Вычислительные технологии **Том 11, Специальный выпуск, 2006**

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СХЕМАХ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В МЕТОДЕ “КРУПНЫХ ЧАСТИЦ”

Н. А. Кучер
Кемеровский государственный университет, Россия
e-mail: diffur@kemsu.ru

The paper provides a theoretical basis for a differential decomposition scheme, which is used in the method of large particles for numerical solution of the problems of viscous compressible fluid dynamics.

Введение

Описание метода крупных частиц применительно к задачам газовой динамики содержится в работах [1, 2], а детальное изложение численных методик такого типа, их реализация для различных задач механики сплошной среды и обширная библиография на эту тему содержатся в монографиях [3, 4]. Этот метод опирается на идею специального расщепления системы дифференциальных уравнений газовой динамики по физическим процессам. Говоря точнее, расчет каждого временного шага производится в несколько этапов. Сначала строится разностная схема, моделирующая изменение массы, импульса и полной энергии крупных частиц (совпадающих в данный момент с эйлеровой ячейкой расчетной сетки) под влиянием одного только давления, без учета тех членов системы уравнений газовой динамики, которые описывают перенос вещества, импульса и энергии. Это первый шаг разностной схемы. На втором шаге производится пересчет полученных на первом этапе промежуточных величин по разностной схеме, учитывающей те члены уравнений газовой динамики, которыми обусловлены переток вещества в соседние ячейки и соответствующий перенос импульса и энергии.

Трактовка схемы “крупных частиц” для системы уравнений идеального газа на языке слабой аппроксимациии означает замену на каждом расчетном шаге $n\tau \leq t \leq n\tau + \tau$ системы уравнений газовой динамики

$$\rho D\mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{v} = 0,$$

$$\rho DE + \operatorname{div}(p\mathbf{v}) = 0, \quad D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla; \tag{1}$$

$$p = f(\rho, S), \quad J = J(V, p), \quad V = \frac{1}{\rho} \tag{2}$$

двумя вспомогательными системами:

$$\frac{1}{2}\rho\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad \frac{1}{2}\rho\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(p\mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad n\tau < t \leq (n + \frac{1}{2})\tau; \tag{3}$$

$$\widetilde{D}\mathbf{v} = 0, \ \ \widetilde{D}E = 0, \quad \widetilde{D}\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0,$$

$$\widetilde{D} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, \quad n\tau + \frac{1}{2}\tau < t \leq n\tau + \tau. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор скорости; ρ — плотность; p — давление; $E = \dfrac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + J$, J — удельная внутренняя энергия; S — удельная энтропия.

Заметим, что на решениях расщепленной системы (3), (4) (в отличие от исходной системы газовой динамики (1), (2)) закон неубывания энтропии в частице, вообще говоря, не выполняется.

Анализ разностных схем первого этапа, проведенный в линейном приближении Анучиной [6], показывает их абсолютную неустойчивость. При этом оператор полного шага в линейном приближении устойчив только при определенных ограничениях на шаги разностной сетки и модуль скорости. Ф.Н. Харлоу [7] отмечено, что основным источником потери энтропии служит неустойчивость расчетов на первом (эйлеровом) этапе, и наоборот. Простые примеры показывают, что решения задачи Коши для расщепленной системы (3), (4) не аппроксимируют точное решение системы (1), (2) с теми же начальными данными в классах функций конечной гладкости [8].

Строгий результат по сходимости в шкале пространств Соболева схемы расщепления вида (3),(4) (метод “крупных частиц”) для системы уравнений невязкого газа с граничными условиями непротекания получен в [9] при условии, что нет “больших потерь энтропии”. В настоящей работе покажем, что учет членов уравнений газовой динамики, обусловленных молекулярной вязкостью среды и теплопроводностью, делает возможным провести безусловное обоснование дифференциальной схемы расщепления метода “крупных частиц”.

Итак, рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса сжимаемой вязкой теплопроводной жидкости в декартовой системе координат Ox_1x_2 в виде [3]

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2)=0,\\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_1)+\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1^2)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_1 v_2)+\dfrac{\partial p}{\partial x_1}=\\
=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left\{\mu A\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\right\}+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left\{\mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right\},\\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_2)+\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1 v_2)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2^2)+\dfrac{\partial p}{\partial x_2}=\\
=\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left\{\mu A\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+2\mu\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right\}+\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left\{\mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\right\},\\
\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho v_1 E)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho v_2 E)+\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p v_1)+\dfrac{\partial}{\partial x_2}(p v_2)=\\
=\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left\{\mu A\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)v_1+\mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)v_2+\mu\dfrac{\partial}{\partial x_1}(B\,J+v_1^2)\right\}+\\
+\dfrac{\partial}{\partial x_2}\left\{\mu A\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)v_2+\mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)v_1+\mu\dfrac{\partial}{\partial x_2}(B\,J+v_2^2)\right\},
\end{cases}
\tag{5}
$$

где искомые функции $v=(v_1,v_2)$, ρ, p, J и $E=J+\dfrac{1}{2}|v|^2$, зависящие от переменных $x=(x_1,x_2)$ и t, означают соответственно скорость, плотность, давление, удельную внутреннюю и удельную полные энергии.

Для замыкания системы (5) используем простоты ради уравнения состояния совершенного политропного газа

$$
p=R\rho\theta,\quad J=c_v\theta,\quad R=\mathrm{const}>0,\quad c_v=\mathrm{const}>0,
\tag{6}
$$

где θ — абсолютная температура.

Примем также, что коэфициенты вязкости и теплопроводности постоянны:

$$
\mu=\mathrm{const}>0,\quad \kappa=\mathrm{const}>0,\quad A=-\frac{2}{3},\quad B=\frac{\kappa}{\mathrm{Pr}}
$$

(Pr — число Прандля).

