# О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДВУХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ, ЗАДАННЫМИ НА ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

Ю. Я. Белов, И. В. Фроленков
*Красноярский государственный университет, Россия*
e-mail: belov@lan.krasu.ru, fiv@krw.ru

A problem of identification of two coefficients — in front of a nonlinear term and in the right hand side of the semi-linear parabolic equation with quite generic nonlinearity is studied. These coefficients depend on time only. Problem is supposed to be overdetermined, boundary conditions are defined on a smooth parametrically defined curve.

## Введение

Рассматривается задача идентификации двух коэффициентов, зависящих только от временной переменной, при нелинейном члене и правой части для полулинейного параболического уравнения с нелинейностью достаточно общего вида. Условия переопределения задаются на гладкой кривой, заданной в параметрическом виде.

При доказательстве разрешимости задачи Коши для вспомогательной нелинейной задачи, содержащей следы решения, к которой приводится исходная задача, используется метод расщепления на дифференциальном уровне, предложенный Н.Н. Яненко и названный им методом слабой аппроксимации [1]. Данный метод в настоящее время с успехом используется при исследовании задач идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений [2–6].

В настоящей работе в случае задачи Коши доказана однозначная классическая разрешимость указанной задачи в "малом" интервале по времени в классе достаточно гладких функций, ограниченных вместе с соответствующими производными. Доказана также однозначная разрешимость первой краевой задачи. Задача, когда коэффициенты зависят от временной и пространственных переменных, а условия переопределения задаются на фиксированной гиперплоскости, рассмотрена в [6].

# 1. Задача Коши

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t, x, z) \mid 0 \le t \le T, x \in E_n, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t(t,x,z) = L_x(u) + u_{zz} + \lambda_1(t)M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t)f(t,x,z); \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2}$$

Обозначим

$$L_x(u) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k},$$

где $c_k(t) \in C[0,T]$; функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы соответственно в $E_2$, $E_{n+1}$ и $G_{[0,T]}$.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (1), (2), удовлетворяющим условиям переопределения

$$u(t, a(t), b(t)) = \varphi_1(t),\ \ u_z(t, a(t), b(t)) = \varphi_2(t), \tag{3}$$

где $a(t) = (a_1(t), a_2(t), ..., a_n(t))$, и условиям согласования

$$u_0(a(0), b(0)) = \varphi_1(0),\ \ \frac{\partial}{\partial z}u_0(a(0), b(0)) = \varphi_2(0). \tag{4}$$

Относительно функции $M(t,y)$ также предполагаем, что она достаточно гладкая, имеет все непрерывные производные, входящие в соотношение

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)\right| \le M_0(1 + |y|^p),\ \ k = 0, 1, \ldots, 9,\ \ 0 \le t \le T,\ \ y \in E_1. \tag{5}$$

Здесь $M_0$ — постоянная; $p$ — фиксированное натуральное число; $M^{(k)}(t,y) = \dfrac{\partial^k}{\partial y^k}M(t,y)$, $k \ge 1$ — целое; $M^{(0)}(t,y) = M(t,y)$.

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение

$$\left|M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t))\right| \ge \delta > 0, \quad \delta - \text{const}. \tag{6}$$

Приведем задачу (1)–(3) к некоторой вспомогательной задаче. Положив $x = a(t)$, $z = b(t)$ в (1), получим

$$u_t(t,a(t),b(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_k x_k}(t,a(t),b(t)) + u_{zz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ \lambda_1(t)M(t,\varphi_1) + \lambda_2(t)f(t,a(t),b(t)).$$

Из (3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,a(t),b(t)) = u_t(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) + u_z(t,a(t),b(t))b'(t) =$$
$$= u_t(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) + \varphi_2(t)b'(t) = \varphi_1'(t),$$

$$u_t(t,a(t),b(t)) = \varphi_1'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) - \varphi_2(t)b'(t),$$

$$\varphi_1'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t) - \varphi_2(t)b'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ u_{zz}(t,a(t),b(t)) + \lambda_1(t)M(t,\varphi_1) + \lambda_2(t)f(t,a(t),b(t)). \tag{7}$$

