Вычислительные технологии **Том 11, часть 1, Специальный выпуск, 2006**

О НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ ЭКМАНОВСКОГО ТИПА ОДНОСЛОЙНОЙ И ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Компаниец
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Россия
e-mail: kla@icm.krasn.ru

Solutions of the 3D Ekman's type model for a stationary wind current in one- and two-layer fluid are found. For the two-layer fluid density and turbulent exchange coefficients are discontinuous at the surface between the layers. Obtained solutions could be useful as a test for computational algorithms.

1. Случай ветрового движения однородной жидкости

Рассмотрим случай ветрового движения однородной жидкости, при этом будем считать, что выполняется приближение гидростатики, нелинейными членами и горизонтальным турбулентным обменом можно пренебречь [1]:

$$\begin{aligned} g\frac{\partial \eta}{\partial x} - lv &= K\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ g\frac{\partial \eta}{\partial y} + lu &= K\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Здесь x, y, z — прямоугольная система координат, ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вертикально вверх; (u, v, w) — вектор скорости течения, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$; $\eta = \eta(x, y, z)$ — возвышение свободной поверхности; K — постоянный коэффициент вертикального турбулентного обмена для скорости; l — параметр Кориолиса; g — ускорение свободного падения; плотность ρ постоянная.

Граничные условия по вертикали для горизонтальных составляющих скорости таковы:

$$\rho K \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_x^w, \quad \rho K \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_y^w. \tag{3}$$

На дне ставится условие проскальзывания $K_z\partial u/\partial z = k_b u$, $K_z\partial v/\partial z = k_b v$, k_b — коэффициент придонного трения.

Отметим, что $k_b = \infty$ соответствует случаю прилипания $u\big|_{z=-H} = 0$, $v\big|_{z=-H} = 0$, а $k_b = 0$ — проскальзыванию без трения.

Для вертикальной компоненты скорости на поверхности имеем

$$w\big|_{z=0} = 0, \tag{4}$$

а на дне

$$w\big|_{z=-H} = -u\frac{\partial H}{\partial x} - v\frac{\partial H}{\partial y}. \tag{5}$$

Отметим, что в случае условий прилипания $w\big|_{z=-H} = 0$.

Стенки бассейна считаются вертикальными, и на границе бассейна ставится условие равенства нулю нормальной составляющей полного потока.

Интегрируя уравнение (2) от дна до свободной поверхности с учетом граничных условий (4), (5), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-H}^{0} u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-H}^{0} v\,dz = 0. \tag{6}$$

В системе уравнений (1), (2), (6) уравнения (1), (6) можно рассматривать независимо от уравнения (2).

Введем обозначения

$$W = u + iv, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial n} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + i\frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad S = \frac{ig}{l}\frac{\partial\eta}{\partial n}$$

и запишем уравнения и граничные условия для горизонтальных составляющих скорости в комплексном виде:

$$K\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - ilW = g\frac{\partial\eta}{\partial n}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &K\frac{\partial W}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{\tau^w}{\rho}, \qquad \tau^w = \tau_x + i\tau_y, \\ &K\frac{\partial W}{\partial z}\bigg|_{z=-H} = k_b W. \end{aligned} \tag{8}$$

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$W = D_1 e^{\alpha z} + D_2 e^{-\alpha z} + S, \quad \alpha = \sqrt{\frac{il}{K}}, \tag{9}$$

коэффициенты D_1 и D_2 определяются в зависимости от граничных условий.

Первое локальное (зависящее от x, y только параметрически) аналитическое решение для уравнения (7) получено в 1905 году [2] для бассейна бесконечной глубины.

Аналитическое решение для бассейна конечной глубины с условием прилипания на дне выписано в работе [3]:

$$W = \frac{1}{\sqrt{ilK}} \frac{\sinh(\alpha(H+z))}{\cosh(\alpha H)} \frac{\tau^w}{\rho} - \left(\frac{\cosh(\alpha z)}{\cosh(\alpha H)} - 1 \right) S. \tag{10}$$

Первое слагаемое отвечает случаю дрейфового течения $\nabla \eta = 0$, второе — описывает течение, обязанное градиентам уровня (геострофическое течение).

