Вычислительные технологии **Том 11, № 4, 2006**

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЪЕКТА

В. В. Башуров
ООО "Центр экологического и техногенного мониторинга",
Трехгорный, Россия
e-mail: `cetm@atlint.ru`

A safety model using notations and methods of the variational calculus is proposed. The model allows to consider an infinite set of manifolds on which the solution of the safety problem is sought. The analogy between propagation of light and the proposed safety model is applied.

Введение

Существующие в настоящее время модели и методы, применяемые для решения задач, связанных с безопасностью объекта, используют язык, способы и понятия теории графов. При этом понятие "безопасность" понимается в самом общем смысле. Основным недостатком этих моделей является конечность множества, на котором ищется решение. Предлагаемая модель безопасности использует язык и методы функционального анализа и вариационного исчисления, позволяет рассматривать бесконечные множества, на которых ищется решение соответствующей экстремальной задачи. Для нахождения решения используется аналогия между распространением света в неоднородной среде и предлагаемой моделью безопасности.

1. Постановка задачи о безопасности охраняемого объекта

Имеется область $D\left(x,y\right)$ с границей S_D, в которой расположен охраняемый объект $M_0(x_0,y_0)\in D(x,y)$. Имеется ресурс средств обнаружения (распознавания, уничтожения) постороннего объекта (назовем его нарушителем), перемещающегося по области $D(x,y)$ от какой-либо точки $M_D\in S_D$ и имеющего целью достижение охраняемого объекта — точки $M_0(x_0,y_0)$.

Средства обнаружения индуцируют в области $D\left(x,y\right)$ функцию риска $p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)$, которую будем трактовать как функцию плотности распределения вероятности времени обнаружения нарушителя в точке $M\left(x,y\right)$ со следующими свойствами:

— $p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)$ определена в $D\times[0,\infty)$;
— $p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)\geq 0$;
— для любых $M(x,y)\in D\left(x,y\right)$ $\int\limits_0^\infty p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)d\tau\leq 1$;
— $p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)$ непрерывна при $\tau\to 0$ и $p(M(x,y),0)\neq 0$.

Последнее свойство гарантирует, что для нарушителя на территории объекта не существует защищенных зон.

Таким образом,

$$P\left(M,t\right)=\int\limits_0^t p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)d\tau$$

есть вероятность обнаружения неподвижного нарушителя в течение времени t в точке $M\left(x,y\right)$ [1]. Поскольку далее будут использоваться значения функции $p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)$ только при $\tau=0$, функцию $p\left(M\left(x,y\right),0\right)=p_0\left(x,y\right)$ назовем функцией риска. Будем рассматривать только движущегося (необязательно с постоянной скоростью) нарушителя. Пусть $V(x,y)>0$ — модуль скорости нарушителя в точке (x,y).

Пусть нарушитель перемещается от границы области S_D к точке $M_0\left(x_0,y_0\right)$ по какой-либо траектории $\Gamma\subset D$. Разбивая кривую на элементарные дуги $\Delta\Gamma_k$, в дальнейшем под величиной τ будем понимать время пребывания движущегося нарушителя на элементарной дуге $d\Gamma$. Такая трактовка функции риска позволяет определять вероятность нахождения нарушителя не в точке, что всегда является сложной задачей, а в ее окрестности, что позволяет учитывать различные погрешности измерений. Функция риска определяется факторами, посторонними для математики, и поэтому при конкретном расположении средств охраны и заданной вооруженности нарушителя она считается заданной.

Считаем, что обнаружение на каждой дуге $\Delta\Gamma_k$ не зависит от обнаружения на других элементарных дугах, поэтому вероятность достижения нарушителем цели $M_0(x_0,y_0)$ определяется теоремой об умножении вероятностей [1].

Вероятность необнаружения нарушителя на k-м участке кривой Γ определяется формулой

$$\Delta p_k=1-\int\limits_0^{t_k} p\left(M\left(x,y\right),\tau\right)d\tau,$$

где t_k — время пребывания нарушителя на k-й дуге кривой Γ.

