ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ*

Л. Г. Чикина
*ЮГИНФО Ростовского государственного университета,
Ростов-на-Дону, Россия*
e-mail: lchikina@rsu.ru

Two approaches, namely spectral and energy methods to investigation of two-parameter iterative methods are suggested. In both cases the sufficient conditions for convergence and the expressions for optimal parameters are obtained.

Ведение

Решение несимметричных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ax = f \tag{1}$$

с матрицами бездиагонального преобладания представляет практический и теоретический интерес.

Любой оператор A можно представить в виде суммы симметричной A_0 и кососимметричной A_1 составляющих частей исходного оператора:

$$A = A_0 + A_1,$$

$$A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_0^*,$$

$$A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*) = -A_1^*.$$

Если симметричная часть оператора положительно определена, то он называется *диссипативным.*

Для решения системы (1) рассмотрим одношаговый двухслойный стационарный итерационный метод, записанный в каноническом виде [1]:

$$B\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = f, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{2}$$

с некоторым начальным вектором x_0 и вещественным итерационным параметром $\tau > 0$. Будем считать, что A и B — невырожденные линейные операторы, действующие в конечномерном гильбертовом пространстве H. Точность итерационного метода (2) характеризуется вектором погрешности $z_k = x_k - x$, где x — точное решение системы (1). Для

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-01-00038-а, № 05-01-00096-а).

исследования итерационного метода (2) рассмотрим однородное уравнение для векторов погрешностей

$$B\frac{z_{k+1}-z_k}{\tau}+Az_k=0,\quad k=0,\,1,\,2,\ldots,\quad z_0=x_0-x,$$

или в разрешенной относительно z_{k+1} форме $z_{k+1}=Gz_k$, где

$$G=B^{-1}(B-\tau A)$$

— оператор перехода итерационного метода (2).

Если оператор перехода $G=G\,(\tau)$ зависит от одного итерационного параметра τ, то метод (2) будем считать *однопараметрическим* итерационным методом, если же $G=G(\tau,\omega)$ зависит не только от параметра τ, но и от некоторого второго параметра ω, то — *двухпараметрическим.*

Для получения условий сходимости итерационного метода (2) надо исследовать его оператор перехода и оценить его спектр $\rho\,(G)=\max\limits_k|\lambda_k\,(G)|<1$ или норму $\|G\|<1$ [2].

Представим в (1) матрицу A в виде разложения

$$A=\frac{2}{\omega}B-\frac{2}{\omega}N, \tag{3}$$

где N и B — невырожденные линейные операторы, действующие в конечномерном гильбертовом пространстве H; $\omega>0$ — второй итерационный параметр.

Рассмотрим двухпараметрический итерационный метод, записанный в канонической форме (2), в котором оператор метода B получен из разложения (3) и зависит от второго параметра ω:

$$B\,(\omega)=N+0.5\omega A,$$

а итерационные параметры ω и τ — пока произвольные положительные числа. Оператор перехода двухпараметрического итерационного метода (2), (3) имеет вид

$$G\,(\tau,\omega)=(N+0.5\omega A)^{-1}\,(N+0.5\omega A-\tau A)\,. \tag{4}$$

Сделаем в (4) следующие тождественные преобразования:

$$G\,(\tau,\omega)=\left(E+0.5\omega N^{-1}A\right)^{-1}\left(E+(0.5\omega-\tau)\,N^{-1}A\right).$$

Таким образом, оператор перехода двухпараметрического итерационного метода представили в виде

$$G\,(\tau,\omega)=(E+0.5\omega F)^{-1}\,(E+(0.5\omega-\tau)\,F)\,, \tag{5}$$

где $F=N^{-1}A$.

1. Спектральный подход исследования

1.1. Условия сходимости

Докажем критерий сходимости итерационного метода (2), (3) решения системы (1) пока без каких-либо ограничений на свойства невырожденных операторов системы и метода.

Пусть $\lambda_k(F)$ — собственные числа оператора F. Найдем связь между собственными числами оператора перехода (5) и оператора F, используя определение собственных чисел и коммутативность операторов $(E+0.5\omega F)^{-1}$ и $(E+(0.5\omega-\tau)F)$:

$$\lambda_k(G(\tau,\omega)) = \frac{1+(0.5\omega-\tau)\lambda_k(F)}{1+0.5\omega\lambda_k(F)}.$$

Запишем квадрат модуля собственных чисел для оператора перехода (5) через действительные $\mathrm{Re}\lambda_k(F)$ и мнимые $\mathrm{Im}\lambda_k(F)$ части собственных чисел оператора F:

$$|\lambda_k(G(\tau,\omega))|^2 = \left|\frac{1+(0.5\omega-\tau)\,\mathrm{Re}\lambda_k(F)+i\,(0.5\omega-\tau)\,\mathrm{Im}\lambda_k(F)}{1+0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F)+i0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F)}\right|^2.$$

Используя правила вычисления модуля комплексного числа и опуская выкладки, получим, что для сходимости итерационного метода необходимо и достаточно ограничения на спектр его оператора перехода в виде

$$|\lambda_k(G(\tau,\omega))|^2 = \frac{(1+(0.5\omega-\tau)\,\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+((0.5\omega-\tau)\,\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2}{(1+0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2} < 1. \tag{6}$$

