

# ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ ДВУ- И ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

М. Ю. БАЛАГАНСКИЙ, Ю. Н. ЗАХАРОВ  
*Кемеровский государственный университет, Россия*  
e-mail: m.balagansky@polenet.ru

A comparison of numerical solutions for 2D and 3D incompressible viscous fluid flows shows that there are fundamental differences between them. In the 3D case there are no stagnant zones behind obstacles that are typical for the 2D flows, moreover in the 3D case a complex patterns of vertical jets are observed.

Численное решение трехмерных задач до сих пор представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому очень часто о том, как может выглядеть трехмерное течение, судят по решению двумерных задач. При этом неявно предполагается, что при достаточном увеличении области по одной координате трехмерное течение становится близким к двумерному. Такой подход, нам представляется, не имеет достаточного ни теоретического, ни численного, ни экспериментального обоснования. Этому, в частности, способствует невозможность адекватно отобразить внутреннее трехмерное течение жидкости на двумерную плоскость (экран, бумагу), а это может привести к неправильному пониманию существа трехмерного течения.

Целью настоящей работы является сравнение дву- и трехмерных расчетов решения ряда задач течений вязкой однородной несжимаемой жидкости.

**Постановка задачи.** Для анализа характера течения вязкой несжимаемой жидкости выбраны четыре типичные задачи: 1) течение в каверне с крышкой, движущейся с постоянной скоростью; 2) течение в бесконечном канале с уступом; 3) течение над траншеей; 4) обтекание препятствия равномерным на бесконечности потоком.

Эти задачи решались в двумерном случае относительно как скоростей и давления, так и функции тока и завихренности. В трехмерном случае решение получено для системы уравнений Навье — Стокса, записанной относительно скоростей и давления.

Приведем постановки задач в дву- и трехмерном случаях (рис. 1–8).

**Метод решения.** В настоящей работе мы не ставили себе целью подробно описать метод решения задач 1.1–1.4, 2.1–2.4. Изложим лишь основные этапы. Более подробно с методом и результатами расчетов вышеизложенных задач можно ознакомиться в [1–4].

В области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$  введем прямоугольную неравномерную согласованную с границей сетку  $\Omega_h$ . Аппроксимируем систему уравнений Навье — Стокса на сетке  $\Omega_h$  какой-либо разностной схемой первого или второго порядка. В задачах протекания 1.2

и 1.3, 2.2 и 2.3 и задачах обтекания 1.4 и 2.4 на границе  $\Gamma_4$  (см. рис. 2–4, 6–8) для замыкания разностной задачи мы использовали аппроксимацию самой системы уравнений внутрь области  $\Omega$ .

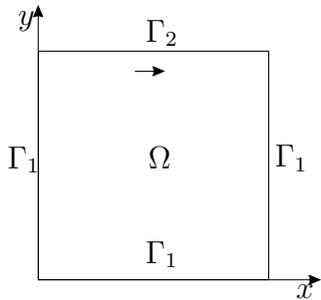


Рис. 1. Задача 1.1. Течение в квадратной камере;  $u_1 = u_2 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = 1, u_2 = 0$  на  $\Gamma_2$ .

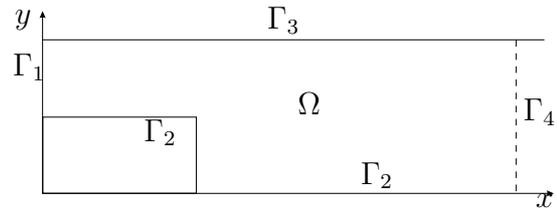


Рис. 2. Задача 1.2. Течение в бесконечном канале с уступом;  $u_1$  — параболический профиль,  $u_2 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = u_2 = 0$  на  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

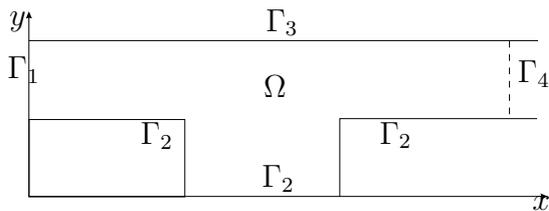


Рис. 3. Задача 1.3. Течение над траншеей;  $u_1$  — параболический профиль;  $u_2 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = u_2 = 0$  на  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