Согласно теореме умножения вероятностей, вероятность необнаружения нарушителя на всей траектории Γ есть произведение вероятностей его необнаружения на каждом участке $\Delta\Gamma_k$:

$$P(\Gamma)=\prod_1^k\Delta p_k.$$

Отсюда

$$\ln P(\Gamma)=\sum_1^k\ln\Delta p_k. \tag{1}$$

Используя эквивалентность бесконечно малых

$$\ln\left(1-\int\limits_0^{t_k} p(M(x,y),\tau)d\tau\right),\quad -\int\limits_0^{t_k} p(M(x,y),\tau)d\tau$$

и учитывая малость t_k, заменим последний интеграл произведением $p(M(x,y)_k,0)\Delta\tau_k$ и получим интегральную сумму Римана

$$-\sum p\left(M\left(x,y\right)_k,0\right)\Delta\tau_k,$$

где $\Delta\tau_k = t_k = ds_k/V_k\left(x,y\right)$, t_k — время пребывания на отрезке кривой $\Delta\Gamma_k$; $V_k\left(x,y\right)$ — модуль скорости перемещения нарушителя на этом же отрезке.

Сумма Римана (1) естественно приводит к выражению логарифма вероятности достижения нарушителем цели по пути Г:

$$\ln P(\Gamma) = -\int\limits_{\Gamma} \frac{p_0(x,y)}{V(x,y)} ds. \tag{2}$$

Стационарность системы физической защиты объекта заключается в независимости выражения, стоящего под знаком интеграла от времени.

Из выражения (2) следует, что вероятность необнаружения нарушителя, перемещающегося с ненулевой скоростью по траектории Г, есть

$$P = e^{-\int\limits_{\Gamma} \frac{p_0(x,y)}{V(x,y)} ds}. \tag{3}$$

Эффективность системы физической защиты определяется максимумом функционала (3) на множестве допустимых траекторий или, соответственно, минимумом функционала

$$\int \frac{p_0(x,y)}{V(x,y)} ds = \int f(x,y) ds, \tag{4}$$

где

$$\frac{p_0(x,y)}{V(x,y)} = f(x,y).$$

В силу принятых ранее допущений $\infty > f(x,y) > 0$.

Модель охраняемой территории и нарушителя, представленная в виде функционала (4), будем называть моделью "охраняемая территория — нарушитель". Используемые прежде модели опирались на язык методов теории графов.

Таким образом, требуется найти глобальный минимум функционала (1) или (4) в области D на классе кривых $\Gamma(S_0; M_0)$.

В настоящее время известны, по крайней мере, два способа ее решения.

1. Построение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (уравнение Эйлера для функционала (4)) и его решение [2]. Использование этого метода чрезвычайно затруднено из-за разрывности ядра функционала (4).

2. Прямой метод, заключающийся в том, что искомая кривая (экстремаль) представляется набором точек $\{(x_k, y_k)\}_1^N$, интеграл заменяется интегральной суммой и ищется минимум нелинейной функции N переменных (см. например, [3]). Данный метод (из-за нелинейности исходной задачи) не гарантирует сходимости, а если он и сходится, то нет никаких оснований считать, что это глобальный минимум.

Однако существует и третья возможность отыскания глобального минимума функционала (4).

Пусть оптически неоднородная среда представляет собой область D с местной скоростью света $C(x,y)$ в точке (x,y). Отыскание пути светового луча в геометрической оптике сводится на основании принципа Ферма к нахождению экстремали функционала

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{ds}{C(x,y)} \tag{5}$$

на множестве кривых, соединяющих источник $M_{\text{н}}$ и приемник M_0 света [4–6]. Действительно, последний интеграл есть время “движения” света по траектории Г, а свет выбирает путь, на котором это время достигает своего глобального минимума (относительно всех возможных путей, соединяющих точки $M_{\text{н}}$ и M_0).

Наш функционал (4) есть функционал (5), если положить

$$C(x,y) = \frac{V(x,y)}{p_0(x,y)}. \tag{6}$$

Таким образом, задача об оценке эффективности системы физической защиты тождественна задаче о распространении света в оптически неоднородной среде от источника света, расположенного в точке $M_0(x_0,y_0)$, и определении времени достижения светом границы S_D.

2. Решение экстремальной задачи с использованием принципа Гюйгенса

Коль скоро мы установили тождественность задачи о безопасности объекта и распространении света в оптически неоднородной среде, для решения задачи используем “оптический” принцип Гюйгенса. Напомним, что согласно этому принципу каждая точка, которой достигает фронт световой волны, становится источником света [4]. Таким образом, построение фронта “световой” волны сводится к следующей процедуре.

1. В каждой точке периметра, который считается фронтом “световой” волны в начальный момент времени, строится окружность радиусом $r\,(M) = C\,(x,y)\,\tau$, где $r\,(M)$ — радиус; $C\,(x,y)$ — местная скорость “света”, определяемая формулой (6); τ — шаг по времени.

