Вычислительные технологии **Том 11, № 4, 2006**

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Н. Т. Данаев
ДГП "НИИ математики и механики" КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
Е. К. Ергалиев
Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан
e-mail: danaev@kazsu.kz, Ergaliev79@mail.ru

An iteration scheme for the numerical solution of stationary Navier — Stocks equations written for the velocity and pressure variables is discussed. For the suggested algorithm, the convergence of the iteration procedure has been proved. In the case of Stocks linear problem, it has been proved that the convergence rate does not depend on the number of grid knots.

В прямоугольной области $D = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, ..., N\}$ рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса

$$\left(\vec{U}, \nabla\right)\ \vec{U} + \mathrm{grad} p = \nu \Delta \vec{U} + \vec{f}, \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\, \vec{U} = 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\vec{U}\Big|_{\partial D} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{U} = (U_1, U_2, ..., U_N)$ — вектор скорости; $\vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_N)$ — вектор-функция источников; p — давление; ν — коэффициент вязкости; $N = 2, 3$ — пространственная размерность задачи.

Для численного решения дифференциальной задачи (1)–(3) широко используются итерационные схемы, основанные на идее "слабой сжимаемости", впервые предложенной в работе [1]. Основная идея этого метода состоит в том, что уравнение неразрывности регуляризуется уравнением вида

$$\varepsilon \frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{U} = 0, \tag{4}$$

где $\varepsilon > 0$ — числовой параметр.

Информацию об итерационных схемах, применяемых для решения задачи (1)–(3) с использованием уравнения (4), можно найти в работе [2].

Для численного решения задачи (1)–(3) конечно-разностным методом рассмотрим итерационную схему вида

$$\frac{U_m^{n+1}-U_m^n}{\tau}+L_{h,m}\vec{U}_m^{n+1}+(p^n-\tau_0\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n)_{x_m}=\nu\Delta_h U_m^{n+1}+\tau_0\delta(U_m^{n+1}-U_m^n)_{x_m\bar{x}_m}+f_m, \tag{5}$$

$m=1,2,...,N$,

$$\frac{p^{n+1}-p^n}{\tau_0}+\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^{n+1}=0 \tag{6}$$

с однородными краевыми условиями

$$\vec{U}^{n+1}\Big|_{\partial D_h}=0, \tag{7}$$

где τ, τ_0, δ — положительные итерационные параметры. Здесь и в далее приняты общеизвестные обозначения из теории разностных схем [3].

Предполагается, что компоненты вектора скорости $U_m,\ m=\overline{1,N}$, определены в узлах соответствующих сеток:

$$D_{h,m}=\{(l_1h,l_2h,...,l_{m-1}h,\ (l_m+1/2)h,\ l_{m+1}h,...,l_Nh),$$
$$l_k=\overline{0,M},\ k\neq m,\ l_m=\overline{0,M-1},\ Mh=1\},$$

а значения давления — в узлах сетки

$$D_h=\{(l_1h,l_2h,...,l_Nh),\quad l_k=\overline{0,M-1},\ k=\overline{1,N}\}.$$

Также предполагается, что операторы $Ł_{h,m},\ m=\overline{1,N}$, соответствующие аппроксимации конвективных членов, являются энергетически "нейтральными", т. е.

$$(L_{h,m}U_m,U_m)=0\quad\forall m=\overline{1,N}. \tag{8}$$

Для удовлетворения условию (8), например для $N=2$, выбираем $Ł_{h,1}$ следующим образом:

$$L_{h,1}(U)_{k+1/2l}=\frac{1}{2h_1}(a_{k+1l}U_{k+3/2l}-a_{kl}U_{k-1/2l})+$$
$$+\frac{1}{2h_2}(b_{k+1/2l+1/2}U_{k+1/2l+1}-b_{k+1/2l-1/2}U_{k+1/2l-1}),$$

где

$$a_{k+1l}=0,5(U_{k+3/2l}+U_{k+1/2l});\quad b_{k+1/2l+1/2}=0,5(V_{k+1l+1/2}+V_{kl+1/2}).$$