В соответствии со сказанным выше метод “крупных частиц” предусматривает следующее расщепление исходной системы (5) на каждом целом шаге $[n\tau,(n{+}1)\tau]$, $n=0,\dots N{-}1$, $N\tau=T>0$ временного промежутка $[0,T]$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\rho\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x_i} = \mu\triangle v_i + \dfrac{1}{3}\mu\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right), \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{1}{2}\rho\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial (pv_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial (pv_2)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)v_1 + \mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)v_2 + \right. \\ \left. + \mu\dfrac{\partial}{\partial x_1}(B\,J + v_1^2)\right\} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\left\{-\dfrac{2}{3}\mu\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)v_2 + \mu\left(\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)v_1 + \right. \\ \left. + \mu\dfrac{\partial}{\partial x_2}(B\,J + v_2^2)\right\}, \\ n\tau < t \leq n\tau + \dfrac{1}{2}\tau; \end{cases} \tag{7_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v_1\dfrac{\partial \rho}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial \rho}{\partial x_2} + \rho(t)\left[\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}(t - \dfrac{1}{2}\tau) + \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}(t - \dfrac{1}{2}\tau)\right] = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_1\dfrac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial v_i}{\partial x_2} = 0, \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial E}{\partial t} + v_1\dfrac{\partial E}{\partial x_1} + v_2\dfrac{\partial E}{\partial x_2} = 0, \quad n\tau + \dfrac{1}{2}\tau < t \leq n\tau + \tau. \end{cases} \tag{7_2}$$

Мы покажем, что однопараметрическое семейство решений $(\mathbf{v}_\tau, \rho_\tau, \theta_\tau)$ систем (7_1), (7_2) (с теми или иными начальными и граничными условиями) при $\tau \to 0$ сходится в шкале пространств С.Л. Соболева (допускающих вложение в класс непрерывных функций) к точному решению начально-краевой задачи для исходной системы (5). О точном решении априори не делается никаких предположений, а следовательно, данный алгоритм является одновременно конструктивным методом доказательства теоремы существования классического решения соответствующей задачи.

Сходимость схемы расщепления (7_1), (7_2) в рассматриваемых функциональных пространствах, а значит, и существование сильного решения исходной задачи установлены "в малом" по времени в том смысле, что длина временного промежутка зависит от данных задачи. Можно утверждать, что на произвольном промежутке времени этот факт, вообще говоря, несправедлив по причине того, что для уравнений вязкой сжимаемой жидкости с двумя и тремя пространственными переменными "сильное" решение на произвольном конечном временном промежутке не существует (в отличие от одномерных моделей) даже в том случае, когда начальные данные сколь угодно гладкие [10].

Для системы (5) будем изучать сходимость решений расщепленной системы (7_1), (7_2) в следующих случаях.

1. Задача Коши

К системе (5), (6) присоединим начальные условия

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v_0}(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \; x \in R^2, \tag{8}$$

предполагая, что ρ_0 и θ_0 — строго положительные ограниченные функции. Кроме того, начальные функции $\mathbf{v}_0(x)$, ρ_0, θ_0 предполагаются периодическими (с единичным периодом) по каждой пространственной переменной x_i.

2. Смешанная задача

В этом случае в цилиндре

$$Q_T = \Omega \times (0,T),\ T > 0,\ \Omega = \{x = (x_1, x_2):\ 0 < x_i < 1,\ i = 1, 2\}$$

ищется решение $(\mathbf{v}, \rho, \theta)$ системы (5), (6), удовлетворяющее начальным условиям

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v_0}(x), \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in \Omega,$$
$$0 < m \le \rho_0(x), \quad \theta_0(x) \le M < \infty, \quad m, M = \mathrm{const}, \tag{9}$$

и граничным условиям

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \sigma|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0,$$
$$\sigma = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \mathrm{rot}\, \mathbf{v}, \tag{10}$$

$\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Поскольку для доказательства сходимости в рассматриваемых пространствах можно пользоваться любой эквивалентной записью систем уравнений на дробных шагах, выбирая в качестве основных искомых функций величины $(\mathbf{v}, Q, \omega)$, $Q = \ln\rho$, $\omega = \ln\theta$, перепишем расщепленную систему (7_1), (7_2) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\, a(\omega)\, \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + R\, \dfrac{\partial\omega}{\partial x_i} + R\, \dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = b(Q,\omega)\, L_i(\mathbf{v}), \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{1}{2}\, c_v\, \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + R\, \mathrm{div}\, \mathbf{v} = b(Q,\omega) \Big[\kappa_1\, \mathrm{div}\big(d(\omega)\nabla\omega\big) - \\ -\dfrac{2}{3}\, \mu\, (\mathrm{div}\, \mathbf{v})^2 + 2\mu\, D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v})\Big], \\ L_i(\mathbf{v}) = \mu\, \Delta v_i + \dfrac{1}{3}\, \mu\, \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{div}\, \mathbf{v}), \\ D(\mathbf{v}) : D(\mathbf{v}) = \displaystyle\sum_{i,j} D_{i,j}(\mathbf{v}) D_{i,j}(\mathbf{v}), \quad D_{i,j}(\mathbf{v}) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \\ a(\omega) = \exp(-\omega), \quad d(\omega) = \exp(\omega), \quad b(Q,\omega) = \exp(-\omega - Q), \\ n\tau < t \le n\tau + \dfrac{1}{2}\tau; \end{cases} \tag{11_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) Q + \mathrm{div}\, \mathbf{v}(t - \dfrac{1}{2}\tau) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) v_i = 0, \quad i = 1, 2, \\ \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\partial\omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = 0, \\ n\tau + \dfrac{1}{2}\tau < t \le n\tau + \tau. \end{cases} \tag{11_2}$$