Теорема 1 (критерий сходимости двухпараметрического итерационного метода). *Для сходимости двухпараметрического итерационного метода (2), (3) необходимо и достаточно выполнение условий*

$$0 < \tau < \omega + \mathrm{Re}\lambda_k\left(F^{-1}\right), \tag{7}$$

где $F = N^{-1}A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для оператора перехода (5) выполнено условие (6), которое эквивалентно неравенству

$$|\lambda_k(G(\tau,\omega))|^2 = 1-\tau\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k(F)-(\tau-\omega)\left((\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2\right)}{(1+0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2} < 1,$$

отсюда следует, что

$$\tau\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k(F)-(\tau-\omega)\left((\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2\right)}{(1+0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2} > 0. \tag{8}$$

Так как итерационный параметр $\tau > 0$ и знаменатель

$$(1+0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2 > 0,$$

получаем, что неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$2\mathrm{Re}\lambda_k(F)-(\tau-\omega)\left((\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2\right) > 0.$$

Разрешая это неравенство относительно положительного итерационного параметра $\tau > 0$, имеем

$$0 < \tau < \omega + 2\frac{\mathrm{Re}\lambda_k(F)}{(\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2}.$$

А так как

$$\frac{\mathrm{Re}\lambda_k(F)}{(\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2+(\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2} = \mathrm{Re}\lambda_k\left(F^{-1}\right),$$

имеет место неравенство (7).

Достаточность. Преобразуем неравенство (7)

$$\begin{cases} \tau > 0, \\ 0 < \omega - \tau + \dfrac{2\mathrm{Re}\lambda_k(F)}{(\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2}. \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство системы. Умножим его на положительное выражение $\tau\left((\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2 + (\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2\right) > 0$ и разделим на положительное выражение

$$(1 + 0.5\omega\mathrm{Re}\lambda_k(F))^2 + (0.5\omega\mathrm{Im}\lambda_k(F))^2.$$

После этого получим неравенство (8), к которому после умножения на -1 добавим с обеих сторон по единице и в итоге получим выражение (6). $\square$

Следствие 1. *Если спектр оператора $F = N^{-1}A$ лежит в правой полуплоскости, то для сходимости двухпараметрического итерационного метода (2), (3) достаточно, чтобы*

$$0 < \tau \leq \omega. \tag{9}$$

Доказательство. Если спектр оператора F лежит в правой полуплоскости, то и спектр оператора F^{-1} лежит в правой полуплоскости и $\mathrm{Re}\lambda_k(F^{-1}) > 0$. $\square$

Утверждение 1. *Если один из операторов A или B диссипативен, а другой положительно определен, то спектр оператора AB расположен в правой полуплоскости* [3].

Утверждение 2. *Спектр диссипативного оператора расположен в правой полуплоскости.*

Это утверждение является следствием теоремы Хирша. Доказательство утверждения 2 основано на том, что спектр оператора A лежит в прямоугольнике с вершинами $(\lambda_{\min}(A_0), i\lambda_{\min}(A_1))$, $(\lambda_{\min}(A_0), i\lambda_{\max}(A_1))$, $(\lambda_{\max}(A_0), i\lambda_{\min}(A_1))$, $(\lambda_{\max}(A_0), i\lambda_{\max}(A_1))$ [4].

Замечание 1. В общем случае обратное утверждение для утверждения 2 не верно. Из того, что спектр оператора A лежит в правой полуплоскости, не следует диссипативность оператора A.

Следствие 2. *Если один из операторов в операторе $F = N^{-1}A$ диссипативен, а другой — положительно определен, то для сходимости итерационного метода (2), (3) достаточно ограничения (9) на итерационные параметры.*

Доказательство. По утверждению 1 имеет место следующая сводная схема для оператора $F = N^{-1}A$:

$$\boxed{\begin{cases} A = A^* > 0, \\ N_0 > 0. \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{Re}\lambda_k(N^{-1}A) > 0} \quad \Leftarrow \quad \boxed{\begin{cases} N = N^* > 0, \\ A_0 > 0. \end{cases}}$$

Неравенства $0 < \tau \leq \omega$ получаются из утверждения 1 и следствия 1. $\square$

Следствие 3. *При значении $\omega = \tau$ для сходимости однопараметрического итерационного метода (2), (3) необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора $F = N^{-1}A$ лежал в правой полуплоскости.*

Доказательство. Двойное неравенство (7) эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} \tau > 0, \\ 0 < \omega - \tau + \mathrm{Re}\lambda_k(F^{-1}). \end{cases}$$

При условии, что $\omega = \tau$, имеем

$$\begin{cases} \tau > 0, \\ \mathrm{Re}\lambda_k\left(F^{-1}\right) > 0. \end{cases}$$

□

Следствие 4. *Для сходимости итерационного метода (2), (3) при значении $\omega = \tau$ достаточно, чтобы один из операторов в операторе $F = N^{-1}A$ был диссипативен, а другой — положительно определен.*

1.2. Нахождение оптимального параметра (спектральный подход)

При оптимизации двухпараметрического итерационного метода (2), (3) будем предполагать, что спектр оператора $F = N^{-1}A$ лежит в правой полуплоскости, т. е. для сходимости достаточно выполнения неравенства (9).