Для получения априорных оценок для итераций (5)–(7) умножим соотношение (5) на $2\tau U_m^{n+1}$, просуммируем по внутренним узлам соответствующих сеток $D_{h,m}$ и, используя формулы суммирования по частям, запишем

$$\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n\right\|^2+\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{U}^n\right\|^2+2\tau(p^n-\tau_0\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^{n+1})+$$
$$+2\tau\nu\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+2\tau\tau_0\delta\sum_m(U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m},U^{n+1}_{m,\bar{x}_m})=2\tau(\vec{f},\vec{U}^{n+1}).$$

Отсюда, учитывая соотношение (7), получим

$$\left\|\vec{U}^{n+1}\right\|^2-\left\|\vec{U}^n\right\|^2+\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n\right\|^2+\frac{2\tau}{\tau_0}(p^{n+1}-p^n,p^n)+\tau\tau_0(\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+$$
$$+\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\|^2-\left\|\underline{\mathrm{div}}_h(\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n)\right\|^2)+2\tau\nu\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+$$
$$+\tau\tau_0\delta\sum_m(\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2-\left\|U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2+\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2)\le 2\tau\left|(\vec{f},\vec{U}^{n+1})\right|. \tag{9}$$

Надо отметить, что

$$(p^{n+1}-p^n,p^n)=0.5\left(\|p^{n+1}\|^2-\|p^n\|^2-\tau_0^2\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2\right),$$

$$\left\|\underline{\mathrm{div}}_h(\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n)\right\|^2\le N\sum_m\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2.$$

С учетом этих замечаний из энергетического тождества (9) получим следующее неравенство:

$$E^{n+1}+\tau\tau_0\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\|^2+2\nu\tau\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\tau\tau_0\,(\delta-N)\sum_m\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2\le$$
$$\le 2\tau\left|(\vec{f},\vec{U}^{n+1})\right|+E^n,$$

где

$$E^n=\left\|\vec{U}^n\right\|^2+\frac{\tau}{\tau_0}\|p^n\|^2+\tau\tau_0\delta\sum_m\left\|U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2.$$

Отсюда легко получится неравенство

$$E^{n+1}+\tau\tau_0\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\|^2+2\nu\tau(1-\varepsilon)\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\tau\tau_0\,(\delta-N)\sum_m\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2\le$$
$$\le E^n+\frac{\tau}{2\varepsilon\nu}\left\|\vec{f}\right\|_{(-2_h)},$$

справедливое при $\forall\,\varepsilon>0$, где

$$\left\|\vec{f}\right\|_{(-2_h)}=\sup_{\forall\varphi\ne0}\frac{|(f,\vec{\varphi})|}{\|\nabla_h\vec{\varphi}\|}.$$

Выбирая $\varepsilon,\ \delta$, удовлетворяющие неравенствам

$$1-\varepsilon\ge\varepsilon_0>0,\quad \delta-N\ge\delta_0>0,$$

окончательно получаем следующую оценку ограниченности итерации (5)–(7):

$$E^{n+1}+\tau\tau_0\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\|^2+2\nu\tau\varepsilon_0\left\|\nabla_h\vec{U}^{n+1}\right\|^2+\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n\right\|^2+$$
$$+\tau\tau_0\delta_0\sum_m\left\|U^{n+1}_{m,\bar{x}_m}-U^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2\le E^n+\frac{\tau}{2\varepsilon\nu}\left\|\vec{f}\right\|_{(-2_h)}. \qquad (10)$$

Заметим, что в случае отсутствия источников ($\vec{f}=0$) из неравенства (10) следует, что $\{E^n,\,n=0,1,...\}$ является монотонно невозрастающей числовой последовательностью и имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}E^n=E^*\le E^0<\infty.$$

Следовательно, рассматривая неравенство (10) при $n\to\infty$, убеждаемся в том, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\|=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\nabla_h\vec{U}^n\right\|=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\vec{U}^{n+1}-\vec{U}^n\right\|=0,$$

т. е. при любом задании начальных значений $\vec{U}^0$, p^0 итерации при $n \to \infty$ сходятся к нулевому решению. В линейном случае из оценки неравенства (10) также следует сходимость итераций (5)–(7) к решению соответствующей стационарной задачи Стокса.