Учет условий проскальзывания на дне приводит к формуле [4]

$$W = u + iv = \frac{\cosh(\alpha(z+H)) + \dfrac{k_b}{K\alpha} \sinh(\alpha(z+H))}{K\,\alpha \sinh(\alpha H) + k_b \cosh(\alpha H)} \frac{\tau^w}{\rho} -$$

$$- \left(\frac{k_b \cosh(\alpha z)}{K\,\alpha \sinh(\alpha H) + k_b \cosh(\alpha H)} - 1 \right) S. \tag{11}$$

При $k_b = \infty$ это решение совпадает с решением (10).

Уравнение для функции тока Ψ, позволяющее найти параметр $\partial\eta/\partial n$, получается стандартным образом [3] после выделения в (11) действительной и мнимой частей.

В силу выполнения условия (6) можно ввести функцию тока в соответствии с формулами

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \int\limits_{-H}^{0} u dz = \mathrm{Re} \int\limits_{-H}^{0} W dz, \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \int\limits_{-H}^{0} v dz = \mathrm{Im} \int\limits_{-H}^{0} W dz.$$

В самом деле, из формулы (11) следует, что горизонтальные скорости линейны относительно величин S и τ^w, поэтому после интегрирования (11) от дна до поверхности получаем

$$\int\limits_{-H}^{0} W dz = \frac{D_1 - D_2}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(D_1 e^{-\alpha h} - D_2 e^{\alpha h}) + HS = \gamma S + F\tau^w,$$

где γ и F — некоторые комплексные числа. Следовательно,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = \displaystyle\int\limits_{-H}^{0} u dz = -\frac{g}{l} \mathrm{Re}\gamma \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{g}{l} \mathrm{Im}\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathrm{Re}(F\tau^w), \\ -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = \displaystyle\int\limits_{-H}^{0} v dz = \frac{g}{l} \mathrm{Re}\gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{g}{l} \mathrm{Im}\gamma \frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathrm{Im}(F\tau^w). \end{cases} \tag{12}$$

Чтобы получить уравнение для функции Ψ, продифференцируем первое уравнение системы (12) по y, второе — по x и найдем разность этих уравнений:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{g}{l} \mathrm{Re}\gamma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \mathrm{Re}(F\tau^w)}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Im}(F\tau^w)}{\partial x}. \tag{13}$$

В уравнение (13) входит неизвестная величина $\partial^2\eta/\partial x^2 + \partial^2\eta/\partial y^2$. Чтобы исключить ее, продифференцируем первое уравнение системы (12) по x, второе уравнение — по y и найдем сумму этих уравнений:

$$-\frac{g}{l} \mathrm{Im}\gamma \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) + \tilde{F}(\tau^w) = 0,$$

где $\tilde{F}(\tau^w) = \partial/\partial x\,(\mathrm{Re}(F\tau^w)) + \partial/\partial y\,(\mathrm{Im}(F\tau^w))$.

Подставляя полученное выражение в уравнение (13), полностью доопределяем уравнение (13). На границе бассейна G ставятся стандартные [3] в таких случаях условия $\Psi_G = 0$. Уравнение для функции тока решается (как правило, численно) в области, ограниченной береговой линией. После нахождения функции Ψ величины $\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$ находятся из системы уравнений (12), а скорости течения определяются по формулам (9). В одном частном случае уравнение (13) имеет точное решение.