Так как расщепленная задача доставляет приближенное решение исходной, параллельно с системой (11_i), $i=1,2$, рассмотрим ее линеаризованный в пределах каждого расчетного шага $[n\tau, n\tau+\tau]$ вариант:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\, a^n \,\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + R\,\dfrac{\partial \omega}{\partial x_i} + R\,\dfrac{\partial Q}{\partial x_i} = b^n\, L_i(\mathbf{v}), \quad i=1,2, \\ \dfrac{1}{2}\, c_v\, \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + R\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = b^n\; \Big[\kappa_1\, \mathrm{div}\,(d^n \nabla\omega) - \\ -\dfrac{2}{3}\,\mu\,(\mathrm{div}\,\mathbf{v}^{\,n})(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + 2\mu\, D(\mathbf{v}^n) : D(\mathbf{v})\Big], \\ a^n = a(\omega^n), \quad d^n = d(\omega^n), \quad b^n = b(Q^n, \omega^n), \quad \omega^n = \omega\,\Big|_{t=n\tau}, \\ n\tau < t \le n\tau + \dfrac{1}{2}\tau; \end{cases} \tag{12_1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{v}^{\,n+\frac{1}{2}}\cdot\nabla)Q + \mathrm{div}\,\mathbf{v}(t-\dfrac{1}{2}\tau) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}^{\,n+\frac{1}{2}}\cdot\nabla)v_i = 0, \quad i=1,2, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v}^{\,n+\frac{1}{2}}\cdot\nabla)\omega = 0, \\ n\tau + \dfrac{1}{2}\tau < t \le n\tau+\tau. \end{cases} \tag{12_2}$$

Если рассматривается задача Коши (8), то к системам (11_i), $i=1,2$, и (12_i), $i=1,2$, присоединяем начальные условия

$$\mathbf{v}_\tau\,\Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x), \quad Q_\tau\,\Big|_{t=0} = Q_0(x), \quad \omega_\tau\,\Big|_{t=0} = \omega_0(x), \quad x\in R^2,$$

$$Q_0(x) = \ln\rho_0(x), \quad \omega_0(x) = \ln\theta_0(x), \tag{13}$$

а в качестве начальных функций для каждой отдельной системы (11_i) или (12_i) берутся функции, полученные в результате решения соответствующей задачи на предыдущем дробном шаге.

В случае смешанной задачи (10) к системам (11_i), (12_i), $i=1,2$, присоединяем следующие начальные и граничные условия:

$$\mathbf{v}_\tau\,\Big|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x), \;\; Q_\tau\,\Big|_{t=0} = Q_0(x), \quad \omega_\tau\,\Big|_{t=0} = \omega_0(x), \quad x\in\Omega; \tag{14}$$

$$\mathbf{v}_\tau\cdot\mathbf{n}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0, \;\; \sigma_\tau\,\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \sigma_\tau = \frac{\partial v_{2\tau}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_{1\tau}}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\omega_\tau}{\partial n}\,\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{15}$$

Расщепленную задачу (11_1) и (11_2), (13) назовем для краткости задачей C_τ; (12_1) и (12_2), (13) — задачей $\overset{0}{C}_\tau$; (11_1) и (11_2), (14) — задачей D_τ; (12_1) и (12_2), (14) — задачей $\overset{0}{D}_\tau$.

3. Априорные оценки расщепленных задач

Через $H^l(\Omega)$, $l \geq 0$ — целое, условимся обозначать гильбертово пространство, полученное замыканием множества бесконечно дифференцируемых на всей плоскости и периодических (с единичным периодом) по каждой переменной x_i, $i = 1, 2$, скалярных функций или вектор-функций по норме

$$||f||_{l,2} = ||f||_{W^{l,2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим также следующие множества $C_*^l(\overline{\Omega})$ и $F_*^l(\overline{\Omega})$ достаточно гладких в области Ω функций:

$$C_*^l(\overline{\Omega}) = \left\{ \mathbf{u} = (u_1, u_2) \in C^l(\overline{\Omega}) : \quad \left. \frac{\partial^{2p} u_i}{\partial x_i^{2p}} \right|_{x_i = 0,1} = 0, \quad p = 0, \ldots, \left[\frac{l}{2} \right], \right.$$

$$\left. \left. \frac{\partial^{2q+1} u_i}{\partial x_j^{2q+1}} \right|_{x_j = 0,1} = 0, \quad j \neq i, \quad q = 0, \ldots, \left[\frac{l-1}{2} \right], \quad i, j = 1, 2 \right\},$$

$$F_*^l(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi \in C^l(\overline{\Omega}) : \quad \left. \frac{\partial^{2q+1} \varphi}{\partial x_j^{2q+1}} \right|_{x_j = 0,1} = 0, \quad q = 0, \ldots, \left[\frac{l-1}{2} \right], \quad j = 1, 2 \right\}.$$

Обозначим через $V^l(\Omega)$ и $F^l(\Omega)$ пространства, полученные замыканием по норме С.Л. Соболева в $W^{l,2}(\Omega)$ множеств $C_*^l(\overline{\Omega})$ и $F_*^l(\overline{\Omega})$ соответственно.

Решения $\{\mathbf{v}_\tau(t), Q_\tau(t), \omega_\tau(t)\}$ расщепленных задач $\overset{\circ}{C}_\tau$ и C_τ ищутся в классе $\mathbf{C}\big(0, T;\, \mathbf{H}^l(\Omega)\big)$, а решения вспомогательных задач $\overset{\circ}{D}_\tau$ и D_τ — в функциональных пространствах

$$\mathbf{C}\big(0, T;\, \mathbf{V}^l(\Omega) \times \mathbf{F}^l(\Omega) \times \mathbf{F}^l(\Omega)\big).^1$$

В соответствии с этим условимся подразумевать, что

$$\mathbf{Y}^l(\Omega) = \mathbf{H}^l(\Omega), \quad \mathbf{X}^l(\Omega), = \mathbf{H}^l(\Omega),$$

т. е. в этом случае речь идет о задаче Коши и

$$\mathbf{Y}^l(\Omega) = \mathbf{V}^l(\Omega), \quad \mathbf{X}^l(\Omega) = \mathbf{F}^l(\Omega)$$

— в случае смешанной задачи (9), (10).

Положим также для краткости записи

$$\mathbf{B}^l(\Omega) = \mathbf{Y}^l(\Omega) \times \mathbf{X}^l(\Omega) \times \mathbf{X}^l(\Omega).$$

Вывод априорных оценок расщепленных задач выглядит более прозрачным, если обратиться сначала к модельным ситуациям.