Исследуем скорость сходимости итерационного алгоритма (5)–(7) в случае линейной задачи Стокса. Тогда разностное соотношение для погрешности решения будет иметь вид

$$\frac{z_m^{n+1} - z_m^n}{\tau} + (\pi^n - \tau_0 \underline{\mathrm{div}}_h \vec{z}^n)_{x_m} = \nu \Delta_h z_m^{n+1} + \tau_0 \delta (z_m^{n+1} - z_m^n)_{x_m \bar{x}_m}, \tag{11}$$

$$\frac{\pi^{n+1} - \pi^n}{\tau} + \underline{\mathrm{div}}_h \vec{z}^{n+1} = 0, \tag{12}$$

где

$$\vec{z}_m^n(x) = U_m^n(x) - U_m(x), \quad x \in D_{h,m},$$
$$\pi^n = p^n - p(x), \quad x \in D_h.$$

Для задачи (11), (12) поступаем, как и в случае получения априорной оценки (10). Можно показать справедливость следующего неравенства:

$$\begin{gathered} \|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0 \|\underline{\mathrm{div}}_h \vec{z}^n\|^2 + 2\nu\tau \|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\|^2 + \|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\|^2 + \\ + \tau\tau_0 (\delta - N) \sum_m \left\| z_{m,\bar{x}_m}^{n+1} - z_{m,\bar{x}_m}^n \right\|^2 + \tau\tau_0 \delta \sum_m \left\| z_{m,\bar{x}_m}^{n+1} \right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|p^{n+1}\|^2 \le \\ \le \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0} \|p^n\|^2 + \tau\tau_0 \delta \sum_m \left\| z_{m,\bar{x}_m}^n \right\|^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Далее воспользуемся “inf-sup” неравенством [4]

$$c_0 \|p\|_{L_2(D_h)} \le \sup_{\forall\, v \ne 0} \frac{|(p, \underline{\mathrm{div}}_h \vec{v})|}{\|\nabla \vec{v}\|}, \tag{14}$$

которое справедливо при $\forall p \in L_2(D_h)$, удовлетворяющем дополнительному условию

$$\sum_{D_h} p(x) = 0.$$

Как и в работе [5], оценим норму $\|\pi^n\|$ из уравнения (11). Умножая обе части (11) скалярно в $\mathrm{Ł}_2$ на $\vec{\varphi}$, где $\vec{\varphi} \in \overset{0}{W}{}_2^1$, получим

$$\begin{gathered} (\pi^n, \underline{\mathrm{div}}_h \vec{\varphi}) = \tau_0 (\underline{\mathrm{div}}_h \vec{z}^n, \underline{\mathrm{div}}_h \vec{\varphi}) + \nu (\nabla_h \vec{z}^{n+1}, \nabla \vec{\varphi}) + \\ + \tau\delta_0 \sum_m (z_{m,\bar{x}_m}^{n+1} - z_{m,\bar{x}_m}^n, \varphi_{m,\bar{x}_m}) - \frac{1}{\tau} (\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n, \vec{\varphi}). \end{gathered}$$

Поделив обе части этого соотношения на $\|\nabla \vec{\varphi}\|$ и оценивая правую часть по неравенству Коши — Буняковского, запишем

$$\tau \frac{|(\pi^n, \mathrm{div} \vec{\varphi})|}{\|\nabla \vec{\varphi}\|} \le M(\tau\tau_0 \|\mathrm{div}_h \vec{z}^n\| + \nu\tau \left\|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\right\| + \tau\tau_0 \delta \sum_m \left\| z_{m,\bar{x}_m}^{n+1} - z_{m,\bar{x}_m}^n \right\| + \left\|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\right\|),$$

где $M < \infty$ — положительная константа, которая не зависит от итерационных параметров и шагов пространственной сетки. Отсюда с учетом неравенства (14) получим

$$\tau^2 c_0^2 \|\pi\|^2 \le \overline{M} (\left\|\vec{z}^{n+1} - \vec{z}^n\right\|^2 + \tau\tau_0 \|\mathrm{div}_h \vec{z}^n\| + \nu\tau \left\|\nabla_h \vec{z}^{n+1}\right\|^2 + \tau\tau_0 \delta \sum_m \left\| z_{m,\bar{x}_m}^{n+1} - z_{m,\bar{x}_m}^n \right\|^2),$$

где $\overline{M} = M^2(1 + \tau\tau_0 + \nu\tau + \tau\tau_0\delta N)$.

