


Рис. 7. Поведение функций  $U(1, \tau)$ ,  $l(\tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} \neq 0$ .

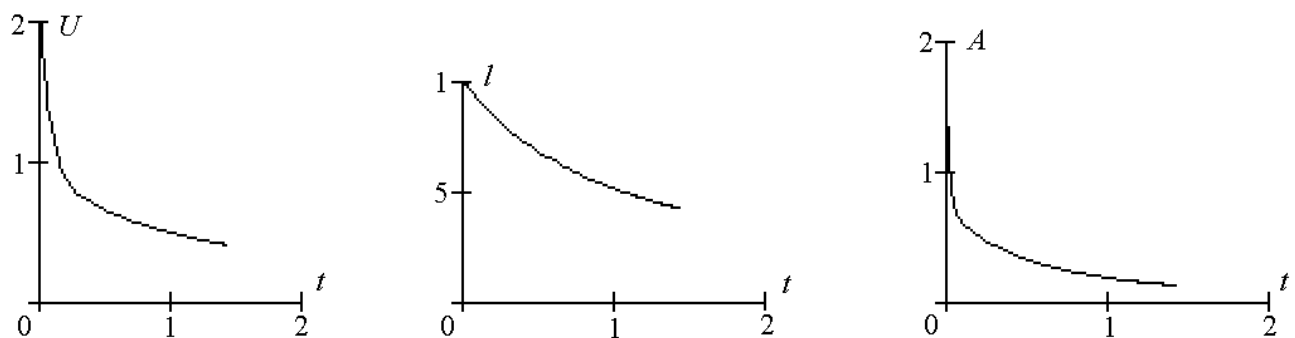


Рис. 8. Поведение функций  $U(1, \tau)$ ,  $l(\tau)$  и  $A(1, \tau)$  при  $Bi = 0$ .

На рис. 7 приведены результаты расчетов для  $a_0 = 1$ ,  $b_0 = \pm 1$ ,  $n = 1$ ,  $A_{\text{gas}} \neq 0$ . Поведение функций скорости и положение свободной границы согласуются с асимптотикой (2.1), (2.2). Скорость больше нуля, т. е. жидкость оттекает от точки  $x = 0$  и толщина слоя уменьшается. При стремлении скорости к нулю жидкость приходит в равновесное состояние. Функция  $A(1, \tau)$  стремится к  $A_{\text{gas}}$ . Таким образом, если движение не разрушается, то температура на поверхности слоя стремится к температуре газа, как и в случае отсутствия поля скоростей.

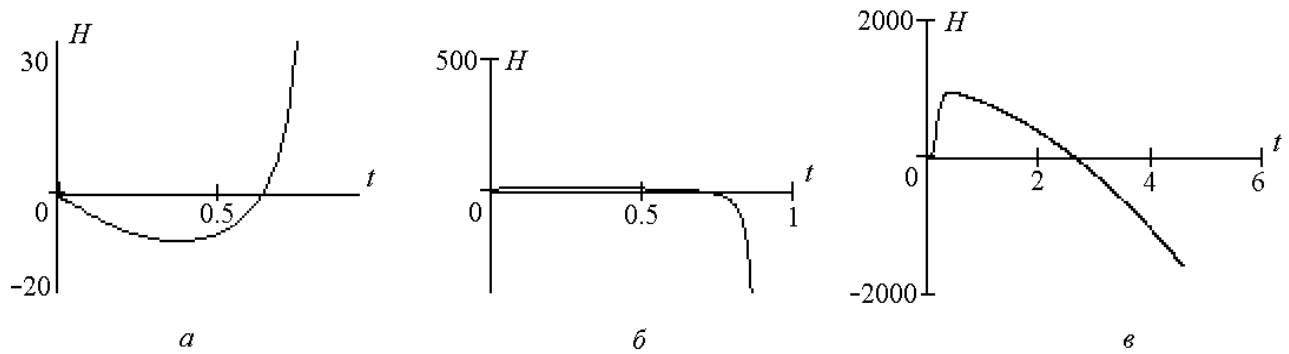
На рис. 8 приведены результаты расчетов, когда  $Bi = 0$ . В этом случае  $A(1, \tau)$  стремится к нулю,  $U(1, \tau)$  и  $l(\tau)$  также убывают и стремятся к нулю. При отсутствии теплообмена между газом и смесью жидкость стремится к равновесному состоянию.

## 5. Учет термодиффузии

Будем учитывать поток вещества за счет не только градиентов концентрации, но и градиентов температуры, т. е. рассмотрим термодиффузионное движение смеси. К уравнениям (1.3), (2.4), (2.5) добавим (1.4) и условие на свободной границе (1.8). В данной системе введем безразмерные переменные (3.1), (4.1). Уравнение для  $H(\tau, z)$  в безразмерных переменных имеет вид

$$M \equiv H_\tau - H_z b \frac{\sin(\pi n z)}{\pi n} + 2Ha + 2Hb \cos(\pi n z) - \frac{1}{\text{Pe} \ell^2} H_{zz} - \frac{\text{Sr}}{\ell^2} A_{zz} = 0. \quad (5.1)$$



Рис. 9. Поведение функций  $H(1, \tau)$ .