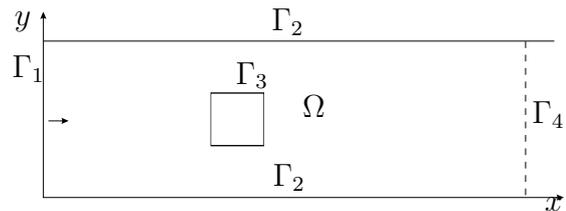


Рис. 4. Задача 1.4. Обтекание квадрата равномерным на бесконечности потоком;  $u_1 = 1, u_2 = 0$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ;  $u_1 = u_2 = 0$  на  $\Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

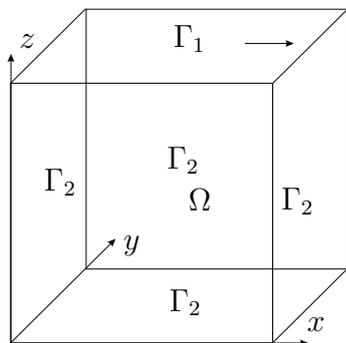


Рис. 5. Задача 2.1. Течение в кубической камере;  $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_2$ .

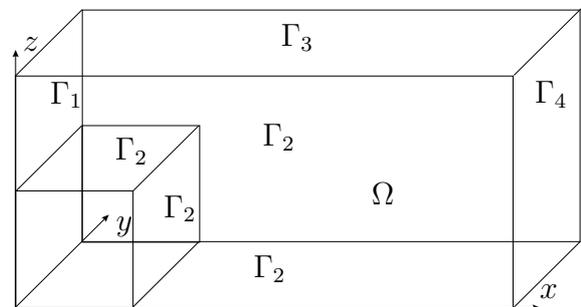


Рис. 6. Задача 2.2. Течение в призматическом канале с уступом;  $u_1$  — параболический профиль,  $u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0, u_3 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

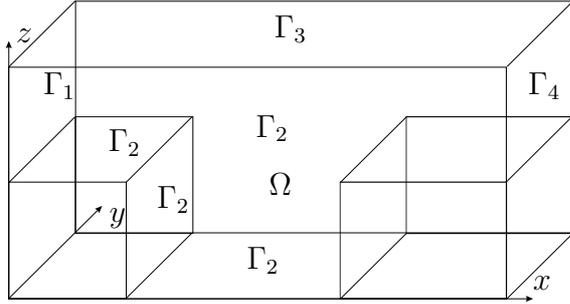


Рис. 7. Задача 2.3. Течение над призматической траншеей;  $u_1$  — параболический профиль,  $u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_1$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_2 \cup \Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0, u_3 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$ .

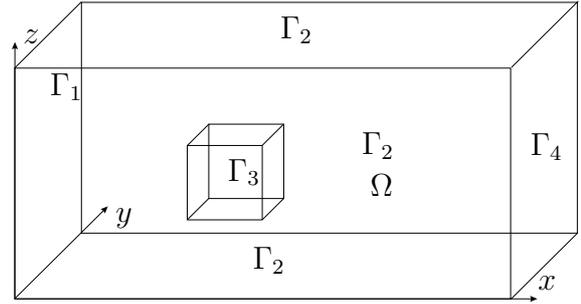


Рис. 8. Задача 2.4. Обтекание кубика равномерным на бесконечности потоком;  $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ;  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$  на  $\Gamma_3$ ;  $u_2 \rightarrow 0, u_3 \rightarrow 0$  при  $x_1 \rightarrow \infty$

В итоге, обозначив вектор решения разностной схемы размерности  $m$  через  $\mathbf{u}$ , получим систему билинейных уравнений

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где оператор  $A$  линеен по каждому аргументу.