Исследуем квадрат модуля спектра оператора перехода

$$\left|\lambda_k\left(G\left(\tau,\omega\right)\right)\right|^2 = 1 - \tau\frac{2\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + \left(\omega-\tau\right)\left|\lambda_k\left(F\right)\right|^2}{1 + \omega\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + 0.25\omega^2\left|\lambda_k\left(F\right)\right|^2}, \tag{10}$$

предполагая, что для оператора $F = N^{-1}A$ выполняются неравенства

$$0 < m_\lambda\gamma_1 \le \mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)m_\lambda \le \left|\lambda_k\left(F\right)\right|^2 \le M_\lambda\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) \le M_\lambda\gamma_2. \tag{11}$$

Оценим $\left|\lambda_k\left(G\left(\tau,\omega\right)\right)\right|^2$, используя неравенства (11). Знаменатель в (10)

$$1 + \omega\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + 0.25\omega^2\left|\lambda_k\left(F\right)\right|^2 \le 1 + \omega\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + 0.25\omega^2 M_\lambda\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right).$$

Числитель в дроби из (10) при условии (11)

$$2\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + \left(\omega-\tau\right)\left|\lambda_k\left(F\right)\right|^2 \ge 2\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) + \left(\omega-\tau\right)m_\lambda\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right).$$

Тогда

$$\left|\lambda_k\left(G\left(\tau,\omega\right)\right)\right|^2 \le 1 - \tau\frac{\left(2 + \left(\omega-\tau\right)m_\lambda\right)\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)}{1 + \left(\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda\right)\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)}.$$

Функция

$$g_\lambda\left(\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)\right) = \tau\left(2 + \left(\omega-\tau\right)m_\lambda\right)\frac{\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)}{1 + \left(\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda\right)\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right)}$$

положительного аргумента $\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) > 0$ монотонно возрастает при положительных коэффициентах $\tau > 0$, $2 + \left(\omega-\tau\right)m_\lambda > 0$, $\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda > 0$, удовлетворяющих достаточным условиям сходимости двухпараметрического итерационного метода (2), (3). Поэтому меньшему значению аргумента $\mathrm{Re}\lambda_k\left(F\right) \ge \gamma_1 > 0$ из (11) соответствует меньшее значение функции

$$\left|\lambda_k\left(G\left(\tau,\omega\right)\right)\right|^2 \le 1 - \gamma_1\frac{\tau\left(2 + \left(\omega-\tau\right)m_\lambda\right)}{1 + \left(\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda\right)\gamma_1}.$$

С целью приближенной оптимизации итерационного метода надо минимизировать функцию двух переменных — правую часть оценки $|\lambda_k(G(\tau,\omega))|^2$:

$$f_\lambda(\tau,\omega) = 1 - \gamma_1 \frac{\tau\,(2 + (\omega - \tau)\,m_\lambda)}{1 + (\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda)\,\gamma_1}. \tag{12}$$

Теперь наша цель — найти

$$\min_{\tau,\omega}\left(1 - \gamma_1 \frac{\tau\,(2 + (\omega - \tau)\,m_\lambda)}{1 + (\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda)\,\gamma_1}\right).$$

Исследуем функцию $f_\lambda(\tau,\omega)$ на локальный экстремум. Для нахождения критических точек функции $f_\lambda(\tau,\omega)$ надо найти первые частные производные и решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda(\tau,\omega)}{\partial \tau} = \gamma_1 \dfrac{2\tau m_\lambda - \omega m_\lambda - 2}{1 + \omega\gamma_1 + 0.25\omega^2 M_\lambda \gamma_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f_\lambda(\tau,\omega)}{\partial \omega} = \gamma_1 \tau \dfrac{0.25\omega^2 M_\lambda m_\lambda \gamma_1 - \tau m_\lambda \gamma_1 (1 + 0.5\omega M_\lambda) + \omega M_\lambda \gamma_1 + 2\gamma_1 - m_\lambda}{(1 + \omega\gamma_1 + 0.25\omega^2 M_\lambda \gamma_1)^2} = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\tau m_\lambda - \omega m_\lambda - 2 = 0, \\ \tau = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\tau m_\lambda - \omega m_\lambda - 2 = 0, \\ 0.25\omega^2 M_\lambda m_\lambda \gamma_1 - \tau m_\lambda \gamma_1 (1 + 0.5\omega M_\lambda) + \omega M_\lambda \gamma_1 + 2\gamma_1 - m_\lambda = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение первой системы совокупности не подлежит исследованию, так как по определению итерационного метода $\tau \neq 0$. Для решения второй системы рассматриваемой совокупности подставим значение

$$\tau_0 = 0.5\omega + \frac{1}{m_\lambda},$$

полученное из первого уравнения системы, во второе равенство и запишем уравнение $\omega\gamma_1\,(M_\lambda - m_\lambda) + 2\,(\gamma_1 - m_\lambda) = 0$, решением которого является

$$\omega_0 = \frac{2\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - m_\lambda)\,\gamma_1}.$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \tau_0 = \dfrac{1}{m_\lambda} + \dfrac{(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - m)\,\gamma_1}, \\ \omega_0 = \dfrac{2\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - m_\lambda)\,\gamma_1}, \\ m_\lambda - \gamma_1 > 0. \end{cases}$$

Условие $m_\lambda - \gamma_1 > 0$ обеспечивает положительность параметра ω_0 и принадлежность τ_0 интервалу сходимости. Если оператор F симметричен, то (τ_0, ω_0) не является критической точкой функции $f_\lambda(\tau,\omega)$, так как при этом $m_\lambda = \gamma_1$ и $\omega_0 = 0$, т. е. нарушается предположение, что $\omega > 0$.