[1] Определение анизотропных функциональных пространств данного типа можно найти, например, в [11].

Рассмотрим на некотором промежутке $[t_\circ, t_*]$ систему вида (12_1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \alpha(x)\,\nabla(Q+\omega) = \beta(x)\,L(\mathbf{v}), \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + \dfrac{1}{c_v}\,R\,\mathrm{div}\mathbf{v} = M(\omega,\mathbf{v}), \\ L(\mathbf{v}) = \big(L_1(\mathbf{v}),\, L_2(\mathbf{v})\big), \\ M(\omega,\mathbf{v}) = \delta(x)\,\big[\kappa_1\,\mathrm{div}\big(d(x)\,\nabla\omega\big) - \dfrac{2}{3}\mu\big(\mathrm{div}\mathbf{u}(x)\big)\big(\mathrm{div}\mathbf{v}\big) + 2\mu D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\big], \end{cases} \tag{16}$$

коэффициенты которой имеют вид

$$\alpha(x) = \exp\left(\tilde{\omega}(x)\right), \quad \beta(x) = \exp\left(-\tilde{Q}(x)\right),$$

$$\delta(x) = \frac{1}{c_v}\,\exp\left(-\tilde{\omega}(x) - \tilde{Q}(x)\right), \quad d(x) = \alpha(x). \tag{17}$$

Здесь $\tilde{\omega}(x)$, $\tilde{Q}(x)$, $\mathbf{u}(x)$ — функции из пространств $\mathbf{X}^l(\Omega)$, $\mathbf{X}^l(\Omega)$, $\mathbf{Y}^l(\Omega)$, $l \geq 3$, соответственно, которые считаем заданными.

Распределение искомых функций $\mathbf{v}$, Q, ω в начальный момент времени $t = t_\circ$ предполагаем известным:

$$\mathbf{v}(t_\circ) = \mathbf{v}_\circ, \quad Q(t_\circ) = Q_\circ, \quad \omega(t_\circ) = \omega_\circ, \tag{18}$$

причем

$$\mathbf{v}_\circ \in \mathbf{Y}^l(\Omega), \quad Q_\circ,\ \omega_\circ \in \mathbf{X}^l(\Omega), \quad l \geq 3.$$

Условия (3) и (18) обеспечивают существование единственного решения $\{\mathbf{v}(t), Q(t), \omega(t)\}$ системы уравнений (16) в функциональном пространстве $\mathbf{C}\left(t_\circ, t_*; \mathbf{B}^l(\Omega)\right)$, поэтому все следующие ниже выкладки проводятся в этом предположении.

Отметим неравенства [2]

$$\Big(\beta\,L(\mathbf{v}),\mathbf{v}\Big)_{0,2} \leq -\mu\,\inf_{\bar{\Omega}}\beta(x)\,|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,|_{0,2}^2 - \frac{1}{3}\mu\,\inf_{\bar{\Omega}}\beta(x)\,|\,\mathrm{div}\mathbf{v}\,|_{0,2}^2 +$$

$$+\mu\,|\,\nabla\beta\,|_{0,\infty}|\,\mathbf{v}(t)\,|_{0,2}\big(|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,|_{0,2} + |\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,|_{0,2}\big); \tag{19}$$

$$\left(M(\omega,\mathbf{v}),\omega\right)_{0,2} \leq -\kappa_1\,\frac{1}{c_v}\,\inf_{\bar{\Omega}}\beta(x)\,|\,\nabla\omega(t)\,|_{0,2}^2 + \kappa_1\,|\,\nabla\delta\,|_{0,\infty}|\,\omega(t)\,|_{0,2}|\,\nabla\omega(t)\,|_{0,2} +$$

$$+\frac{2}{3}\mu\,|\,\mathrm{div}\mathbf{u}\,|_{0,\infty}|\,\omega(t)\,|_{0,2}|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,|_{0,2} + 2\mu\,|\,\nabla\mathbf{u}\,|_{0,\infty}|\,\omega(t)\,|_{0,2}|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,|_{0,2}. \tag{20}$$

Кроме того, при $l \geq 3$ справедливы неравенства

$$\Big(\beta\,L(\mathbf{v}),\mathbf{v}\Big)_{l,2} \leq -\mu\,\inf_{\bar{\Omega}}\beta(x)\,\|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}^2 + \mu c_1\,\|\,\beta\,\|_{l,2}\|\,\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}^2 +$$

$$+\mu c_1\,\|\,\beta\,\|_{3,2}\|\,\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}\left(\|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2} + \|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}\right) - \frac{1}{3}\mu\,\inf_{\bar{\Omega}}\beta(x)\,\|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}^2; \tag{21}$$

[2] $(\ ,\ )_{l,2}$, и $\|\ \|_{l,2}$ — соответственно скалярное произведение и норма в $W^{l,2}(\Omega)$.

$$\Big(M(\omega,\mathbf{v}),\omega\Big)_{l,2} \le -\kappa_1 \frac{1}{c_v}\inf_{\bar\Omega}\beta(x)\,\|\,\nabla\omega(t)\,\|^2_{l,2} + L_1\,\|\,\omega(t)\,\|_{l,2}\|\,\nabla\omega(t)\,\|_{l,2} +$$

$$+\,L_2\,\|\,\omega(t)\,\|_{l,2}\|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2} + L_2\,\|\,\omega(t)\,\|_{l,2}\|\,\nabla\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2} + L_2\,\|\,\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}\|\,\nabla\omega(t)\,\|_{l,2}, \qquad (22)$$