Для решения этой системы используется метод минимальных невязок

$$\mathbf{u}^{n+1/2} = \mathbf{u}^n - \tau_{n+1}(A(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^n) - \mathbf{f}); \quad (2a)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1/2} + \alpha_{n+1}\mathbf{z}^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2b)$$

где  $\mathbf{z}^n$  — некоторый произвольный вектор;  $\tau_{n+1}, \alpha_{n+1}$  — итерационные параметры, причем  $\tau_{n+1} = \text{const}$ , а  $\alpha_{n+1}$  может быть и диагональной матрицей. Параметр  $\tau_{n+1}$  выбирается из условия минимума

$$\|\mathbf{r}^{n+1/2}\| = \|A(\mathbf{u}^{n+1/2}, \mathbf{u}^{n+1/2}) - \mathbf{f}\|.$$

Пусть  $\alpha_{n+1}$  — диагональная матрица. Перепишем (2b) в следующем виде:

$$\mathbf{u}_{(i)}^{n+1} = \mathbf{u}_{(i-1)}^{n+1} + \alpha_{n+1}^{(i)}\mathbf{z}_{(i)}^n, \quad i = 1, \dots, m,$$

где  $\mathbf{u}_{(0)}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1/2}$ ,  $\mathbf{u}_{(m)}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1}$ ,  $\mathbf{z}_{(i)}^n = (0, \dots, 0, z_i^n, 0, \dots, 0)$ , элементы  $\alpha_{n+1}^{(i)}$  выбираются последовательно из условия минимума нормы соответствующей невязки  $\mathbf{r}_{(i)}^{n+1} = A(\mathbf{u}_{(i)}^{n+1}, \mathbf{u}_{(i)}^{n+1}) - \mathbf{f}$  так, что у каждой компоненты вектора  $\mathbf{u}^{n+1}$  будет свой оптимальный итерационный параметр. Все эти итерационные параметры вычисляются по явным формулам Кардано как корни кубического уравнения. Такой выбор  $\tau_{n+1}$  и  $\alpha_{n+1}$  обеспечивает убывание  $\|\mathbf{r}^{n+1}\|$  независимо от начального приближения (о способах выбора  $\alpha_{n+1}$  см. [4]). Итерационный процесс останавливается, когда выполняется неравенство  $\|\mathbf{r}^n\| \leq \varepsilon$ . Правильность расчетов в задачах протекания и обтекания 1.2–1.4 и 2.2–2.4 проверялась путем решения этих задач в увеличенной по сравнению с  $\Omega$  области  $\Omega_1$  и сравнения полученных решений в общей области  $\Omega$ . Как оказалось, замыкание разностной задачи путем аппроксимации решаемой системы на границе  $\Gamma_4$  позволяет без ущерба качеству приближенного решения существенно уменьшить область  $\Omega$ .

**Результаты расчетов.** Прежде чем обсуждать результаты сравнительных расчетов, следует отметить, что полученные нами решения как в двумерном, так и в трехмерном

случае сравнивались с решениями, полученными другими авторами (см. [5–10] и приведенную там библиографию). Это сопоставление показало, что полученные нами результаты качественно и количественно совпадают с известными расчетами. Целью проведенных расчетов является выяснение соответствий и различий между дву- и трехмерными течениями на достаточно простых, хорошо изученных в двумерном случае задачах.

Заметим, что при визуализации двумерных течений мы использовали изолинии функции тока, а в трехмерном случае — треки частиц, позволяющие проследить движение отмеченной точки жидкости по всей области решения.

Очень часто при визуализации трехмерных течений используют векторные изображения. Но, как видно из рис. 9, трехмерное течение, отображенное в виде двумерных векторов на плоскость, очень похоже на двумерное, приведенное на рис. 10. Даже отображение треков на двумерную плоскость может быть похоже на двумерное течение (рис. 10 и 11). На самом деле, течение в трехмерной каверне имеет сложную вихревую структуру. Это видно как из результатов модельного эксперимента [12] (рис. 12), так и из результа-