Пусть оператор F несимметричен. Для того чтобы выяснить, является ли критическая точка (τ_0, ω_0) точкой экстремума, необходимо определить знак выражения

$$(f_\lambda)''_{\tau^2}(\tau_0,\omega_0)\,(f_\lambda)''_{\omega^2}(\tau_0,\omega_0) - \Big((f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega_0)\Big)^2.$$

Вычислим вторые производные:

$$(f_\lambda)''_{\tau^2}(\tau,\omega) = \frac{2\gamma_1 m_\lambda}{1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1},$$

$$(f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau,\omega) = -\gamma_1\frac{(m_\lambda+0.25m_\lambda M_\lambda\omega^2\gamma_1-2\tau m_\lambda\gamma_1-\tau\omega m_\lambda M_\lambda\gamma_1+2\gamma_1+\omega M_\lambda\gamma_1)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^2},$$

$$(f_\lambda)''_{\omega^2}(\tau,\omega) = \frac{\tau\gamma_1^2}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^3}\times$$

$$\times\left(3\omega m_\lambda M_\lambda - 0.25\omega^3 m_\lambda M_\lambda^2\gamma_1 - \tau m_\lambda M_\lambda + 3\tau\omega m_\lambda M_\lambda\gamma_1 + 2M_\lambda - \right.$$

$$\left. -6\omega M_\lambda\gamma_1 - 1,5\omega^2 M_\lambda^2\gamma_1 + 4\tau m_\lambda\gamma_1 - 8\gamma_1 + 4m_\lambda + 0,75\tau\omega^2 m_\lambda M_\lambda^2\gamma_1\right).$$

Подставим критическую точку (τ_0, ω_0), где

$$\tau_0 = \frac{0.5\omega m_\lambda + 1}{m_\lambda}, \quad \omega_0 = \frac{2(m_\lambda-\gamma_1)}{(M_\lambda-m_\lambda)\gamma_1},$$

в получившиеся выражения для вторых производных.

Для этого вычислим

$$(f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega) = -\gamma_1 m_\lambda\frac{(0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1+\omega\gamma_1+1)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^2},$$

$$\Big((f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega)\Big)^2 = \frac{\gamma_1^2}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}\times$$

$$\times\left(0,0625\omega^4 m_\lambda^2 M_\lambda^2\gamma_1^2 + 0.5\omega^3 m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1^2 + 0.25\omega^2\left(2m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1 + 4m_\lambda^2\gamma_1^2\right) + 2\omega m_\lambda^2\gamma_1 + m_\lambda^2\right),$$

$$(f_\lambda)''_{\omega^2}(\tau_0,\omega) = \frac{2\gamma_1}{m_\lambda}\frac{0,0625\omega^4 m_\lambda^2 M_\lambda^2\gamma_1^2 + 0,125\omega^3\left(6m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1^2 - 2m_\lambda M_\lambda^2\gamma_1^2\right)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}+$$

$$+\frac{2\gamma_1}{m_\lambda}\frac{0.25\omega^2\left(5m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1 + 4m_\lambda^2\gamma_1^2 - 3M_\lambda^2\gamma_1^2\right)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}+$$

$$+\frac{2\gamma_1}{m_\lambda}\frac{0.5\omega\left(6m_\lambda M_\lambda\gamma_1 + 4m_\lambda^2\gamma_1 - 6M_\lambda\gamma_1^2\right) + M_\lambda\gamma_1 - 4\gamma_1^2 + 4m_\lambda\gamma_1}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}.$$

Далее определим

$$(f_\lambda)''_{\omega^2}(\tau_0,\omega)\,(f_\lambda)''_{\tau^2}(\tau_0,\omega) - \Big((f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega)\Big)^2 =$$

$$= \gamma_1^2\frac{0,125\omega^3\left(2m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1^2 - 2m_\lambda M_\lambda^2\gamma_1^2\right) + 0.25\omega^2\left(3m_\lambda^2 M_\lambda\gamma_1 - 3M_\lambda^2\gamma_1^2\right)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}+$$

$$+\gamma_1^2\frac{0.5\omega\left(6m_\lambda M_\lambda\gamma_1 - 6M_\lambda\gamma_1^2\right) + \left(M_\lambda\gamma_1 - m_\lambda^2 - 4\gamma_1^2 + 4m_\lambda\gamma_1\right)}{(1+\omega\gamma_1+0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}.$$

В получившееся выражение подставим $\omega_0 = \dfrac{2\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - m_\lambda)\,\gamma_1}$. Приведем подобные и сгруппируем

$$(f_\lambda)''_{\omega^2}(\tau_0,\omega_0)\,(f_\lambda)''_{\tau^2}(\tau_0,\omega_0) - \Big((f_\lambda)''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega_0)\Big)^2 = \frac{\gamma_1^2\,(M_\lambda - \gamma_1)\,((M_\lambda - 2m_\lambda)\,\gamma_1 + m_\lambda^2)^2}{(1 + \omega\gamma_1 + 0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4}.$$

Согласно предположению (11) $\gamma_1 m_\lambda > 0$, поэтому

$$(f_\lambda)''_{\tau^2}(\tau,\omega) = \frac{2\gamma_1 m_\lambda}{1 + \omega\gamma_1 + 0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1} > 0,$$

и для того чтобы в точке (τ_0,ω_0) был минимум, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $f''_{\omega^2}(\tau_0,\omega_0)\,f''_{\tau^2}(\tau_0,\omega_0) - (f''_{\tau\omega}(\tau_0,\omega_0))^2 > 0$, т. е.

$$\frac{\gamma_1^2\,(M_\lambda - \gamma_1)\,((M_\lambda - 2m_\lambda)\,\gamma_1 + m_\lambda^2)^2}{(1 + \omega\gamma_1 + 0.25\omega^2 M_\lambda\gamma_1)^4} > 0.$$

Это неравенство будет выполняться, если $M_\lambda > \gamma_1$. По предположению (11) у нас $m_\lambda > \gamma_1$, а так как $M_\lambda > m_\lambda$, то $M_\lambda > \gamma_1$.