Рассмотрим движение жидкости в круговом цилиндре радиуса R с ровным дном под действием ветра, задаваемого формулой

$$\tau_x/\rho = -y, \quad \tau_y/\rho = x. \tag{14}$$

Тогда $\tilde{F}(\tau^w)$ является константой, а задача

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \tilde{F}(\tau^w)$$

в круге радиуса R с граничным условием $\Psi_G = 0$ имеет решение

$$\Psi = \frac{\tilde{F}(\tau^w)}{4}(x^2 + y^2 - R^2).$$

Например, если на дне ставится условие прилипания, то

$$\tilde{F}(\tau^w) = -\frac{2}{l}\left(C + \frac{F}{E}D\right), \quad d = \pi\sqrt{\frac{2K}{l}},$$

$$C = \frac{2\,\sin\pi\dfrac{H}{d}\,\sinh\pi\dfrac{H}{d}}{\cos 2\pi\dfrac{H}{d} + \cosh 2\pi\dfrac{H}{d}}, \quad D = \frac{2\,\cos\pi\dfrac{H}{d}\,\cosh\pi\dfrac{H}{d}}{\cos 2\pi\dfrac{H}{d} + \cosh 2\pi\dfrac{H}{d}} - 1,$$

$$E = \frac{1}{2\pi\dfrac{H}{d}}\,\frac{\sin 2\pi\dfrac{H}{d} - \sinh 2\pi\dfrac{H}{d}}{\cos 2\pi\dfrac{H}{d} + \cosh 2\pi\dfrac{H}{d}}, \quad F = -\frac{1}{2\pi\dfrac{H}{d}}\,\frac{\sin 2\pi\dfrac{H}{d} + \sinh 2\pi\dfrac{H}{d}}{\cos 2\pi\dfrac{H}{d} + \cosh 2\pi\dfrac{H}{d}} + 1.$$

2. Случай двухслойной жидкости

Считается, что перенос массы через границу раздела плотности отсутствует. Это соответствует случаям, когда граница раздела находится ниже слоя ветрового перемешивания либо разность плотностей в верхнем и нижнем слое достаточно велика.

Выпишем уравнения, описывающие стационарные течения в верхнем и нижнем слоях в бассейне постоянной глубины в соответствии с [5–7]:

$$\begin{cases}
-lv^I + g\dfrac{\partial\eta^I}{\partial x} = K^I\dfrac{\partial^2 u^I}{\partial z^2}; & (15)\\
lu^I + g\dfrac{\partial\eta^I}{\partial y} = K^I\dfrac{\partial^2 v^I}{\partial z^2}; & (16)\\
-lv^{II} + g\left(1 - \dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial\eta^{II}}{\partial x} + g\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial\eta^I}{\partial x} = K^{II}\dfrac{\partial^2 u^{II}}{\partial z^2}; & (17)\\
lu^{II} + g\left(1 - \dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial\eta^{II}}{\partial y} + g\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial\eta^I}{\partial y} = K^{II}\dfrac{\partial^2 v^{II}}{\partial z^2}. & (18)
\end{cases}$$

Здесь индекс "I" относится к верхнему, а индекс "II" — к нижнему слою жидкости; K^I и K^{II} — постоянные коэффициенты вертикального турбулентного обмена в верхнем и нижнем слоях соответственно; η^I и η^{II} — отклонения поверхности жидкости и границы раздела слоев от их равновесных положений $z = 0$ и $z = -h$ соответственно; ρ^I и ρ^{II} — постоянные плотности воды; H — постоянная глубина водоема.

Граничные условия для первого слоя имеют вид

$$\rho^I K^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_x^w, \quad \rho^I K^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=0} = \tau_y^w; \tag{19}$$

$$\rho^I K^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{I2}(u^I - u^{II}), \quad \rho^I K^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{I2}(v^I - v^{II}). \tag{20}$$

Граничные условия для второго слоя:

$$\begin{aligned} \rho^{II} K^{II} \left.\frac{\partial u^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h} &= \rho^I K^I \left.\frac{\partial u^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{I2}(u^I - u^{II}), \\ \rho^{II} K^{II} \left.\frac{\partial v^{II}}{\partial z}\right|_{z=-h} &= \rho^I K^I \left.\frac{\partial v^I}{\partial z}\right|_{z=-h} = K^{I2}(v^I - v^{II}); \end{aligned} \tag{21}$$

$$u^{II}\big|_{z=-H} = 0, \quad v^{II}\big|_{z=-H} = 0. \tag{22}$$

Здесь K^{I2} — коэффициент трения между слоями жидкости.