где

$$L_1 = c_1\Big(\kappa_1\|\,\delta\,\|_{l,2} + \|\,d\,\|_{l,2} + \|\,\delta\,\|_{l,2}\|\,d\,\|_{l,2}\Big),\ L_2 = \mu c_1\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{l,2};$$

$$\Big|\Big(\alpha\,\nabla(Q+\omega),\mathbf{v}\Big)_{l,2}\Big| \le c_1\,\|\,\alpha\,\|_{l,2}\Big(\|\,\omega(t)\,\|_{l,2} + \|\,Q(t)\,\|_{l,2}\Big)\|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2} +$$

$$+c_1\,\|\,\alpha\,\|_{l,2}\Big(\|\,\omega(t)\,\|_{l,2} + \|\,Q(t)\,\|_{l,2}\Big)\|\,\mathbf{v}(t)\,\|_{l,2}. \qquad (23)$$

Постоянная c_1 в (21)–(23) зависит, вообще говоря, от области Ω. Далее, поскольку

$$\inf_{\bar\Omega}\beta(x) \ge \psi_1\Big(|\,\tilde Q\,|_{0,\infty}\Big), \quad \psi_1(\zeta) = \exp(-\zeta), \quad \zeta \ge 0,$$

а также в силу теорем вложения и оценки суперпозиций [12, 13]

$$\|\,\alpha\,\|_{l,2},\ \|\,\delta\,\|_{l,2},\ \|\,d\,\|_{l,2} \le \psi_2\Big(\|\,\tilde Q\,\|_{l,2},\ \|\,\tilde\omega\,\|_{l,2}\Big),$$ [3]

где ψ_2 — известная неотрицательная локально ограниченная функция, из (19)–(23) для решения задачи (16)–(18) вытекает следующее неравенство:

$$\|\,Z(t)\,\|^2_{l,2} + \psi_3\Big(|\,\tilde Q\,|_{0,\infty}\Big)\int\limits_{t_\circ}^{t}\Big(\|\,\nabla\mathbf{v}(s)\,\|^2_{l,2} + \|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(s)\,\|^2_{l,2} + \|\,\nabla\omega(s)\,\|^2_{l,2}\Big)\,ds \le$$

$$\le \|\,Z(t_\circ)\,\|^2_{l,2} + \psi_4\Big(\|\,\tilde Z\,\|_{l,2}\Big)\int\limits_{t_\circ}^{t}\|\,Z(s)\,\|^2_{l,2}\,ds, \qquad (24)$$

$$Z(t) = \{\mathbf{v}(t), Q(t), \omega(t)\}, \quad \tilde Z = \{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde Q, \tilde\omega\}.$$

Для решения $Z(t) = \{\mathbf{v}(t), Q(t), \omega(t)\} \in \mathbf{C}\big(t_\circ, t_*;\ \mathbf{B}^l(\Omega)\big)$, $l \ge 3$, системы уравнений вида (12_2):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)Q + \mathrm{div}\mathbf{v}\left(t - \dfrac{1}{2}\tau\right) = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\omega = 0,\ t_\circ \le t \le t_*, \end{cases} \qquad (25)$$

(в которой $\mathbf{u} \in \mathbf{Y}^l(\Omega)$, $l \ge 3$, — заданная функция, не зависящая от t) имеет место неравенство

$$\|\,Z(t)\,\|^2_{l,2} \le \|\,Z(t_\circ)\,\|^2_{l,2} + \varepsilon^2\int\limits_{t_\circ}^{t-\frac{1}{2}\tau}\|\,\mathrm{div}\mathbf{v}(s)\,\|^2_{l,2}\,ds + c_1(1+\varepsilon^{-2})\,\|\,\mathbf{u}\,\|_{l,2}\int\limits_{t_\circ}^{t}\|\,Z(s)\,\|^2_{l,2} \qquad (26)$$

($\varepsilon > 0$ — произвольное число).

[3] Условимся обозначать через ψ_i различные известные локально ограниченные функции, не оговаривая это каждый раз особо.

Обратимся теперь к задачам $\overset{\circ}{C}_\tau$ и $\overset{\circ}{D}_\tau$. Полагая в (16)–(18) $t_\circ = n\tau$, $t_* = n\tau + \dfrac{1}{2}\tau$, $\tilde{\omega} = \omega^n$, $\tilde{Q} = Q^n$, $\mathbf{u} = \mathbf{v}^n$, $\mathbf{v}_\circ = \mathbf{v}^n$, $Q_\circ = Q^n$, $\omega_\circ = \omega^n$, $\alpha = R/a^n$, $\beta = b^n/a^n$, $\delta = b^n/c_v$ (см. формулы (11_1) и (12_1)), для решений $Z_\tau(t) = \{\mathbf{v}_\tau(t), Q_\tau(t), \omega_\tau(t)\}$ системы (12_1) согласно (24) получаем неравенство

$$\| Z_\tau(t) \|_{l,2}^2 + \psi_3\left(|\,\tilde{Q}^n|_{0,\infty}\right) \int\limits_{n\tau}^{t} \left(\| \nabla \mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \operatorname{div}\mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \nabla\omega_\tau(s) \|_{l,2}^2\right) ds \le$$

$$\le \| Z_\tau^n \|_{l,2}^2 + \psi_4\left(\| Z_\tau^n \|_{l,2}\right) \int\limits_{n\tau}^{t} \| Z_\tau(s) \|_{l,2}^2 \, ds; \tag{27}$$

$$n\tau \le t \le n\tau + \frac{1}{2}\tau, \quad l \ge 3.$$

Из (27) и неравенства Гронуолла, в частности, следует оценка

$$\| Z_\tau(t) \|_{l,2}^2 \le \| Z_\tau^n \|_{l,2}^2 \exp\left\{\psi_4\big(\| Z_\tau^n \|_{l,2}\big)\frac{\tau}{2}\right\}, \quad n\tau \le t \le n\tau + \frac{1}{2}\tau, \ \ l \ge 3. \tag{28}$$

Полагая в (25), (26)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{2}\,\psi\big(|\, Q_\tau^n \,|_{0,\infty}\big)$$