Вычислим значение

$$\rho_1 = f_\lambda(\tau_0,\omega_0) = 1 - \tau_0\frac{(2 + m_\lambda(\omega_0 - \tau_0))\,\gamma_1}{1 + (\omega_0 + 0.25M_\lambda\omega_0^2)\,\gamma_1},$$

где

$$\tau_0 = 0.5\omega_0 + \frac{1}{m_\lambda}, \quad \omega_0 = \frac{2\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - m_\lambda)\,\gamma_1}.$$

После простых преобразований запишем

$$\rho_1 = f_\lambda(\tau_0,\omega_0) = \frac{(M_\lambda - m_\lambda)\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - \gamma_1)\,m_\lambda}.$$

Теорема 2. *Пусть спектр оператора $F = N^{-1}A$ лежит в правой полуплоскости, выполнено условие (11) и $m_\lambda > \gamma_1$. Тогда двухпараметрический итерационный метод (2), (3) сходится и оптимальные параметры определяются по формулам*

$$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{m_\lambda(\omega_0) - \gamma_1(\omega_0)}{(M_\lambda(\omega_0) - m_\lambda(\omega_0))\,\gamma_1(\omega_0)}, \\ \tau_0 = 0.5\omega_0 + \dfrac{1}{m_\lambda(\omega_0)}. \end{cases}$$

Для погрешности справедлива оценка

$$\left\|x^k - x\right\| \le \rho_1^k \left\|x^0 - x\right\|, \quad k = 0,\,1,\,\ldots\,,$$

где $\rho_1 = \dfrac{(M_\lambda - m_\lambda)\,(m_\lambda - \gamma_1)}{(M_\lambda - \gamma_1)\,m_\lambda}$.

Докажем теорему оптимизации для однопараметрического итерационного метода (2), (3).

Теорема 3. *Пусть спектр оператора $F = N^{-1}A$ лежит в правой полуплоскости, выполнено условие (11) и $\omega = \tau$. Тогда однопараметрический итерационный метод (2), (3) сходится и оптимальный параметр находится из формулы*

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma_1\left(\tau_{\text{opt}}\right) M_\lambda\left(\tau_{\text{opt}}\right)}},$$

а для погрешности справедлива оценка

$$\left\|x^k - x\right\| \le \rho_2^k \left\|x^0 - x\right\|, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,$$

где

$$\rho_2 = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{M_\lambda}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{M_\lambda}}}.$$

Здесь M_λ, γ_1 удовлетворяют условию (11) и $\gamma_1 < M_\lambda$.

Число итераций, достаточных для достижения заданной точности ε, оценивается числом

$$n(\varepsilon) = \frac{\ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{\rho_2}\right)}.$$

Доказательство. С целью нахождения оптимального итерационного параметра метода, необходимо в функцию (12) подставить

$$f_\lambda\left(\tau, \omega\right) = 1 - \gamma_1 \frac{\tau\left(2 + \left(\omega - \tau\right) m_\lambda\right)}{1 + \left(\omega + 0.25\omega^2 M_\lambda\right)\gamma_1},$$

$\omega = \tau$, и исследовать на экстремум функцию одного переменного

$$f_2\left(\tau\right) = 1 - \gamma_1 \frac{2\tau}{1 + \left(\tau + 0.25 M_\lambda \tau^2\right)\gamma_1},$$

которая оценивает квадрат модуля спектра оператора перехода (10).

Поскольку $f_2\left(0\right) = f_2\left(+\infty\right) = 1$, а при $\tau \in (0, +\infty)$ функция бесконечно дифференцируема и $0 \le f_2\left(\tau\right) < 1$, то значение $\tau = \tau_{\text{opt}}$, минимизирующее $f_2\left(\tau\right)$, является решением уравнения

$$f_2'\left(\tau\right) = -2\gamma_1 \frac{1 - 0.25 M \gamma_1 \tau^2}{\left(1 + \left(\tau + 0.25 M_\lambda \tau^2\right)\gamma_1\right)^2} = 0,$$

откуда

$$1 - 0.25\gamma_1 M_\lambda \tau^2 = 0 \Rightarrow \tau^2 = \frac{4}{\gamma_1 M_\lambda}.$$

Так как по условию итерационный параметр $\tau > 0$, получаем

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma_1 M_\lambda}}.$$

Оптимальный параметр τ_{opt} минимизирует величину

$$f_2(\tau) = 1 - \gamma_1 \frac{2\tau}{1 + (\tau + 0.25M_\lambda \tau^2)\gamma_1}.$$

Вычислим значения $f_2(\tau_{\text{opt}})$:

$$\rho_2 = f_2(\tau_{\text{opt}}) = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{M_\lambda}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{M_\lambda}}}, \quad \gamma_1 < M_\lambda.$$

Итак, спектр оператора перехода (5) мы оценили функцией $f_2(\tau)$ и нашли ее минимальное значение ρ_2:

$$|\lambda_k(G(\tau,\omega))|^2 < \rho_2 = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{M_\lambda}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\gamma_1}{M_\lambda}}}.$$

□

Покажем на примере метода простой итерации

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau} + Ax_k = f, \quad k = 0,\, 1,\, 2, ...,$$

что такая методика для симметричной положительно определенной матрицы A имеет место. Достаточное условие сходимости метода простой итерации имеет вид $E - 0.5\tau A > 0$ [1].