Умножая последнее неравенство на $\beta > 0$ и складывая с неравенством (13), получим

$$\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0(1-\beta\overline{M})\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{z}^n\|^2 + (1-\beta\overline{M})\|\vec{z}^{n+1}-\vec{z}^n\|^2 + (2-\beta\overline{M})\nu\tau\|\nabla_h\vec{z}^{n+1}\|^2 +$$
$$+\tau\tau_0\left(\delta - N - \beta\delta\overline{M}\right)\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m} - z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}\|p^{n+1}\|^2 \le$$
$$\le \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}(1-\tau\tau_0c_0^2)\|p^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2. \tag{15}$$

Далее воспользуемся неравенствами

$$d_1\left\|\vec{z}^{n+1}\right\| \le \left\|\nabla_h\vec{z}^{n+1}\right\|, \quad \sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\| \le \left\|\nabla_h\vec{z}^{n+1}\right\|,$$

где $0 < d_1 < \infty$ — равномерно ограниченная, не зависящая от параметров итерации и шагов пространственной сетки константа. С учетом этих замечаний из (15) можем получить

$$(1+\tau\nu\varepsilon_1 d_1)\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + (1-\beta\overline{M})(\|\vec{z}^{n+1}-\vec{z}^n\|^2 + \tau\tau_0\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{z}^n\|^2) +$$
$$+(\tau\tau_0\delta + \nu\tau\varepsilon_2)\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + (2-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\beta\overline{M})\nu\tau\|\nabla_h\vec{z}^{n+1}\|^2 +$$
$$+\frac{\tau}{\tau_0}\|p^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0\left(\delta - N - \beta\delta\overline{M}\right)\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m} - z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 \le$$
$$\le \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}(1-\tau\tau_0c_0^2)\|p^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2. \tag{16}$$

Затем выбираем $\beta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$1-\overline{M}\beta \ge 0, \quad 2-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\overline{M}\beta \ge 0, \quad \tau\tau_0(\delta - N - \delta\overline{M}\beta) \ge 0. \tag{17}$$

Тогда из неравенства (16) следует, что

$$(1+\tau\nu\varepsilon_1 d_1)\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0\delta\left(1+\frac{\nu\varepsilon_2}{\tau_0\delta}\right)\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}\|p^{n+1}\|^2 \le$$
$$\le \|\vec{z}^n\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0}(1-\tau\tau_0c_0^2)\|p^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2.$$

Обозначим $d_2 = \min\left\{1+\tau\nu\varepsilon_1 d_1,\, 1+\dfrac{\nu\varepsilon_2}{\tau_0\delta}\right\}$ и поделим обе части последнего неравенства на $d_2 > 1$:

$$\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}\|p^{n+1}\|^2 \le$$
$$\le \frac{1}{d_2}\left(\|\vec{z}^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2\right) + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}(1-\tau\tau_0c_0^2)\|p^n\|^2.$$

Обозначим $q = \max\left\{1-\tau\tau_0c_0^2,\, \dfrac{1}{d_2}\right\} < 1$, тогда имеем

$$\|\vec{z}^{n+1}\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^{n+1}_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}\|p^{n+1}\|^2 \le q\left(\|\vec{z}^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}\|p^n\|^2\right),$$

$$F^{n+1} \le qF^n, \qquad (18)$$

где $F^n = \|\vec{z}^n\|^2 + \tau\tau_0\delta\sum\limits_m \left\|z^n_{m,\bar{x}_m}\right\|^2 + \frac{\tau}{\tau_0 d_2}\|p^n\|^2$.

Таким образом, мы показали, что при выборе параметров ε_1, ε_2, β, удовлетворяющих условиям (17), итерации (5)–(7) сходятся со скоростью геометрической прогрессии и скорость сходимости не зависит от шага пространственной сетки, так как q не зависит от h.