и принимая во внимание оценку (28), для решений $Z_\tau = \{\mathbf{v}_\tau, Q_\tau, \omega_\tau\}$ системы (12_2) получаем неравенство

$$\| Z_\tau(t) \|_{l,2}^2 \le \| Z^{n+\frac{1}{2}} \|_{l,2}^2 + \frac{1}{2}\,\psi_3\left(|\, Q_\tau^n \,|_{0,\infty}\right) \int\limits_{n\tau}^{t-\frac{1}{2}\tau} \| \operatorname{div}\mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 \, ds +$$

$$+\psi_5\big(\| Z_\tau^n \|_{l,2}\big) \int\limits_{n\tau+\frac{1}{2}\tau}^{t} \| Z_\tau(s) \|_{l,2}^2 \, ds, \tag{29}$$

$$n\tau + \frac{1}{2}\tau \le t \le n\tau + \tau.$$

Из (29) вытекают неравенства

$$\| Z_\tau(t) \|_{l,2}^2 \le \| Z_\tau^{n+\frac{1}{2}} \|_{l,2}^2 \exp\left\{\psi_5\left(\| Z_\tau^n \|_{l,2}\right)\frac{\tau}{2}\right\}, \quad n\tau + \frac{1}{2}\tau \le t \le n\tau + \tau. \tag{30}$$

Таким образом, из (28) и (29) следует, что на промежутке $n\tau \le t \le n\tau + \tau$ справедливо неравенство

$$\| Z_\tau(t) \|_{l,2} \le \| Z_\tau^n \|_{l,2} \exp\left\{\psi_6\Big(\| Z_\tau^n \|_{l,2}\Big)\tau\right\}, \quad n = 0, \ldots, N-1. \tag{31}$$

Соотношения (31) позволяют утверждать существование промежутка времени $[0, T_*]$[4] и постоянной K_1, зависящих от нормы $\| Z_0 \|_{l,2}$ начального вектора в (13), но не зависящих

[4] Величины T_* и $\| Z_0 \|_{l,2}$ связаны неравенством $\psi_5\left(3\,\| Z_0 \|_{l,2}\right) T_* \le \ln 2$, и в этом смысле априорная оценка (32) носит локальный по времени характер.

от параметра τ, таких, что

$$\sup_{0\le t\le T_*} \| Z_\tau(t) \|_{l,2} \le K_1, \quad l \ge 3. \tag{32}$$

С учетом этой оценки из неравенств (27), (29) следует, что

$$\| Z_\tau^{n+1} \|_{l,2}^2 + K_2 \int\limits_{n\tau}^{n\tau+\frac{1}{2}\tau} \left(\| \nabla \mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \operatorname{div}\mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \nabla\omega_\tau(s) \|_{l,2}^2\right) ds \le$$

$$\le \| Z_\tau^n \|_{l,2}^2 + K_2\,\tau, \quad n = 0, \dots N-1, \quad N\tau = T_*, \tag{33}$$

где постоянная K_2 зависит только от K_1 из (32).

Суммируя неравенства (33) по всем $0 \le n \le N-1$, получаем оценку

$$\sum_{n=0}^{N-1} \int\limits_{n\tau}^{n\tau+\frac{1}{2}\tau} \left(\| \nabla \mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \operatorname{div}\mathbf{v}_\tau(s) \|_{l,2}^2 + \| \nabla\omega_\tau(s) \|_{l,2}^2\right) ds \le K_2. \tag{34}$$

Из оценок (32), (34) в силу систем уравнений (12_1) и (12_2) следуют равномерные по τ неравенства

$$\int\limits_0^{T_*} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{v}_\tau}{\partial t}(t) \right\|_{l-1,2}^2 + \left\| \frac{\partial \omega_\tau}{\partial t}(t) \right\|_{l-1,2}^2 \right) dt \le K_2, \quad \sup_{0\le t\le T_*} \left\| \frac{\partial Q_\tau}{\partial t}(t) \right\|_{l-1,2} \le K_2. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь задачи C_τ и D_τ, когда на дробных шагах решаются нелинейные уравнения. Для системы (11_1) имеет место неравенство (27) при условии, что параметр τ удовлетворяет условию

$$\psi_4\Big(2 \| Z_\tau^n \|_{l,2}\Big) \frac{\tau}{2} \le \ln 2.^5 \tag{36}$$

Опираясь на неравенство (26), для системы (25) с помощью аналогичных рассуждений нетрудно убедиться в том, что для квазилинейной системы (11_2) справедливо неравенство (29) для τ, удовлетворяющих условию

$$\psi_5\Big(2\| Z_\tau^n \|_{l,2}\Big) \frac{\tau}{2} \;\le\; \ln 2.$$

Все дальнейшие рассуждения полностью аналогичны приведенным выше, и поэтому можно утверждать, что для последовательности решений Z_τ задач C_τ, D_τ справедливы оценки (32) и (35), если τ достаточно малы:

$$\tau \le \tau_\circ, \quad \psi_5\,(2\| Z_\tau^n \|_{l,2})\, \frac{\tau}{2} \le \ln 2.$$

[5] Объем статьи не позволяет, к сожалению, привести доказательства всех утверждений полностью.

4. Предельный переход

Докажем сходимость при $\tau \to 0$ решений расщепленных задач $\overset{\circ}{C}_\tau$, C_τ и $\overset{\circ}{D}_\tau$, D_τ к соответствующему точному решению на том промежутке времени, на котором имеют место равномерные (по τ) априорные оценки (32) и (35)[6].