В операторе $F_P = N^{-1}A = (E - 0.5\tau A)^{-1} A$ для метода простой итерации операторы $N^{-1} = (E - 0.5\tau A)^{-1}$ и A симметричны, положительно определены и коммутативны. Поэтому спектр оператора F_P действителен и положительно определен [5].

Так как $F_P = F_P^T > 0$, то в (11) $M_\lambda = \lambda_{\max}(F_P)$, $\gamma_1 = \lambda_{\min}(F_P)$.

Запишем функцию собственных чисел оператора F_P через собственные числа оператора A

$$\lambda_k(F_P) = \lambda_k\left((E - 0.5\tau A)^{-1} A\right) = \frac{\lambda_k(A)}{1 - 0.5\tau\lambda_k(A)}.$$

Функция $\lambda_k(F_P)$ является возрастающей относительно $\lambda_k(A)$, поэтому

$$\lambda_{\min}(F_P) = \frac{\lambda_{\min}(A)}{1 - 0.5\tau\lambda_{\min}(A)} = \gamma_1, \lambda_{\max}(F_P) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{1 - 0.5\tau\lambda_{\max}(A)} = M_\lambda. \tag{13}$$

Найдем τ_{opt} из выражения

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\sqrt{\gamma_1(\tau_{\text{opt}})\, M_\lambda(\tau_{\text{opt}})}}.$$

С учетом (13) получаем

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2\sqrt{(1 - 0.5\tau_{\text{opt}}\lambda_{\min}(A))\,(1 - 0.5\tau_{\text{opt}}\lambda_{\max}(A))}}{\sqrt{\lambda_{\min}(A)\,\lambda_{\max}(A)}}$$

или

$$\tau_{\text{opt}}^2 \lambda_{\min}(A)\,\lambda_{\max}(A) = 4\,(1 - 0.5\tau_{\text{opt}}\lambda_{\min}(A))\,(1 - 0.5\tau_{\text{opt}}\lambda_{\max}(A))\,.$$

Откуда $\tau_{\text{opt}} = \dfrac{2}{\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A)}$, что является известным результатом для метода простой итерации.

2. Энергетический подход исследования

2.1. Условия сходимости

Для сходимости итерационного метода достаточно [1], чтобы норма оператора перехода (5) была меньше единицы:

$$\|G(\tau,\omega)\| = \left\|(E+0.5\omega F)^{-1}(E+(0.5\omega-\tau)F)\right\| < 1, \tag{14}$$

где $F = N^{-1}A$.

Докажем лемму, которая является некоторым обобщением леммы Келлога и основной для оценки (14).

Рассмотрим оператор $T = (E+\alpha A)^{-1}(E-\beta A)$.

Лемма 1 [6]. *Пусть A — невырожденный оператор и α,β — действительные числа, причем $\alpha \geq 0$ и $\alpha+\beta \geq 0$. Тогда условие*

$$-\alpha \leq \beta \leq \alpha + 2\lambda_{\min}\left(A^{-1}\right)_0, \tag{15}$$

где $\left(A^{-1}\right)_0 = \dfrac{A^{-1}+A^{-T}}{2}$ *является достаточным для выполнения оценки*

$$\left\|(E+\alpha A)^{-1}(E-\beta A)\right\| \leq 1. \tag{16}$$

Доказательство. Оценим норму оператора

$$T = (E+\alpha A)^{-1}(E-\beta A).$$

По определению нормы

$$\|T\|^2 = \sup_{v\neq 0}\frac{\|Tv\|^2}{\|v\|^2} = \sup_{v\neq 0}\frac{\left((E+\alpha A)^{-1}(E-\beta A)v,(E+\alpha A)^{-1}(E-\beta A)v\right)}{(v,v)}.$$

Так как операторы $(E+\alpha A)^{-1}$ и $(E+\beta A)$ коммутативны,

$$\|T\|^2 = \sup_{v\neq 0}\frac{\left((E-\beta A)(E+\alpha A)^{-1}v,(E-\beta A)(E+\alpha A)^{-1}v\right)}{(v,v)}.$$

Пусть $x = (E+\alpha A)^{-1}v$, тогда для выражения

$$\|T\|^2 = \sup_{x\neq 0}\frac{((E-\beta A)x,(E-\beta A)x)}{((E+\alpha A)x,(E+\alpha A)x)}$$

возможны следующие преобразования:

$$\|T\|^2 = 1 - \inf_{x\neq 0}(\alpha+\beta)\frac{2\,(Ax,x)+(\alpha-\beta)(Ax,Ax)}{(x,x)+2\alpha\,(Ax,x)+\alpha^2(Ax,Ax)}.$$

Условие

$$R = (\alpha+\beta)\frac{2\,(Ax,x)+(\alpha-\beta)(Ax,Ax)}{(x,x)+2\alpha\,(Ax,x)+\alpha^2(Ax,Ax)} \geq 0$$

является достаточным для выполнения оценки (16) в силу того, что при $R \geq 0$ выполняются неравенства $0 < \|T\|^2 \leq 1 - \inf\limits_{x \neq 0} R \leq 1$. Так как предполагается, что существует $(E + \alpha A)^{-1}$, в выражении R знаменатель $((E + \alpha A)\, x, (E + \alpha A)\, x) = (x, x) + 2\alpha\, (Ax, x) + \alpha^2\, (Ax, Ax) > 0$ для всех $x \neq 0$ и $\alpha \geq 0$.

В выражении R сумма $\alpha + \beta \geq 0$, поэтому достаточно рассмотреть всевозможные соотношения параметров α и β, обеспечивающие неотрицательность выражения $2\,(Ax, x) + (\alpha - \beta)\,(Ax, Ax)$.