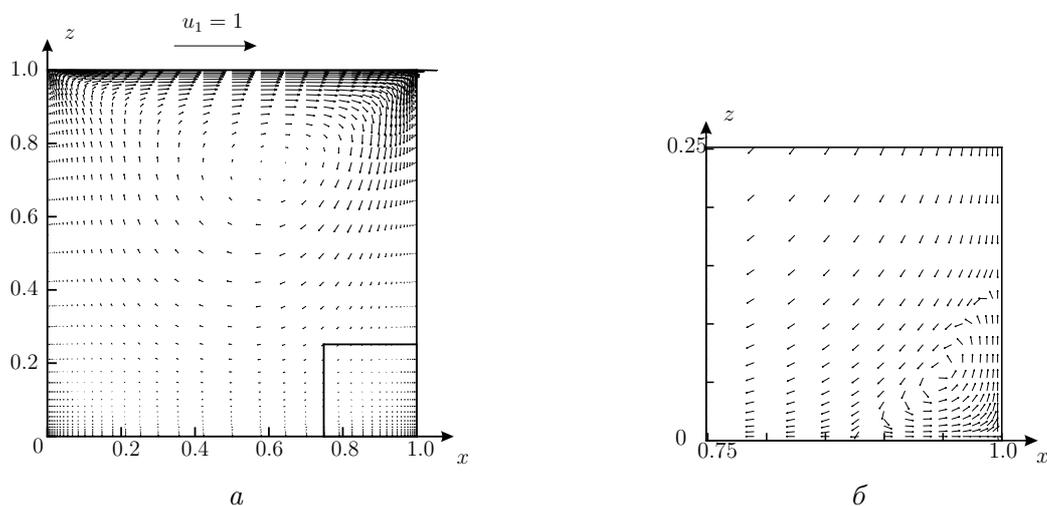


Рис. 9. Задача 2.1;  $\nu = 0.01$ : *a* — проекция вектора решения на плоскость  $y = 1/2$ ; *b* — увеличение изображения векторов течения в выделенной области.

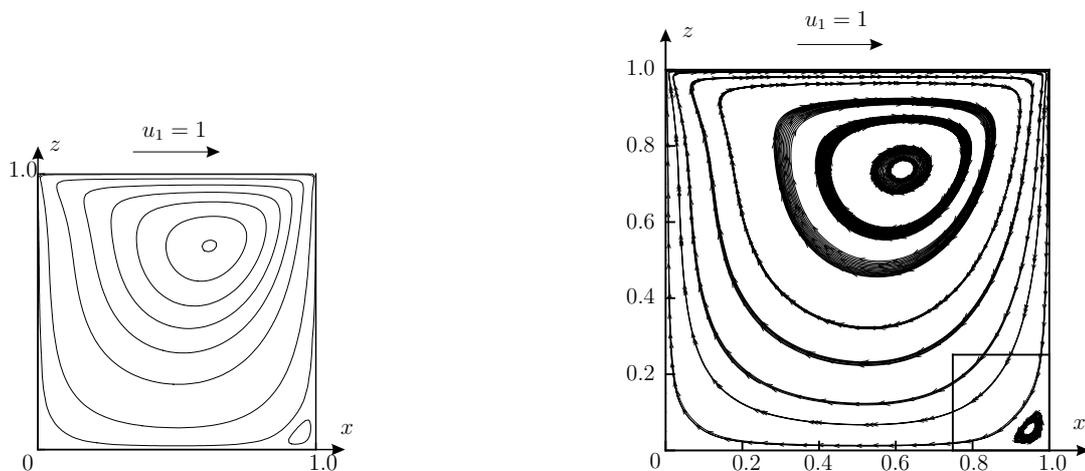


Рис. 10. Задача 1.1;  $\nu = 0.01$ ; изолинии функции тока.

Рис. 11. Задача 2.1;  $\nu = 0.01$ ; треки частиц, отображенные на плоскость  $Oxz$ .

тов численных экспериментов [5, 7–10] (рис. 13 и 14). При увеличении ширины каверны характер течения не меняется (рис. 15).

Аналогичный результат имеет место и при решении задач 2.2–2.4. Например, в двумерном течении в канале с уступом (задача 1.2) за уступом образуются основной и вторичные вихри и огибающий их внешний поток (рис. 16) [11].