Уравнения неразрывности для первого и второго слоев имеют соответственно вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{-h}^{0} u^I dz + \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{-h}^{0} v^I dz = 0; \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{-H}^{-h} u^{II} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{-H}^{-h} v^{II} dz = 0. \tag{24}$$

Для упрощения вычислений запишем систему уравнений (15)–(18) в комплексной форме. Введем обозначения:

$$W^I = u^I + iv^I, \quad W^{II} = u^{II} + iv^{II}, \quad \frac{\partial \eta^I}{\partial n} = \frac{\partial \eta^I}{\partial x} + i\frac{\partial \eta^I}{\partial y}, \quad \frac{\partial \eta^{II}}{\partial n} = \frac{\partial \eta^{II}}{\partial x} + i\frac{\partial \eta^{II}}{\partial y}.$$

Тогда общее решение системы уравнений (15)–(18) можно представить в виде

$$W^I = D_1 e^{\alpha_1 z} + D_2 e^{-\alpha_1 z} + \frac{ig}{l}\frac{\partial \eta^I}{\partial n}; \tag{25}$$

$$W^{II} = D_3 e^{\alpha_2 z} + D_4 e^{-\alpha_2 z} + \frac{ig}{l}\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \eta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \eta^{II}}{\partial n}\right]. \tag{26}$$

Здесь $\alpha_1 = \sqrt{il/K^I}$, $\alpha_2 = \sqrt{il/K^{II}}$.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} &\beta_1 = \rho^I K^I \alpha_1, \quad \beta_2 = \rho^{II} K^{II} \alpha_2, \\ &S_1 = \frac{ig}{l}\frac{\partial \eta^I}{\partial n}, \quad S_2 = \frac{ig}{l}\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \eta^I}{\partial n} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \eta^{II}}{\partial n}\right]. \end{aligned}$$

Граничные условия (19), (20) примут вид

$$\begin{cases} \beta_1(D_1 - D_2) = \tau^w, \\ \beta_1(D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}) = K^{12}\left[D_1 e^{-\alpha_1 h} + D_2 e^{\alpha_1 h} + S_1 - D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h} - S_2\right], \\ \beta_2(D_3 e^{-\alpha_2 h} - D_4 e^{\alpha_2 h}) = \beta_1(D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}), \\ D_3 e^{-\alpha_2 H} - D_4 e^{\alpha_2 H} + S_2 = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Выпишем решение системы (27), считая, что S_1 и S_2 — параметры:

$$D_1 = \frac{\tau^w}{\beta_1} + D_2, \quad D_2 = \frac{\beta_2 S_2 e^{\alpha_2(H-h)} + \tau^w e^{-\alpha_1 h} + \beta_2 D_4(e^{\alpha_2(2H-h)} + e^{\alpha_2 h})}{\beta_1 2\sinh(\alpha_1 h)},$$

$$D_3 = -D_4 e^{2\alpha_2 H} - S_2 e^{\alpha_2 H},$$

$$D_4 = \frac{\tau^w e^{-\alpha_1 h} - K^{I2}\left[S_1 - S_2 + \frac{\tau^w}{\beta_1}e^{-\alpha_1 h} + S_2 e^{\alpha_2(H-h)}\right] - \frac{1}{\beta_1}(\beta_2 S_2 e^{\alpha_2(H-h)} + \tau^w e^{-\alpha_1 h})(\beta_1 + K^{I2}\coth(\alpha_1 h))}{K^{I2}(e^{\alpha_2(2H-h)} - e^{\alpha_2 h}) + \frac{\beta_2}{\beta_1}(e^{\alpha_2(2H-h)} + e^{\alpha_2 h})(\beta_1 + K^{I2}\coth(\alpha_1 h))}.$$

Легко заметить, что коэффициенты D_1, D_2, D_3 и D_4 представляют собой линейные функции от S_1, S_2 и τ^w.