Продифференцируем (1) по $z$, положим $x = a(t)$, $z = b(t)$, учитывая (3), получим

$$u_{tz}(t,a(t),b(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ u_{zzz}(t,a(t),b(t)) + \lambda_1(t)M^{(1)}(t,\varphi_1)\varphi_2 + \lambda_2(t,x)f_z(t,a(t),b(t)).$$

Из (3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}u_z(t,a(t),b(t)) = u_{tz}(t,a(t),b(t)) + \sum_{k=1}^{n} u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t) + u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t) = \varphi_2'(t),$$

$$u_{tz}(t,a(t),b(t)) = \varphi_2'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t),$$

$$\varphi_2'(t) - \sum_{k=1}^{n} u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t)) +$$
$$+ u_{zzz}(t,a(t),b(t)) + \lambda_1(t)M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) + \lambda_2(t)f_z(t,a(t),b(t)). \tag{8}$$

Из (7), (8) находим

$$\lambda_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))\right] f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)} -$$
$$- \frac{\left[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)\right] f(t,a(t),b(t))}{D(t)}, \tag{9}$$

$$\lambda_2(t) = \frac{\left[\varphi_2'(t) - K_2(t) - u_{zzz}(t,a(t),b(t)) - u_{zz}(t,a(t),b(t))b'(t)\right] M(t,\varphi_1(t))}{D(t)} -$$
$$- \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t) - K_1(t) - u_{zz}(t,a(t),b(t))\right] M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)}. \tag{10}$$

Здесь

$$K_1(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_k}(t,a(t),b(t)) + u_{x_k}(t,a(t),b(t))a_k'(t),$$

$$K_2(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)u_{x_kx_kz}(t,a(t),b(t)) + u_{x_kz}(t,a(t),b(t))a_k'(t),$$

$$D(t) = M(t,\varphi_1(t))f_z(t,a(t),b(t)) - M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)f(t,a(t),b(t));$$

Перепишем $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ в следующем виде:

$$\lambda_1(t) = A_1(t) + A_2(t)K_1(t) + A_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + A_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)),$$

$$\lambda_2(t) = B_1(t) + B_2(t)K_1(t) + B_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + B_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t)).$$

Здесь

$$A_1(t) = \frac{\left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] f_z(t,a(t),b(t)) - \varphi_2'(t)f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$A_2(t) = \frac{-f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)},\ \ A_3(t) = \frac{f(t,a(t),b(t))}{D(t)},$$

$$A_4(t) = \frac{b'(t)f(t,a(t),b(t)) - f_z(t,a(t),b(t))}{D(t)};$$

$$B_1(t) = \frac{\varphi_2'(t)M(t,\varphi_1(t)) - \left[\varphi_1'(t) - \varphi_2(t)b'(t)\right] M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},$$

$$B_2(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t)}{D(t)},\ \ B_3(t) = \frac{-M(t,\varphi_1(t))}{D(t)},$$

$$B_4(t) = \frac{M^{(1)}(t,\varphi_1(t))\varphi_2(t) - b'(t)M(t,\varphi_1(t))}{D(t)}$$

— известные, непрерывные, достаточно гладкие функции.

Учитывая выражения для коэффициентов $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, приходим к следующей прямой задаче:

$$\begin{gathered} u_t = L_x(u) + u_{zz} + \Big(A_1(t) + A_2(t)K_1(t) + A_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + \\ +A_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t))\Big) M(t,u) + \\ + \Big(B_1(t) + B_2(t)K_1(t) + B_3(t)\left[K_2(t) + u_{zzz}(t,a(t),b(t))\right] + \\ + B_4(t)u_{zz}(t,a(t),b(t))\Big) f(t,x,z), \end{gathered} \tag{11}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{12}$$

Ниже докажем классическую однозначную разрешимость задачи (1), (12).