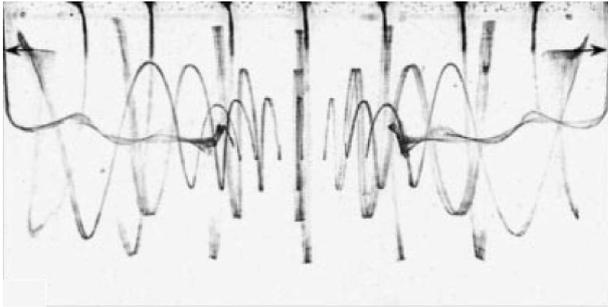


Рис. 12. Результаты модельного эксперимента [12].

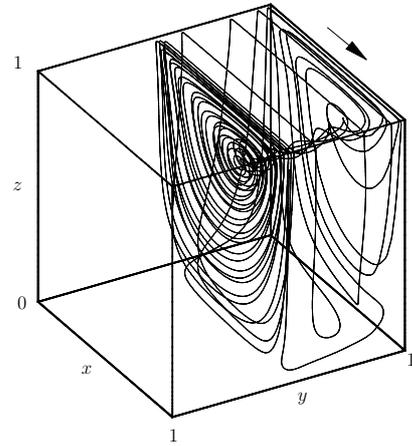


Рис. 13. Задача 2.1;  $\nu = 0.01$ ; трек одной частицы, внесенной вблизи верхней грани.

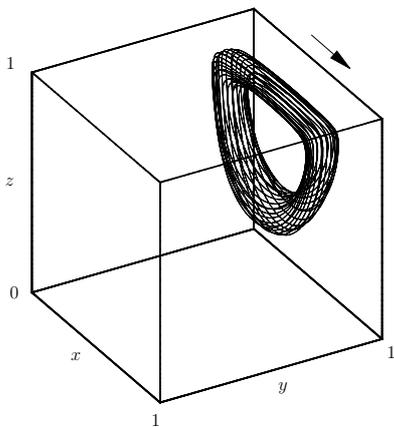


Рис. 14. Задача 2.1;  $\nu = 0.01$ ; трек частицы, внесенной в зоне заблокированного течения.

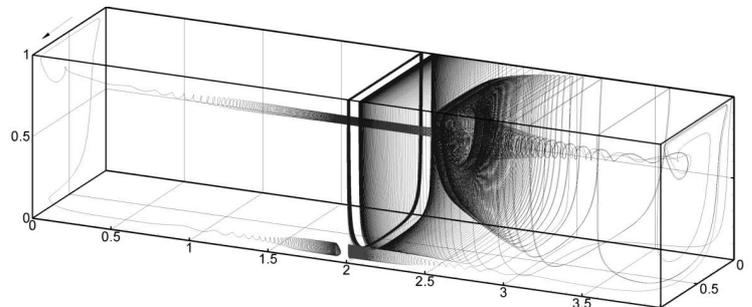


Рис. 15. Задача 2.1;  $\nu = 0.01$ ; треки нескольких частиц, внесенных в различных точках широкой каверны.

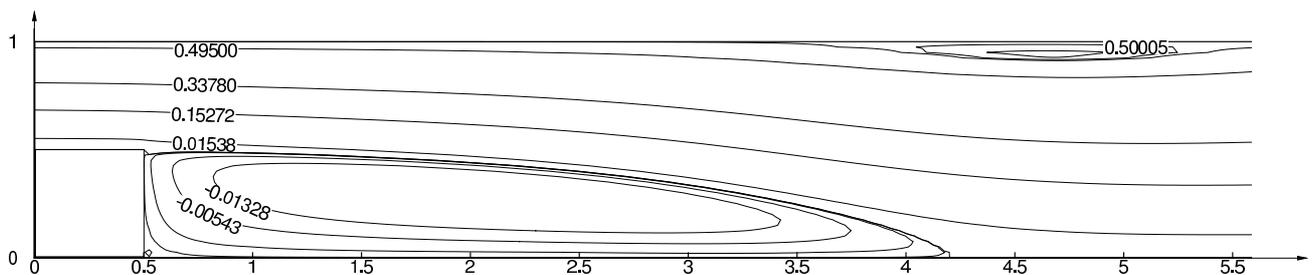


Рис. 16. Задача 1.2;  $\nu = 0.0025$ .