Так как оператор A невырожден, $(Ax, Ax) > 0$, последнее выражение можно разделить на (Ax, Ax) и преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha + \beta \geq 0, \\ 2\dfrac{(Ax, x)}{(Ax, Ax)} + (\alpha - \beta) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta \geq -\alpha, \\ \beta \leq \alpha + 2 \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{(Ax, x)}{(Ax, Ax)}. \end{cases}$$

Во втором неравенстве этой системы преобразуем $\min\limits_{x \neq 0} \dfrac{(Ax, x)}{(Ax, Ax)}$. Пусть $y = Ax$, тогда

$$\min_{x \neq 0} \frac{(Ax, x)}{(Ax, Ax)} = \min_{y \neq 0} \frac{(A^{-1}y, y)}{(y, y)} = \min_{y \neq 0} \frac{\left(\dfrac{A^{-1} + A^{-T}}{2} y, y\right)}{(y, y)} = \lambda_{\min} \left(A^{-1}\right)_0,$$

где $\dfrac{A^{-1} + A^{-T}}{2} = \left(A^{-1}\right)_0$. В итоге получим неравенство (15). □

Замечание 1. Пусть в лемме $\alpha + \beta \leq 0$, тогда для выполнения неравенства (16) достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} 2\lambda_{\max} \left(A^{-1}\right)_0 + \alpha \leq \beta \leq -\alpha, \\ 0 \leq \alpha \leq -\lambda_{\max} \left(A^{-1}\right)_0, \\ \lambda_{\max} \left(A^{-1}\right)_0 \leq 0, \end{cases} \tag{17}$$

которые сужают область применения леммы.

Следствие 4. *Пусть A — диссипативный оператор и α, β — действительные числа, причем $\alpha \geq 0$ и $\alpha + \beta \geq 0$. Тогда условие*

$$|\beta| \leq \alpha$$

достаточно для выполнения оценки (16).

Доказательство. Если A — диссипативный оператор, то $\left(A^{-1}\right)_0$ — диссипативный оператор и $\lambda_{\min} \left(A^{-1}\right)_0 > 0$. □

Замечание 2. Если в следствии 4 $\alpha + \beta \leq 0$, то множество решений (17) пусто.

Следствие 5. *Пусть A — диссипативный оператор. Если $\alpha = \beta \geq 0$, то основная лемма 1 является леммой Келлога.*

Теорема 4 (достаточное условие сходимости двухпараметрического итерационного метода). *Для сходимости двухпараметрического итерационного метода (2), (3) достаточно выполнение условий*

$$0 < \tau < \omega + 2\lambda_{\min} \left(\left(F^{-1}\right)_0\right), \text{ где } F = N^{-1}A.$$

Доказательство. Оператор $G(\tau,\omega) = (E + 0.5\omega F)^{-1}(E - (\tau - 0.5\omega) F)$ в соотношении (14) имеет тот же вид, что и оператор $T = (E + \alpha A)^{-1}(E - \beta A)$ (16) в лемме 1 при значениях $\alpha = 0.5\omega$ и $\beta = \tau - 0.5\omega$. Подставим значения $\alpha = 0.5\omega$ и $\beta = \tau - 0.5\omega$ в неравенства (15). После разрешения этих неравенств относительно положительных параметров τ и ω получаем доказательство теоремы. □

Следствие 6. *Если оператор $F = N^{-1}A$ диссипативен, то для сходимости двухпараметрического итерационного метода (2), (3) достаточно, чтобы выполнялось неравенство (9)*

$$0 < \tau \leq \omega.$$

Доказательство. Если оператор $F = N^{-1}A$ диссипативен, то диссипативен его обратный оператор и $\lambda_{\min}\left((F^{-1})_0\right) > 0$. □

Следствие 7. *При значении $\omega = \tau$ для сходимости однопараметрического итерационного метода (2), (3) достаточно диссипативности оператора $F = N^{-1}A$.*

2.2. Нахождение оптимального параметра (энергетический подход)

При оптимизации двухпараметрического итерационного метода (2), (3) энергетическим подходом будем предполагать, что оператор $F = N^{-1}A$ диссипативен, т. е. для сходимости достаточно выполнения неравенства (9).

Рассмотрим норму оператора перехода двухпараметрического итерационного метода (2), (3)

$$\|G(\tau,\omega)\|^2 = 1 - \tau \inf_{y\neq 0} \frac{2(Fy,y) + (\omega-\tau)(Fy,Fy)}{(y,y) + \omega(Fy,y) + 0.25\omega^2(Fy,Fy)}.$$

Наша цель — найти величину

$$\rho_3 = \min_{\tau,\omega}\max_{y\neq 0}\left(1 - \tau \inf_{y\neq 0} \frac{2(Fy,y) + (\omega-\tau)(Fy,Fy)}{(y,y) + \omega(Fy,y) + 0.25\omega^2(Fy,Fy)}\right).$$

При оценке нормы $\|G(\tau,\omega)\|$ используем предположение, что для любого $y \neq 0$ выполняются ограничения на (Fy,Fy) [7] и $(Fy,y) = (F_0 y,y)$ [1] следующего вида:

$$0 < m\alpha_1(y,y) \leq m(Fy,y) \leq (Fy,Fy) \leq M(Fy,y) \leq M\alpha_2(y,y), \tag{18}$$

где $\alpha_1 = \lambda_{\min}(F_0) > 0,\ \alpha_2 = \lambda_{\max}(F_0)$.