Для доказательства существования решения прямой задачи применим метод слабой аппроксимации [1, 2]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $\left(t - \dfrac{\tau}{2}\right)$ на втором дробном шаге в нелинейных членах:

$$u_t^\tau = 2L_x(u^\tau(t,x,z)) + 2u_{zz}^\tau(t,x,z), \quad n\tau < t \le \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau; \tag{13}$$

$$u_t^\tau = 2R_1^\tau(t)M(t,u^\tau(t - \frac{\tau}{2},x,z)) + 2R_2^\tau(t)f(t,x,z), \quad \left(n + \frac{1}{2}\right) < t \le (n+1)\,\tau; \tag{14}$$

$$u^\tau|_{t=0} = u_0(x,z), \quad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{15}$$

Здесь $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $\tau N = T$; $u^\tau = u^\tau(t) = u^\tau(t, x, z)$,

$$R_1^\tau(t) = A_1(t) + A_2(t)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k x_k}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) + u^\tau_{x_k}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) a_k'(t)\right] +$$
$$+ A_3(t)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k x_k z}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) + u^\tau_{x_k z}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) a_k'(t) + \right.$$
$$\left. + u^\tau_{zzz}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right)\right] + A_4(t) u^\tau_{zz}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right),$$

$$R_2^\tau(t) = B_1(t) + B_2(t)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k x_k}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) + u^\tau_{x_k}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) a_k'(t)\right] +$$
$$+ B_3(t)\left[\sum_{k=1}^{n} c_k(t) u^\tau_{x_k x_k z}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) + u^\tau_{x_k z}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right) a_k'(t) + \right.$$
$$\left. + u^\tau_{zzz}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right)\right] + B_4(t) u^\tau_{zz}\left(t - \frac{\tau}{2}, a(t), b(t)\right).$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в соотношения (16), (17), и удовлетворяют этим соотношениям:

$$|a'(t)| + |b'(t)| + |\varphi_1'(t)| + |\varphi_2'(t)| \le C; \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha u_0(x, z)\right| + \left|\frac{\partial^m}{\partial z^m} D_x^\alpha f(t, x, z)\right| \le C, \ |\alpha| \le 4, \ m = 0, 1, \ldots, 5, \tag{17}$$

$$(t, x, z) \in G_{[0,T]}, \ C \text{ — постоянные.}$$

Доказаны равномерные по $\tau$ при $(t, x, z) \in G_{[0,t^*]}$ априорные оценки, гарантирующие компактность семейства решений $\{u^\tau(t, x, z)\}$ задачи (13)–(15) в классе непрерывных функций:

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\alpha u^\tau\right| \le C \text{ при } |\alpha| = 0, 1, \ldots, 4, \ k = 0, 1, \ldots, 5; \tag{18}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha \frac{\partial^k}{\partial z^k} u^\tau(t, x, z)\right| \le C, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \ |\alpha| \le 2. \tag{19}$$

Здесь $t^*$ – некоторая постоянная $(0 < t^* \le T)$, зависящая от $\delta$ и констант $C_{mk}$ из (16), (17) и не зависящая от $\tau$.

В силу теоремы Арцела [7] о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t, x, z)$ последовательности $u^\tau(t, x, z)$ решений задачи (13)–(15) сходится вместе с производными по $x_k$ до второго и по $z$ до третьего порядка включительно к функции $u(t, x, z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$. По теореме метода слабой аппроксимации [2] данная функция является решением задачи (1), (12), причем $u(t, x, z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]})$, где

$$C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t, x, z) \mid f, f_t, D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} f \in C(G_{[0,t^*]}), m = 0, 1, 2, 3, \ |\alpha| \le 2 \right\}.$$

Используя все доказанные оценки, получим, что тройка функций $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \left\{u(t,x,z),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \mid u \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),\, \lambda_1(t),\, \lambda_2(t) \in C([0,t^*])\right\}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{|\alpha|\le 2} \sum_{k=0}^{3} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^m}{\partial z^m} u(t,x,z) \right| \le C, \;\; (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}; \tag{20}$$

$$|\lambda_1(t)| + |\lambda_2(t)| \le C, \;\; t \in G_{[0,t^*]}. \tag{21}$$

На основании этих оценок в работе доказано выполнение условий переопределения (3). Доказана также теорема единственности решения $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$.