В трехмерном случае застойной зоны за уступом не обнаруживается (рис. 17 и 18). Частицы жидкости, находящиеся вблизи боковых граней, за уступом закручиваются в вихревую струю и выходят вблизи центра канала. А частицы жидкости, находящиеся в середине канала, не входят за уступ, а обтекают его сверху.

Течение в призматической траншее (задача 2.3) имеет аналогичный характер. Однако втекание в траншею, в отличие от течения в канале с уступом, происходит в середине канала, а вытекание — вблизи боковых граней. Частицы жидкости внешнего потока вблизи стенок вообще не попадают в траншею. При этом ни ширина, ни глубина траншеи, ни скорость жидкости на входе принципиально течение не изменяют (рис. 19 и 20). При этом отображение треков на плоскость похоже на двумерное течение (рис. 21 и 22).

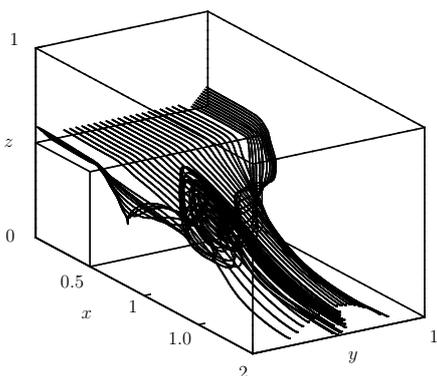


Рис. 17. Задача 2.2;  $\nu = 0.02$ .

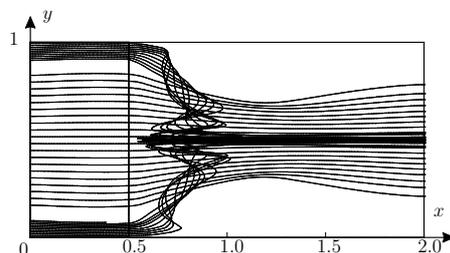


Рис. 18. Задача 2.2;  $\nu = 0.02$ . Вид со стороны оси  $Oz$ .

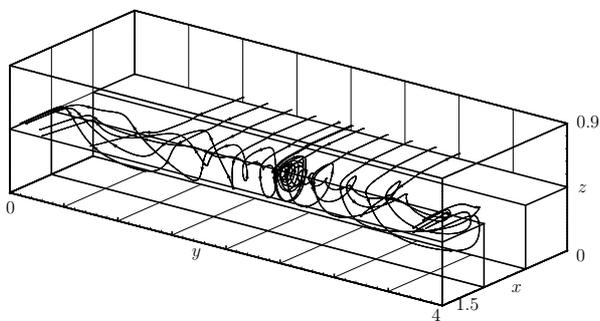


Рис. 19. Задача 2.3;  $\nu = 0.01$ .

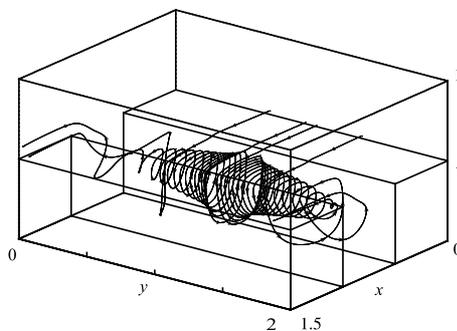


Рис. 20. Задача 2.3;  $\nu = 0.01$ .

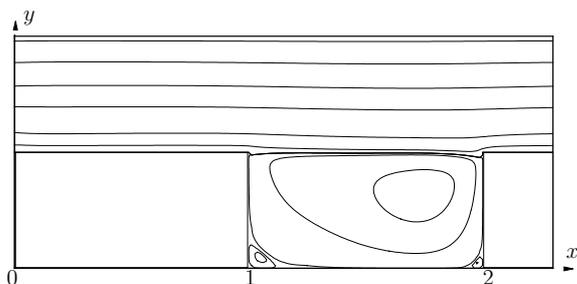


Рис. 21. Задача 1.3;  $\nu = 0.01$ .