В случае нелинейной задачи исследование сходимости итерационного алгоритма (5)–(7) накладывает ограничение на невязку, совпадающую по порядку с условием, гарантирующим существование и единственность решения исходной задачи (1)–(3).

Для сравнения с другими известными алгоритмами и иллюстрации возможностей предложенного алгоритма (5)–(7) рассмотрена задача о течении жидкости в каверне с двигающейся верхней границей для $\mathrm{Re} = 100$, $N = 2$. Для сравнения выбрана неявная разностная схема вида [6]

$$\frac{U_m^{n+1/2} - U_m^n}{\tau} + L_h\vec{U}_m^{n+1/2} + \overline{\mathrm{grad}}_h p^n = \nu\Delta_h U_m^{n+1/2} + \vec{f}; \qquad (19)$$

$$\frac{U^{n+1} - U^{n+1/2}}{\tau} + \overline{\mathrm{grad}}_h(p^{n+1} - p^n) = 0, \qquad (20)$$

$$\mathrm{div}_h\vec{U}^{n+1} = 0.$$

Решения на этапе (20) найдены с помощью введения сеточной функции тока [7]. Внутренние итерации осуществлялись по переменно-треугольному методу [8] с точностью до 10^{-10}. Итерации производились до выполнения критерия сходимости

$$\sum_m \left\|(p^n - \tau\,\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n)_{x_m} - \nu\,\Delta_h U_m^n\right\| + \left\|\underline{\mathrm{div}}_h\vec{U}^n\right\| \le 10^{-4}. \qquad (21)$$

В табл. 1 и 2 приведены значения $n_0(\varepsilon)$ — количество итераций для достижения критерия сходимости (21). Как следует из табл. 1, с уменьшением шага сетки количество итераций для алгоритма (19), (20) увеличивается. Из табл. 2 видно, что для итерационной схемы (5)–(7) с увеличением количества узлов сетки количество итераций остается практически неизменным.

Были выполнены расчеты по алгоритму (5)–(7) и для нелинейной задачи течения несжимаемой жидкости в квадратной каверне. Внутренние итерации для реализации решений разностных уравнений, имеющие вид

$$(E + \tau L_h - \nu\tau\Delta_h + \tau\tau_0\delta\Lambda_{x_m\bar{x}_m})\xi_m = g_m^n,$$

Таблица 1. Результат расчетов по схеме (19), (20)

τ	33×33	65×65	129×129
0.15	85	281	1222
0.2	88	373	1627
0.3	129	557	2438
0.35	150	650	2844

Таблица 2. Результат расчетов по схеме (5)–(7) для $\tau = 2.0$

τ_0	33×33	65×65	129×129
0.01	45	45	45
0.0125	42	43	43
0.025	42	42	43
0.03	40	43	43

где

$$g_m^n = \nu \Delta_h U_m^n + \tau_0 (\underline{\mathrm{div}}_h \vec{U}^n)_{x_m} - p_{x_m}^n + f^m, \quad \xi_m = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau},$$

производились по вариационному явному методу минимальных невязок [8]. Результаты проведенных расчетов показывают также равномерную сходимость итераций, не зависящую от шага пространственной сетки.

Список литературы

[1] Яненко Н.Н., Кузнецов Б.Б., Владимирова И. Численный расчет симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычисл. и прикл. математики. Новосибирск: Наука, 1966. С. 186–192.

[2] Бахвалов И.С. и др. Численные методы решения задач математической физики // Современные проблемы вычисл. математики и мат. моделирования. Т.1: Вычислительная математика. М.: Наука, 2005.

[3] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.

[4] Кобельков Г.М. Об эквивалентных нормированных подпространствах L2 // Analysis Mathematica. 1977. Vol. 3, N 3. P. 177–186.

[5] Кобельков Г.М. О методах решения уравнений Навье — Стокса // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 4. С. 843–846.

[6] Куттыкожаева И.Н. Об итерационном методе численного решения уравнений Стокса // Вест. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. Алматы, 2002. Т. 30, № 2. С. 87–92.

[7] Смагулов Ш., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М. Численное решение уравнений Навье — Стокса с разрывными коэффициентами. Красноярск, 1989. (Препр. АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; № 15).

[8] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 10 марта 2006 г.