Исследуем выражение

$$Q = \frac{2(Fy,y) + (\omega-\tau)(Fy,Fy)}{(y,y) + \omega(Fy,y) + 0.25\omega^2(Fy,Fy)}.$$

С учетом $(Fy,Fy) \leq M(Fy,y)$ из (15) знаменатель Q можно оценить как

$$(y,y) + \omega(Fy,y) + 0.25\omega^2(Fy,Fy) \leq (y,y) + \omega(Fy,y) + 0.25M\omega^2(Fy,y).$$

Так как оператор F диссипативен и $\omega - \tau \geq 0$ из (10), все слагаемые в числителе Q положительны. Используя оценку $m(Fy,y) \leq (Fy,Fy)$ из (18), для числителя Q получим

$$2(Fy,y) + (\omega-\tau)(Fy,Fy) \geq 2(Fy,y) + m(\omega-\tau)(Fy,y).$$

Полученные оценки для числителя и знаменателя выражения Q позволяют записать оценку нормы оператора перехода $\|G(\tau,\omega)\|$ в виде

$$\|G(\tau,\omega)\|^2 \le 1-\tau \inf_{y\neq 0} \frac{2(Fy,y)+m(\omega-\tau)(Fy,y)}{(y,y)+\omega(Fy,y)+0.25M\omega^2(Fy,y)}.$$

Произведя замену $z=y/\|y\|$, получим

$$\|G(\tau,\omega)\|^2 \le 1-\tau \inf_{\|z\|=1} \frac{(2+m(\omega-\tau))(Fz,z)}{1+(\omega+0.25M\omega^2)(Fz,z)}.$$

Рассмотрим функцию

$$q(Fz,z)=\frac{(2+m(\omega-\tau))(Fz,z)}{1+(\omega+M\omega^2)(Fz,z)},$$

стоящую под знаком inf. В силу диссипативности оператора F эта функция является монотонно возрастающей функцией положительного аргумента и меньшему значению аргумента $(Fz,z)\ge\alpha_1$ из (18) соответствует меньшее значение функции

$$\inf_{(Fz,z)\ge\alpha_1} \frac{(2+m(\omega-\tau))(Fz,z)}{1+(\omega+0.25M\omega^2)(Fz,z)} = \frac{(2+m(\omega-\tau))\alpha_1}{1+(\omega+0.25M\omega^2)\alpha_1}.$$

Таким образом, получили

$$\|G(\tau,\omega)\|^2 \le 1-\tau\frac{(2+m(\omega-\tau))\alpha_1}{1+(\omega+0.25M\omega^2)\alpha_1}.$$

Теперь наша цель — найти

$$\min_{\tau,\omega}\left(1-\tau\frac{(2+m(\omega-\tau))\alpha_1}{1+(\omega+0.25M\omega^2)\alpha_1}\right).$$

Обратим внимание, что функция, стоящая под знаком min, совпадает с функцией (12) с различием в обозначениях констант. Итак, доказательство следующих теорем совпадает с доказательством теорем в пунктах для спектрального подхода.

Теорема 5. *Пусть оператор $F=N^{-1}A$ диссипативен, выполнено условие (18) и $m>\alpha_1$. Тогда двухпараметрический итерационный метод (2), (3) сходится и оптимальные параметры находятся по формулам*

$$\begin{cases} \omega_0=\dfrac{m(\omega_0)-\alpha_1(\omega_0)}{(M(\omega_0)-m(\omega_0))\alpha_1(\omega_0)}, \\ \tau_0=0.5\omega_0+\dfrac{1}{m(\omega_0)}. \end{cases}$$

Для погрешности справедлива оценка

$$\left\|x^k-x\right\|\le\rho_3^k\left\|x^0-x\right\|,\quad k=0,\,1,\,\ldots,$$

где $\rho_3=\dfrac{(M-m)(m-\alpha_1)}{(M-\alpha_1)m}$.

Приведем теорему оптимизации для однопараметрического итерационного метода (2), (3).

Теорема 6. *Пусть оператор* $F = N^{-1}A$ *диссипативен, выполнено условие (15) и* $\omega = \tau$. *Тогда однопараметрический итерационный метод (2), (3) сходится и оптимальный параметр находится из формулы*

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha_1\left(\tau_{\text{opt}}\right) M\left(\tau_{\text{opt}}\right)}}$$

и для погрешности справедлива оценка

$$\left\|x^k - x\right\| \le \rho_4^k \left\|x^0 - x\right\|, \quad k = 0,\, 1,\, \ldots\,,$$

где

$$\rho_4 = \frac{1 - \sqrt{\dfrac{\alpha_1}{M}}}{1 + \sqrt{\dfrac{\alpha_1}{M}}},$$

а M, α_1 *удовлетворяют условию (18) и* $\alpha_1 < M$.

Число итераций, достаточных для достижения заданной точности ε, *оценивается числом*

$$n(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_4}.$$

Список литературы

[1] Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.

[2] Young D.M. Iterative Solution of Large Linear Iterative Systems. N.Y.: Acad. Press, 1971.

[3] Taussky O. Positive-definite matrices and their role in the study of the characteristic roots of general matrices // Adv. Math. 1968. Vol. 2. P. 175–186.

[4] Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричным неравенствам. М.: Наука, 1972.

[5] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. СПб.: Лань, 2002. 736 с.

[6] Чикина Л.Г. Двухпараметрический треугольный кососимметрический итерационный метод // Сб. тр. Всерос. конф. "Математическое моделирование и проблемы экологической безопасности". Абрау-Дюрсо. Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 2000. С. 230–237.

[7] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 7 февраля 2006 г.,
в переработанном виде — 17 апреля 2006 г.