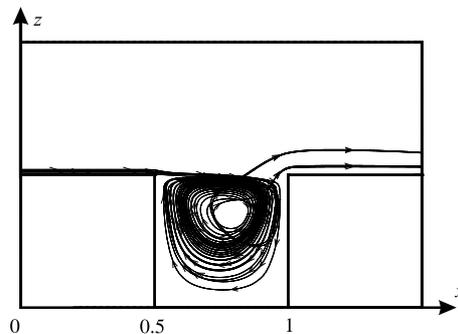


Рис. 22. Задача 2.3;  $\nu = 0.01$ .

Ясно, что характер течения определяется краевыми условиями. Как видно из предыдущих расчетов, наличие боковых твердых стенок существенно влияет на характер трехмерного течения независимо от ширины трехмерной области решения. Но не только наличие внешних границ, на наш взгляд, приводит к различию дву- и трехмерных течений. Само трехмерное течение по своей сути отличается от двумерного. Например, если рассмотреть картину течения при обтекании кубика равномерным на бесконечности потоком (задача 2.4), то выясняется, что трехмерное течение имеет принципиально другую структуру, чем двумерное (рис. 23 и 24).

За препятствием формируется сложное вихревое течение. Частицы жидкости, находящиеся вблизи верхней, нижней и боковых граней куба, вовлекаются в течение за препятствием, закручиваются и перемещаются в сторону углов задней стенки куба. Там они раскручиваются и продолжают движение вниз по потоку (см. рис. 23). Чтобы не загромождать рисунок, оставлены лишь треки частиц, движущихся вблизи верхней грани препятствия. Решение задачи симметрично по осям  $Oy$  и  $Oz$ , поэтому траектории частиц, движущихся вблизи остальных граней, аналогичны показанным. Частицы жидкости, находящиеся в отдалении от препятствия, в вихревое течение не вовлекаются (см. рис. 24).

Если привести треки частиц в плоскости, параллельной оси  $Ox$ , то получающаяся картина похожа на двумерное течение (рис. 25 и 26).

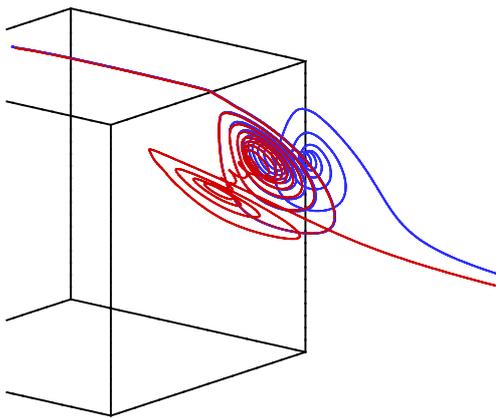


Рис. 23. Задача 2.4;  $\nu = 0.01$ .

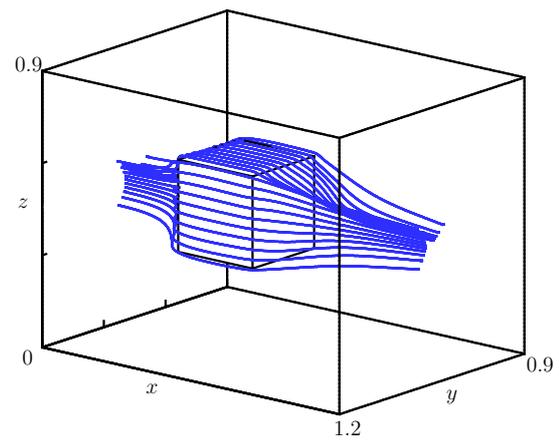


Рис. 24. Задача 2.4;  $\nu = 0.01$ .