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть выполняются условия* (4)–(6), (16), (17). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21).

**Теорема 2.** *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(6), *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия* (4)–(6), (16), (17). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (1)–(3) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21).

## 2. Первая краевая задача

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, x = (x_1,\ldots,x_n), 0 \le x_k \le \pi, k = \overline{1,n}, 0 \le z \le \pi\}$ первую краевую задачу

$$u_t(t,x,z) = \Delta u + u_{zz} + \lambda_1(t) M(t, u(t,x,z)) + \lambda_2(t) f(t,x,z); \tag{22}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z); \tag{23}$$

$$u|_{x_k=0} = u|_{x_k=\pi} = 0, \;\; k = 1,\ldots,n; \tag{24}$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=\pi} = 0. \tag{25}$$

Здесь

$$\Delta u(t,x,z) = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k x_k}(t,x,z),$$

функции $M(t,y)$, $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$ действительнозначные и заданы в $E_2$, $E_{n+1}$ и $G_{[0,T]}$ соответственно.

Функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ подлежат определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (22)–(25), удовлетворяющим условиям переопределения (3) и условиям согласования (4). Относительно функции $M(t,y)$ предполагаем выполнение условий (5).

Пусть при всех $t \in [0,T]$ выполняется соотношение (6). Относительно входных данных предполагаем, что выполнены условия (16), (17) и функции $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ нечетным образом продолжаются по переменным $x_k$, $z$ на $E_{n+1}$:

$$u_0(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz, \;\; \alpha_k - \text{const}; \tag{26}$$

$$f(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz, \;\; \beta_k(t) \in C[0,T]. \tag{27}$$

Также предполагаем, что при $(t,x,z) \in G^*_{[0,T]}$ справедливо условие

$$M(t,v(t,x)) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz \tag{28}$$

для любых $v(t,x)$, таких что

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(t) \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Здесь коэффициенты $M_k(t)$ могут быть различны и, вообще говоря, зависят от выбора $v(t,x)$.

Выражение неизвестных коэффициентов через решение $u(t,x,z)$ имеет вид (9), (10), где $c_k(t) = 1$.

Рассмотрим в $G^*_{[0,T]}$ теперь прямую задачу Коши (1), (12), которая получается из (22), (23) подстановкой выражений для $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и заменой функций $f(t,x,z)$ и $u_0(x,z)$ на их продолжения нечетным образом на все пространство по $x_1, \ldots, x_k$, $z$ (обозначения оставим прежними).

Расщепим прямую задачу и линеаризуем сдвигом по времени на $(t - \tau/2)$ на втором дробном шаге в нелинейных членах (см. (13)–(15)). Для решения $u^\tau(t,x,z)$ доказаны равномерные по $\tau$ оценки (18), (19) при $(t,x,z) \in G^*_{[0,t^*]}$.

Рассмотрим уравнение (13) с начальным условием (15). В силу (26) решение данной задачи при $t \in \left(0, \dfrac{\tau}{2}\right]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-2(n+1)k^2 t} \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz,$$

следовательно,

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0, \;\; k = 1, \ldots, n,$$

$$u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0 \text{ при } t \in \left(0, \frac{\tau}{2}\right].$$