Поскольку вектор-функция $Z_\tau(t) = \{\mathbf{v}_\tau(t), Q_\tau(t), \omega_\tau(t)\}$ удовлетворяет системе (12_1), (12_2), соответствующие средние функции

$$\hat{\mathbf{v}}_\tau = T_\tau(\mathbf{v}_\tau|t), \quad \hat{Q}_\tau = T_\tau(Q_\tau|t), \quad \hat{\omega}_\tau = T_\tau(\omega_\tau|t), \quad T_\tau(f|t) = \frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} f(s)ds, \tag{37}$$

являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{Q}_\tau}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}}_\tau \cdot \nabla)\hat{Q}_\tau + \operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}_\tau = \Phi_\tau, \\ a(\hat{\omega}_\tau)\left[\dfrac{\partial \hat{\mathbf{v}}_\tau}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}}_\tau \cdot \nabla)\hat{\mathbf{v}}_\tau\right] + R\,\nabla(\hat{\omega}_\tau + \hat{Q}_\tau) = b\,(\hat{Q}_\tau, \hat{\omega}_\tau)\,L(\hat{\mathbf{v}}_\tau) + \boldsymbol{\psi}_\tau, \\ c_v\left[\dfrac{\partial \hat{\omega}_\tau}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}}_\tau \cdot \nabla)\hat{\omega}_\tau\right] + R\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}_\tau = \\ = b\,(\hat{Q}_\tau, \hat{\omega}_\tau)\Big[\kappa_1 \operatorname{div}\,(d(\hat{\omega}_\tau)\cdot\nabla\hat{\omega}_\tau) - \dfrac{2}{3}\mu\Big(\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}_\tau\Big)^2 + 2\mu\, D(\hat{\mathbf{v}}_\tau) : D(\hat{\mathbf{v}}_\tau)\Big] + G_\tau. \end{cases} \tag{38}$$

Выражения для входящих в эти уравнения функций Φ_τ, $\boldsymbol{\psi}_\tau$, G_τ весьма громоздки, и по этой причине здесь их не приводим. Отметим лишь, что в силу неравенств (32) и (35) они допускают оценки

$$\sup_t \|\, \Phi_\tau(t)\,\|_{l-2,2} \le K\sqrt{\tau}, \ \sup_t \|\, \boldsymbol{\psi}_\tau(t)\,\|_{l-3,2} \le K\sqrt{\tau}, \quad \sup_t \|\, G_\tau(t)\,\|_{l-3,2} \le K\sqrt{\tau}. \tag{39}$$

Оценки (32), (35), (39) позволяют совершить предельный переход в системе (38), в результате которого получим, что предельные функции $(\mathbf{v}(t), Q(t), \omega(t))$ удовлетворяют системе уравнений, эквивалентной (5).

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Если начальные функции в (13) и (14) удовлетворяют условиям*

$$\mathbf{v}_\circ \in \mathbf{Y}^l(\Omega), \ \ Q_\circ,\ \omega_\circ \in \mathbf{X}^l,$$

то на некотором промежутке $0 \le t \le T_\circ$ *последовательность решений* $\{\mathbf{v}_\tau(t), Q_\tau(t), \omega_\tau(t)\} \in \mathbf{L}^\infty(0,T;\ \mathbf{B}^l(\Omega))$ *задач* $\overset{\circ}{C}_\tau$, C_τ *и* $\overset{\circ}{D}_\tau$, D_τ *при* $\tau \to 0$ *сходится слабо в пространстве* $\mathbf{L}^\infty(0,T;\mathbf{B}^l(\Omega))$ *и сильно — в пространстве* $\mathbf{C}(0,T;\mathbf{B}^{l-1}(\Omega))$ *к точному решению задачи (5), (6), (8) или задачи (5), (6), (9), (10).*

5. Скорость сходимости решений задач C_τ, D_τ

В силу систем (38) и (5) для разности

$$\begin{gathered} V = V_\tau = Z(t) - \hat{Z}_\tau(t) = \{\mathbf{u}_\tau, q_\tau, \sigma_\tau\}, \\ \mathbf{u}_\tau = \mathbf{v}(t) - \hat{\mathbf{v}}_\tau(t), \quad q_\tau = Q(t) - \hat{Q}_\tau(t), \quad \sigma_\tau = \omega(t) - \hat{\omega}_\tau(t) \end{gathered} \tag{40}$$

[6] Если заранее предположить существование решения данного класса на некотором промежутке времени $(0,T)$, то на этом же промежутке имеет место и сходимость рассматриваемых схем расщепления.

(вектор-функция $\hat{Z}_\tau(t)$ определена в (37), а $Z(t)$ — точное решение), получаем следующую линейную систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial q_\tau}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)q_\tau + \operatorname{div}\mathbf{u}_\tau + \overset{(1)}{\boldsymbol{\alpha}}\ \mathbf{u}_\tau = -\Phi_\tau,\\ &\alpha(\omega(t))\left[\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\tau\right] + R\,\nabla(q_\tau+\sigma_\tau) = b(Q,\omega)\,L(\mathbf{u}_\tau) +\\ &+ \overset{(1)}{\beta}_\tau\ \mathbf{u}_\tau + \overset{(2)}{\beta}_\tau\ q_\tau + \overset{(3)}{\beta_3}\ \omega_\tau - \psi_\tau;\\ &c_v\left[\frac{\partial \sigma_\tau}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\sigma_\tau\right] + \overset{(1)}{j}_\tau \operatorname{div}\mathbf{u}_\tau = \operatorname{div}\left(d(\omega)\cdot\nabla\sigma_\tau + \overset{(2)}{\mathbf{j}}_\tau\ \sigma_\tau\right) +\\ &+ \overset{(3)}{j}_\tau\ q_\tau + \overset{(4)}{j}_\tau\ \omega_\tau + \Gamma_\tau : D(\mathbf{u}_\tau) - G_\tau, \end{aligned}\right. \tag{41}$$