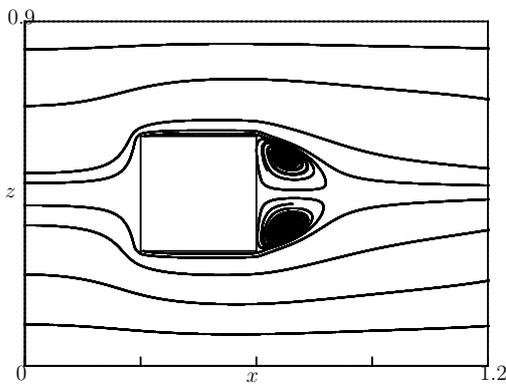


Рис. 25. Задача 2.4;  $\nu = 0.01$ ; треки частиц.

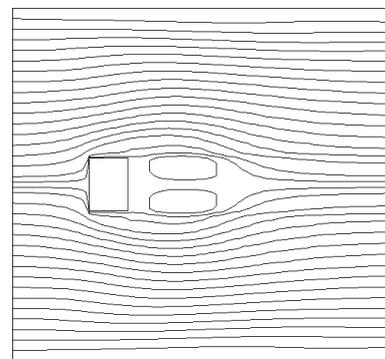


Рис. 26. Задача 2.4;  $\nu = 0.01$ ; изолинии — функции тока.

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что, во-первых, дву- и трехмерные течения имеют принципиально разную структуру и суть различий заключается в том, что в трехмерном течении решаемых нами задач нет застойных зон, во-вторых, для правильного понимания развития трехмерных течений необходимо использовать объемную визуализацию, например, с помощью треков частиц.

## Список литературы

- [1] ЗАХАРОВ Ю.Н. Об одном методе решения уравнений с краевыми условиями на бесконечности // Вычисл. технологии. 1993. Т. 2, № 7. С. 56–68.
- [2] БАЛАГАНСКИЙ М.Ю., ЗАХАРОВ Ю.Н. Итерационное решение трехмерной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Междунар. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Усть-Каменогорск, 2003. Т. 1. С. 95–101.
- [3] БАЛАГАНСКИЙ М.Ю., ЗАХАРОВ Ю.Н. Итерационные схемы решения системы уравнений Навье — Стокса в переменных функция тока, вихрь // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 14–23.
- [4] ЗАХАРОВ Ю.Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2004. 238 с.
- [5] БЕЛОЛИПЕЦКИЙ В.М., КОСТЮК В.Ю. Численное исследование рециркуляционных течений в трехмерной каверне // ПМТФ. 1990. Т. 31, № 1. С. 100–104.
- [6] ИСАКОВ А.Г. К численному решению задачи с движением вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне с  $Re = 1000$  // Моделирование в механике. 1990. Т. 4(21), № 2. С. 64–76.
- [7] КУДИНОВ П.И. Численное моделирование пространственных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вест. Днепропетров. ун-та. Сер. Механика. Вып. 4. 2001. Т. 1. С. 89–99.
- [8] ИСАЕВ С., СУДАКОВ А., ЛУЧКО Н. и др. Численное моделирование ламинарного циркуляционного течения в кубической каверне с подвижной гранью // ИФЖ. 2002. Т. 75, № 1. С. 49–53.
- [9] REIMA I., KATSUYA I., TETUYA K. Numerical simulation of three-dimensional flow structure in a driven cavity // Fluid. Dyn. Res. 1989. Vol. 5, N 3. P. 173–189.
- [10] HIDEKI K., YASUMASSA K., TAKANIKO T. Numerical flow analysis in a cubic cavity by the GSMAC finite element method (in the case that Reynolds numbers are 1000 and 3200) // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. B. 1989. Vol. 55, N 515. P. 1922–1929.
- [11] ROGERS S.E., KWAK D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier — Stokes equations // Appl. Numer. Math. 1991. Vol. 8. P. 43–64.
- [12] GUERMOND J.-L., MIGEON C., PINEAU G., QUARTAPELLE L. Start-up flows in a three-dimensional rectangular driven cavity of aspect ratio 1:1:2 at  $Re = 1000$  // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 450. P. 169–199.