Рассмотрим теперь уравнение (13) с начальным условием

$$u^\tau(\frac{\tau}{2}, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e^{-(n+1)k^2 \tau} \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Проинтегрируем уравнение (13) по временной переменной по отрезку $\left(\frac{\tau}{2}, t\right]$. В силу (27), (28) решение на временном отрезке $t \in \left(\frac{\tau}{2}, \tau\right]$ представимо в виде

$$u^\tau(t,x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \alpha_k e^{-(n+1)k^2\tau} + \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} 2R_1^\tau(\theta)M_k(\theta) + 2R_2^\tau(\theta)\beta_k(\theta)\,d\theta \right] \times$$
$$\times \sin kx_1 \sin kx_2 \ldots \sin kx_n \sin kz.$$

Следовательно,

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\ldots,n,$$
$$u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0 \text{ при } t \in (0,\tau]\,.$$

Аналогично рассуждая на следующем целом шаге по времени, получим, что

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\ldots,n,\ u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0 \text{ при } t \in (0,2\tau]\,.$$

Через конечное число шагов получим, что

$$u^\tau|_{x_k=0} = u^\tau|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\ldots,n,\ u^\tau|_{z=0} = u^\tau|_{z=\pi} = 0 \text{ при } t \in (0,t^*]\,. \tag{29}$$

В силу доказанных равномерных оценок и теоремы Арцела [7] о компактности некоторая подпоследовательность $u^{\tau_k}(t,x,z)$ последовательности $u^\tau(t,x,z)$ решений задачи (13)–(15) сходится вместе с производными по $x_k$ до второго и по $z$ до третьего порядка включительно к функции $u(t,x,z) \in C^{0,2,3}_{t,x,z}(G^*_{[0,t^*]})$. По теореме метода слабой аппроксимации [2] данная функция является решением прямой задачи (1), (12), причем $u(t,x,z) \in C^{1,2,3}_{t,x,z}(G^*_{[0,t^*]})$ и справедливы соотношения (20), (21).

В силу (29) для функции $u(t,x,z)$ выполняется

$$u|_{x_k=0} = u|_{x_k=\pi} = 0,\ k = 1,\ldots,n,\ u|_{z=0} = u|_{z=\pi} = 0 \text{ при } t \in (0,t^*]\,,$$

и, следовательно, в качестве решения краевой задачи можно взять сужения на $G_{[0,t^*]}$ решения задачи Коши в $G^*_{[0,t^*]}$ для уравнения (22) с начальными данными и правой частью, являющимися указанными в (26), (27) продолжениями функций $u_0(x,z)$, $f(t,x,z)$, и условиями переопределения (3).

Единственность решения исходной краевой задачи следует из теоремы единственности, доказанной для задачи Коши.

Доказаны следующие теоремы.

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия* (4)–(6), (16), (17), (26)–(28). *Тогда существует решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (22)–(25), (3) *в классе* $Z(t^*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21).

**Теорема 5.** *Решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (22)–(25), (3)–(6), *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

**Теорема 6.** *Пусть выполняются условия* (4)–(6), (16), (17), (26)–(28). *Тогда существует и единственно решение* $u(t,x,z)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ *задачи* (22)–(25), (3) *в классе* $Z(t_*)$, *удовлетворяющее соотношениям* (20), (21).

## Список литературы

[1] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967.

[2] Белов Ю.Я., Кантор С.А. Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999.

[3] Belov Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations. VSP, Utrecht, The Netherlands, 2002. 211 p.

[4] Полынцева С.В. О задаче идентификации двух старших коэффициентов параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на различных гиперплоскостях // Вест. КрасГУ: физико-мат. науки. Красноярск, 2004. Вып. 3. С. 107–112.

[5] Баранов С.Н. О задаче идентификации трех коэффициентов с неоднородными условиями переопределения // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, ч. 4. С. 92–102.

[6] Белов Ю.Я., Фроленков И.В. О задаче идентификации двух коэффициентов параболического полулинейного уравнения // Вест. КрасГУ: физико-мат. науки. Красноярск: КрасГУ, 2004. Вып. 1. С. 140–149.

[7] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М., 1982.

*Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.*