2. Строится огибающая семейства полученных окружностей, аппроксимирующая фронт “световой” волны в момент τ, и от этого положения фронта делается следующий шаг по времени. Процесс повторяется до тех пор, пока какая-либо точка фронта впервые не достигнет точки $M_0\,(x_0,y_0)$.

Суммарное время, определенное умножением шага τ на число шагов, даст меру безопасности. Точность получения этой меры связана с величиной шага по времени τ и точностью построения огибающей. Двигаясь от конечной точки $M_0\,(x_0,y_0)$ по фронтам в обратном направлении времени, можно приближенно найти экстремаль в виде ломаной.

Этот метод, как показали его многочисленные применения к различным задачам (т. е. к совершенно различным по гладкости функциям $P(x,y)$ и $V(x,y)$, а также к границам S_D), дает решение, которое является глобальным минимумом. Заметим, что решение может быть и неединственным.

Полезно также сравнить прямой метод нахождения экстремали с предложенным в статье (назовем его “волновым”).

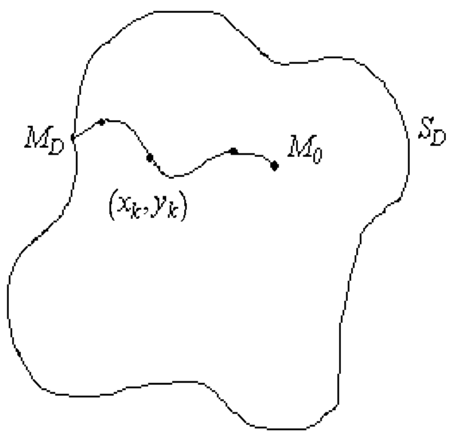

Рис. 1.

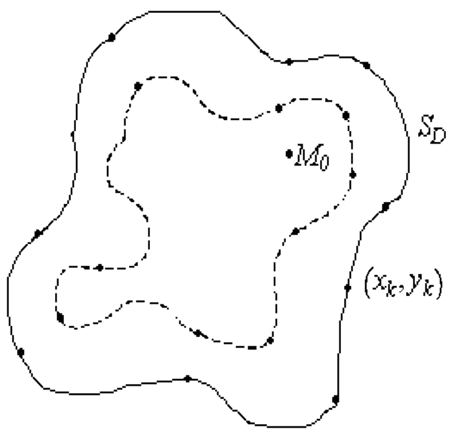

Рис. 2.

Прямой метод. На рис. 1 представлены цель (точка M_0), граница области S_D, положение итерируемой экстремали на n-м шаге $M_D M_0$. Пусть экстремаль на этом шаге итерации задается набором точек $(x_k, y_k)_1^N$. Пусть в прямом методе сделано M итераций. Тогда общее число операций $\sim MN$, а успех, т. е. получение решения, сомнителен.

"Волновой" метод. На рис. 2 пунктиром обозначено положение фронта "световой" волны на n-м шаге, а (x_k, y_k) — точки, которые представляют дискретизацию фронта. Пусть этих точек будет N, а число "временных" шагов, за которое фронт достигает точки M_0, равно M. Тогда общее число операций пропорционально тому же произведению MN, но при этом успех, т. е. нахождение экстремали и экстремума, гарантирован.

Заключение

Предложена новая модель безопасности охраняемого объекта, сводящаяся к функционалу (4). Ранее используемые модели основаны на понятиях теории графов.

Установлена тождественность задачи о распространении света в оптически неоднородной среде и задачи безопасности, формализованной в разд. 1.

Предложен метод решения задачи о безопасности объекта, основанный на принципах Ферма и Гюйгенса, используемых в геометрической оптике.

Выражаю благодарность профессорам С.Л. Дерябину и С.С. Титову за обсуждение проблемы и ценные советы.

Список литературы

[1] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 480 с.

[2] Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Изд-во физ. мат. лит-ры, 1961. 228 с.

[3] Гаврин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971. 248 с.

[4] Крауфорд Ф. Волны. Берклеевский курс физики. Т. 3. М.: Наука, 1984. 510 с.

[5] Элементарный учебник физики / Под ред. акад. Г.С. Ландсберга. Т. 3. М.: Наука, 1986. 656 с.

[6] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 3–4. М.: Мир, 1977. 496 с.

[7] Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. 206 с.

[8] Башуров В.В., Самоваров И.Н., Цыганков Е.С. и др. Некоторые подходы к разработке методики компьютерного анализа уязвимости установок с ядерными материалами // Тр. Рос. Междунар. конф. по учету, контролю и физической защите ЯМ. 1997. С. 87–89.

Поступила в редакцию 6 мая 2006 г.