Для нахождения величин S_1 и S_2 воспользуемся соотношениями (25) и (26):

$$\int_{-h}^{0} W^I dz = \frac{D_1 - D_2}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1}(D_1 e^{-\alpha_1 h} - D_2 e^{\alpha_1 h}) + hS_1 = \gamma_1 S_1 + \delta_1 S_2 + F_1 \tau^w.$$

Аналогично для второго слоя:

$$\int_{-H}^{-h} W^{II} dz = \frac{1}{\alpha_2}(D_3 e^{-\alpha_1 h} - D_4 e^{\alpha_1 h}) - \frac{1}{\alpha_2}(D_3 e^{-\alpha_1 H} - D_4 e^{\alpha_1 H}) + (H-h)S_2 = \gamma_2 S_1 + \delta_2 S_2 + F_2 \tau_w.$$

В силу выполнения условия неразрывности (23) можно ввести функцию тока для верхнего слоя в соответствии с формулами

$$\frac{\partial \Psi^I}{\partial y} = \int_{-h}^{0} u^I dz = \mathrm{Re}\int_{-h}^{0} W^I dz, \quad -\frac{\partial \Psi^I}{\partial x} = \int_{-h}^{0} v^I dz = \mathrm{Im}\int_{-h}^{0} W^I dz,$$

что приводит к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Psi^I}{\partial y} = \displaystyle\int_{-h}^{0} u^I dz = -\frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_1 \frac{\partial \eta^I}{\partial y} - \frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_1 \frac{\partial \eta^I}{\partial x} - \frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_1\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \eta^I}{\partial y} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \eta^{II}}{\partial y}\right] - \\ -\dfrac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_1\left[\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial \eta^I}{\partial x} + \left(1 - \dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial \eta^{II}}{\partial x}\right] + \mathrm{Re}(F_1 \tau^w), \\ -\dfrac{\partial \Psi^I}{\partial x} = \displaystyle\int_{-h}^{0} v^I dz = \frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_1 \frac{\partial \eta^I}{\partial x} - \frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_1 \frac{\partial \eta^I}{\partial y} + \frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_1\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial \eta^I}{\partial x} + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial \eta^{II}}{\partial x}\right] - \\ -\dfrac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_1\left[\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial \eta^I}{\partial y} + \left(1 - \dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial \eta^{II}}{\partial y}\right] + \mathrm{Im}(F_1 \tau^w). \end{cases} \tag{28}$$

Чтобы получить уравнение для функции Ψ^I, продифференцируем первое уравнение системы (24) по y, второе — по x и найдем разность этих уравнений:

$$\frac{\partial^2\Psi^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi^I}{\partial y^2}=-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_1\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_1\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial\mathrm{Re}(F_1\tau^w)}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Im}(F_1\tau^w)}{\partial x}. \tag{29}$$

Аналогично для второго слоя в силу (24) имеем

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Psi^{II}}{\partial y}=\displaystyle\int_{-h}^{0}u^{II}dz=-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_1\frac{\partial\eta^I}{\partial y}-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_2\frac{\partial\eta^I}{\partial x}-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_2\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial\eta^I}{\partial y}+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial\eta^{II}}{\partial y}\right]-\\ -\dfrac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_2\left[\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial\eta^I}{\partial x}+\left(1-\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial\eta^{II}}{\partial x}\right]+\mathrm{Re}(F_2\tau^w),\\ -\dfrac{\partial\Psi^{II}}{\partial x}=\displaystyle\int_{-h}^{0}v^{II}dz=\frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_2\frac{\partial\eta^I}{\partial x}-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_2\frac{\partial\eta^I}{\partial y}+\frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_2\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\frac{\partial\eta^I}{\partial x}+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\frac{\partial\eta^{II}}{\partial x}\right]-\\ -\dfrac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_2\left[\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\dfrac{\partial\eta^I}{\partial y}+\left(1-\dfrac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\dfrac{\partial\eta^{II}}{\partial y}\right]+\mathrm{Im}(F_2\tau^w),\end{cases} \tag{30}$$