где

$$\overset{(1)}{\boldsymbol{\alpha}}_\tau = \nabla\hat{Q}_\tau,\quad \overset{(1)}{\beta}_\tau = -\alpha(\omega)\,\nabla\hat{\mathrm{v}}_\tau,\quad \overset{(2)}{\beta}_\tau = -\overset{(1)}{J}_\tau(b)L(\hat{\mathbf{v}}_\tau);$$

$$\overset{(3)}{\beta}_\tau = -\overset{(2)}{J}_\tau(\alpha)\left[\frac{\partial\hat{\mathbf{v}}_\tau}{\partial t} + (\hat{\mathbf{v}}_\tau\cdot\nabla)\hat{\mathbf{v}}_\tau\right] - \overset{(2)}{J}_\tau(b)L(\hat{\mathbf{v}}_\tau);$$

$$\overset{(1)}{J}_\tau(b) = \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial Q}\left(Q_\tau^\lambda,\omega_\tau^\lambda\right)\,d\lambda,\quad \overset{(2)}{J}_\tau(b) = \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial \omega}\left(Q_\tau^\lambda,\omega_\tau^\lambda\right)\,d\lambda;$$

$$Q_\tau^\lambda = Q + \lambda(Q-\hat{Q}_\tau),\quad \omega_\tau^\lambda = \omega + \lambda(\omega - \hat{\omega}_\tau); \tag{42}$$

$$\overset{(1)}{j}_\tau = \frac{2}{3}\mu\, b(Q,\omega)[\operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}_\tau] + R;$$

$$\overset{(2)}{j}_\tau = \overset{(2)}{J}_\tau(d)\,\nabla\hat{\omega}_\tau,\quad \overset{(3)}{j}_\tau = \overset{(1)}{J}_\tau(b)\,M_\circ(\hat{\mathrm{Z}}_\tau),\quad \overset{(4)}{j}_\tau = \overset{(2)}{J}_\tau(b)\,M_\circ(\hat{Z}_\tau);$$

$$M_\circ(\hat{Z}_\tau) = \kappa_1\operatorname{div}(d(\hat{\omega}_\tau)\cdot\nabla\hat{\omega}_\tau) - \frac{2}{3}\mu\,(\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}_\tau)^2 + 2\mu\,D(\hat{\mathbf{v}}_\tau):D(\hat{\mathbf{v}}_\tau);$$

$$\Gamma_\tau = 2\mu\, b(Q,\omega)\,[D(\mathbf{v}) + D(\hat{\mathbf{v}}_\tau)]\,.$$

Полученные ранее оценки (32) и (35) позволяют получить следующее неравенство:

$$\begin{gathered}\|\,V_\tau(t)\,\|^2_{\mathbf{W}^{l-2,2}(\Omega;\,a(\omega))} + \mu_1\int\limits_0^t\left(\|\,\nabla\mathbf{u}_\tau(s)\,\|^2_{l-2,2} + \|\,\operatorname{div}\mathbf{u}_\tau(s)\,\|^2_{l-2,2} + \|\,\nabla\sigma_\tau(s)\,\|^2_{l-2,2}\right)ds \le\\ \le K\int\limits_0^t\left(\|\,V_\tau(s)\,\|^2_{\mathbf{W}^{l-2,2}(\Omega);\,a(\omega))} + \tau\right)ds,\\ \|\,V_\tau(t)\,\|^2_{\mathbf{W}^{l-2,2}(\Omega;\,a(\omega))} = \sum_{|\alpha|\le\ l-2}\int\limits_\Omega\left(|\,D^\alpha q_\tau\,|^2 + a(\omega)|\,D^\alpha\mathbf{u}_\tau\,|^2 + c_v\,|\,D^\alpha\sigma_\tau\,|^2\right)\,dx,\\ \mu_1, K = \mathrm{const} > 0.\end{gathered} \tag{43}$$

Из этого неравенства с учетом того, что

$$\|\,V_\tau(0)\,\|^2_{\mathbf{W}^{l-2,2}(\Omega;\,a(\omega(0)))}\ \le K\tau,$$

следует оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \| V_\tau(t) \|^2_{\mathbf{W}^{l-2,2}(\Omega;\, a(\omega(0)))} \le K\tau. \tag{44}$$

Из (43) и (44) в свою очередь получаем, что

$$\int_0^T (\| \mathbf{u}_\tau(s) \|^2_{l-1,2} + \| \sigma_\tau(s) \|^2_{l-1,2})\, ds \le K\tau.$$

Таким образом, доказана следующая теорема о скорости сходимости.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то справедливы неравенства*

$$\| \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_\tau(t) \|^2_{l-2,2} + \| Q(t) - Q_\tau(t) \|^2_{l-2,2} + \| \omega(t) - \omega_\tau(t) \|^2_{l-2,2} \le K\tau,$$

$$\| \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_\tau(t) \|^2_{l-1,2} + \| Q(t) - Q_\tau(t) \|^2_{l-1,2} + \| \omega(t) - \omega_\tau(t) \|^2_{l-1,2} \le K\sqrt{\tau},$$

$$\int_0^T (\| \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_\tau(t) \|^2_{l-1,2} + \| \omega(t) - \omega_\tau(t) \|^2_{l-1,2})\, dt \le K\tau,$$

где постоянная $K > 0$ определяется данными задачи и не зависит от параметра τ, $\{\mathbf{v}_\tau, Q_\tau, \omega_\tau\}$ — решения расщепленных задач, а $\{\mathbf{v}, Q, \omega\}$ — соответствующего точного решения.

Список литературы

[1] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод “крупных частиц” для газодинамических расчетов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 1. С. 182–207.

[2] Давыдов Ю.М. Расчет обтекания тел произвольной формы методом “крупных частиц” // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 1056–1063.

[3] Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод “крупных частиц” в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.

[4] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 518 с.

[5] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложений к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

[6] Анучина Н.Н. О методах расчета течений сжимаемой жидкости с большими деформациями // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1970. Т. 1, № 4. С. 3–8.

[7] Харлоу Ф.Н. Численный метод частиц в ячейках для задач газовой динамики // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 316–342.

[8] Кучер Н.А. Метод слабой аппроксимации и анализ схем расщепления в газовой динамике: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1992. 300 с.

[9] Кучер Н.А. Об обосновании схем расщепления в методе “крупных частиц” // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 85. С. 52–73.

[10] Вайгант В.А. Пример несуществования “в целом” по времени решений уравнений Навье — Стокса сжимаемой вязкой баротропной жидкости // Докл. РАН. 1994. Т. 339. № 2. С. 155–156.

[11] Лионс Ж.-Л. Методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 587 с.

[12] Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 4. С. 179–238.

[13] Вольперт А.И., Худяев С.И. О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 87, № 4. С. 504–528.

Поступила в редакцию 20 февраля 2006 г.,
в переработанном виде — 18 апреля 2006 г.