Получаем задачу в безразмерных переменных (3.5), (4.2), (4.3)–(4.4), (5.1), к которой следует добавить начальные условия (2.5) и (3.6). Решение данной задачи находим методом Галеркина. Приближенное решение ищется в виде ряда (4.5) и

$$H_n(z, \tau) = \sum_{m=0}^n H^m(\tau) P_{2m}(z).$$

Получим систему уравнений (4.2), (4.6) и

$$\int_0^1 M(A_n, H_n, \ell, a, b) P_{2m}(z) dz = 0, \quad (m = 0, \dots, n),$$

$$\sum_{m=0}^n m(2m+1) H^m(\tau) + \text{PrSr} \sum_{m=0}^n m(2m+1) A^m(\tau) = 0. \quad (5.2)$$

Результаты численных расчетов показали, что графики функций  $U(1, \tau)$ ,  $\ell(\tau)$  и  $A(1, \tau)$  совпадают с графиками, представленными для этих функций на рис. 5–7. На рис. 9 показано поведение функции  $H(1, \tau)$ : рис. 9, а соответствует рис. 5,  $H(1, \tau)$  убывает, затем возрастает и уходит на  $+\infty$  (здесь концентрация сначала имеет максимум, а потом минимум в точке  $x = 0$ ), а рис. 9, б — рис. 6,  $H(1, \tau)$  убывает и становится меньше нуля, т. е. имеет максимум. По мере того как жидкость притекает к точке  $x = 0$ , температура увеличивается и концентрация веществ смеси также увеличивается, жидкость приносит с собой концентрацию. Рисунок 9, в соответствует рис. 7,  $H(1, \tau)$  сначала возрастает, потом убывает и уходит на константу при  $\tau \rightarrow \infty$ . С увеличением числа Соре промежутки времени, на котором  $H(1, \tau) > 0$ , уменьшаются. Таким образом, с увеличением числа Соре жидкость быстрее стремится к равновесному состоянию.

## 6. Конечно-разностный метод

Задача (3.5), (4.2)–(4.4), (5.1) также решалась и конечно-разностным методом. Построим неявную разностную схему, где  $\tau$  — шаг по времени, а  $h$  — шаг по пространственной переменной  $z$ . Вводим сетку  $\omega_{n,j} = \{(z_j, \tau_n) : z_j = jh, \tau_n = \tau n, j = 0, \dots, m; n = 0, \dots, k; mh = 1\}$ .

Производные заменим их разностными аналогами. Получим разностную схему для уравнений (4.3), (5.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (A_j^{n+1} - A_j^n) - b^{n+1} \frac{\sin(\pi k j)}{2h\pi k} (A_{j+1}^{n+1} - A_{j-1}^{n+1}) + 2A_j^{n+1} (a^{n+1} + b^{n+1} \cos(\pi k j)) - \\ - \frac{1}{\text{Pr}h^2(\ell^{n+1})^2} (A_{j-1}^{n+1} - 2A_j^{n+1} + A_{j+1}^{n+1}) = 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (H_j^{n+1} - H_j^n) - b^{n+1} \frac{\sin(\pi k j)}{2h\pi k} (H_{j+1}^{n+1} - H_{j-1}^{n+1}) + 2H_j^{n+1} (a^{n+1} + b^{n+1} \cos(\pi k j)) - \\ - \frac{1}{\text{Pe}h^2(\ell^{n+1})^2} (H_{j-1}^{n+1} - 2H_j^{n+1} + H_{j+1}^{n+1}) - \frac{\text{Sr}}{h^2(\ell^{n+1})^2} (A_{j-1}^{n+1} - 2A_j^{n+1} + A_{j+1}^{n+1}) = 0. \end{aligned}$$

Граничные условия аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{A_m - A_{m-1}}{h} + \text{Bi}(A_m - A_{\text{gas}}) = 0, \quad \frac{H_m - H_{m-1}}{h} + \text{PrSr} \frac{A_m - A_{m-1}}{h} = 0, \\ A_1 = A_2, \quad H_1 = H_2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Система уравнений (6.1), (6.2) решалась методом прогонки. Функции  $a(\tau)$ ,  $b(\tau)$ ,  $\ell(\tau)$  находились из системы уравнений (4.2), которая решалась методом Рунге — Кутты. Результаты решения задачи методом прогонки с высокой степенью точности совпадают с результатами ее решения методом Галеркина.

Работа докладывалась на VI Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2005).

Автор выражает особую благодарность профессору В.К. Андрееву за постановку задачи и обсуждение результатов.

## Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К., КАРТОШКИНА А.Е. О движении плоского слоя жидкости со свободной границей под действием эффекта Соре // Вест. КГУ. Физ.-мат. науки. Красноярск: КГУ, 2004. № 1. С. 182–189.
- [2] ПУКНАСНОВ V.V. On a problem of viscous strip deformation with a free boundary // C.R. Acad. Scien. Paris. 1999. T. 328. Ser. 1. P. 357–362.
- [3] АНДРЕЕВ В.К., КАРТОШКИНА А.Е., РОДИОНОВ А.А. Об одном уравнении динамики вязкой жидкости // Вест. КГУ. Физ.-мат. науки. Красноярск: КГУ, 2005. № 1. С. 204–210.

*Поступила в редакцию 28 ноября 2005 г.,  
в переработанном виде — 5 апреля 2006 г.*