что позволяет получить уравнение для функции тока во втором слое:

$$\frac{\partial^2\Psi^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi^{II}}{\partial y^2}=-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\gamma_2\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)-\frac{g}{l}\mathrm{Re}\delta_2\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right]+\frac{\partial\mathrm{Re}(F_2\tau^w)}{\partial y}-\frac{\partial\mathrm{Im}(F_2\tau^w)}{\partial x}. \tag{31}$$

В уравнения (29), (31) входят неизвестные величины

$$\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right),\quad\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{32}$$

Чтобы исключить их, продифференцируем первое уравнение системы (28) по x, второе уравнение — по y и найдем сумму этих уравнений:

$$-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_1\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_1\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right]+\tilde{F}_1(\tau^w)=0, \tag{33}$$

где $\tilde{F}_1(\tau^w)=\partial/\partial x\,(\mathrm{Re}(F_1\tau^w))+\partial/\partial y\,(\mathrm{Im}(F_1\tau^w))$.

Продифференцировав первое уравнение системы (30) по x, а второе уравнение — по y и найдя сумму этих уравнений, получим

$$-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\gamma_2\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)-\frac{g}{l}\mathrm{Im}\delta_2\left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(1-\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right]+\tilde{F}_2(\tau^w)=0, \tag{34}$$

где $\tilde{F}_2(\tau_w) = \partial/\partial x\,(\mathrm{Re}(F_2\tau^w)) + \partial/\partial y\,(\mathrm{Im}(F_2\tau^w))$. Решив систему линейных уравнений (33), (34), находим выражения

$$\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right), \quad \left[\frac{\rho^I}{\rho^{II}}\left(\frac{\partial^2\eta^I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta^I}{\partial y^2}\right) + \left(1 - \frac{\rho^I}{\rho^{II}}\right)\left(\frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta^{II}}{\partial y^2}\right)\right] \qquad (35)$$

как функции от напряжения ветра. Подставив (35) в уравнения (29) и (31), полностью определяем правые части уравнений Пуассона для функций тока в первом и втором слоях. На границе бассейна G ставятся условия $\Psi^I_G = 0$ и $\Psi^{II}_G = 0$. После нахождения функций Ψ^I и Ψ^{II} величины $\partial\eta^I/\partial x$, $\partial\eta^I/\partial y$, $\partial\eta^{II}/\partial x$ и $\partial\eta^{II}/\partial y$ находятся из системы уравнений (28), (30), а скорости течения определяются по формулам (25) и (26).

Легко показать, что в случае движения жидкости в цилиндрическом бассейне постоянной глубины под действием ветра, заданного формулой (14), решение может быть выписано в явном виде.

Список литературы

[1] Кочергин В.П. Теория и методы расчета океанических течений. М.: Наука, 1978. 127 с.

[2] Ekman V.W. On the influence of the Earth rotation on ocean currents // Arkiv Mat., Astron., Fysik. 1905. Bd. 2, N 11. P. 1–52.

[3] Welander P. Wind action on a shallow sea: some generalisations of Ekman's theory // Tellus. 1957. Vol. 9. P. 45–52.

[4] Гаврилова Л.В., Гапеева Т.В., Компаниец Л.А. Обобщение решения уравнений типа Экмана на случай переменного коэффициента турбулентного обмена // XII Междунар. конф. "Математика. Компьютер. Образование". Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. Т. 12, ч. 2. С. 660–666.

[5] Welander P. Wind-driven circulation in one- and two-layer oceans of variable depth // Tellus XX. 1968. Vol. 1. P. 1–16.

[6] Добровольская З.Н., Епихов Г.П., Корявов П.П., Моисеев Н.Н. Математические модели для расчета динамики и качества сложных водных систем // Водные ресурсы. 1981. № 3. С. 33–51.

[7] Гапеева Т.В., Гуревич К.Ю., Компаниец Л.А. Аналитическое решение одной задачи движения двухслойной жидкости (3-D случай) // Вест. КрасГУ. 2006 (в печати).

Поступила в редакцию 4 апреля 2006 г.