СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ДИХОТОМИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ*

В. Е. Федоров, М. А. Сагадеева
Челябинский государственный университет, Россия
e-mail: kar@csu.ru, sam@csu.ru

Sufficient conditions for the existence of invariant subspaces and exponential dichotomies for some classes of the first order linear equations in Banach spaces that unsolved with respect to the derivative are found. The obtained results are illustrated on the example of the linearized system of equations describing the phase field.

Введение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ — банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (линеен и непрерывен), оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ (линеен замкнут и плотно в $\mathcal{U}$ определен). Рассмотрим вырожденное ($\ker L \neq \{0\}$) операторно-дифференциальное уравнение

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) \tag{1}$$

и редуцируемое к нему с помощью известной замены [1] неавтономное уравнение

$$L\dot{u}(t) = a(t)Mu(t), \tag{2}$$

$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. В теории устойчивости динамических и эволюционных дифференциальных уравнений важную роль играет понятие экспоненциальной дихотомии уравнения как одной из моделей асимптотического поведения его решений [2, 3]. В данной работе исследован вопрос существования экспоненциальных дихотомий уравнений (1) и (2).

Известно, что единица разрешающей полугруппы вырожденного уравнения (1) обладает нетривиальным ядром, которое называют ядром полугруппы [4, 5]. Всюду в дальнейшем будет предполагаться выполнение условия (L, p)-радиальности оператора M, из которого, как показано в [6, 7], следует существование сильно непрерывной разрешающей полугруппы уравнения (1) с ядром, содержащим собственные и M-присоединенные векторы оператора L высоты не больше p.

В более узких случаях существования аналитической группы или аналитической полугруппы с аналогичным вырождением условия существования экспоненциальных дихотомий уравнения (1) на прямой получены в работах [8, 9].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ и Правительства Челябинской области (грант № 04-01-б).

При условии непрерывной обратимости оператора L уравнения (1), (2) редуцируются к уравнению из класса

$$\dot{u}(t) = A(t)u(t). \tag{3}$$

К настоящему времени существует большое число работ, посвященных исследованию вопросов существования экспоненциальных дихотомий уравнений вида (3) в бесконечномерном случае [2, 3, 10–13].

Первые два параграфа носят вспомогательный характер, в них приведены необходимые для дальнейшего изложения результаты, полученные ранее. Основные результаты приведены в третьем и четвертом параграфах. В пятом эти результаты приложены к исследованию линеаризованной системы уравнений фазового поля.

1. Относительно p-радиальные операторы и разрешающие полугруппы

Сформулируем необходимые для дальнейшего изложения результаты. Обозначим

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}, \quad \sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M),$$

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \ \mu \in \rho^L(M),$$

$$R^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} R^L_{\lambda_k}(M), \ L^L_{(\lambda,p)}(M) = \prod_{k=0}^{p} L^L_{\lambda_k}(M), \ (\lambda_0,\dots,\lambda_p) \in (\rho^L(M))^{p+1},$$

$$\mathcal{U}^0 = \ker R^L_{(\mu,p)}(M), \ \mathcal{F}^0 = \ker L^L_{(\mu,p)}(M), \ L_0 = L\big|_{\mathcal{U}^0}, \ M_0 = M\big|_{\mathrm{dom}M\cap\mathcal{U}^0}.$$

Замечание 1. Очевидно, что $\mathrm{im}L_0 \subset \mathcal{F}^0$, $\mathrm{im}M_0 \subset \mathcal{F}^0$.

Определение 1. *Оператор M называется p-радиальным относительно оператора L (короче, (L,p)-радиальным), если*:

(i) $\exists \omega \in \mathbb{R}$ $(\omega,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0$ $\forall \mu = (\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_p) \in (\omega,+\infty)^{p+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\max\{\|(R^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L^L_{(\mu,p)}(M))^n\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \le \frac{K}{\prod\limits_{k=0}^{p}(\mu_k - \omega)^n}.$$

Лемма 1 [7]. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда*:

(i) *множество $\ker R^L_{(\mu,p)}(M)$ состоит из собственных и M-присоединенных векторов оператора L высоты не больше p*;

(ii) *существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$*.

При условии (L,p)-радиальности оператора M введем обозначения $H = M_0^{-1}L_0$, $J = L_0M_0^{-1}$. Через $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ обозначим замыкание линеала $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M))$, а через $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$ — замыкание линеала $\mathcal{U}^0 \dot{+} \mathrm{im}R^L_{(\mu,p)}(M)$ $(\mathcal{F}^0 \dot{+} \mathrm{im}L^L_{(\mu,p)}(M))$ в норме пространства $\mathcal{U}$ $(\mathcal{F})$.

Лемма 2 [7]. *Пусть оператор M (L,p)-радиален. Тогда*:

(i) *операторы H и J нильпотентны степени не больше p*;

(ii) $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$, $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$.

Решением уравнения (1) будем называть вектор-функцию $u(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{U})$, удовлетворяющую этому уравнению на $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

Определение 2. *Замкнутое множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется фазовым пространством уравнения* (1)*, если:*

(i) *любое решение $u(t)$ уравнения* (1) *лежит в $\mathcal{P}$ (поточечно);*

(ii) *для любого u_0 из некоторого линеала $\mathring{\mathcal{P}}$, плотного в $\mathcal{P}$, существует единственное решение задачи Коши*

$$u(0) = u_0 \tag{4}$$

для уравнения (1).

Вместе с уравнением (1) рассмотрим эквивалентное ему при $\alpha \in \rho^L(M)$ уравнение

$$L(\alpha L - M)^{-1}\dot{g} = M(\alpha L - M)^{-1}g. \tag{5}$$

Теорема 1 [14]. *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда фазовым пространством уравнения* (1) *(уравнения* (5)*) является множество $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.*

Отображение $U(\cdot) : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{L}(\mathcal{U})$ называется *разрешающей полугруппой* уравнения (1), если:

(i) $U(s)U(t) = U(s+t)$ $\forall s, t \in \overline{\mathbb{R}}_+$;

(ii) $u(t) = U(t)u_0$ есть решение этого уравнения для любого u_0 из некоторого плотного в $\mathcal{U}$ линеала;

(iii) сужение единицы полугруппы на фазовое пространство $\mathcal{P}$ уравнения есть $U(0)\big|_{\mathcal{P}} = I$.

Полугруппу $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ будем называть *экспоненциально ограниченной* с константами C, ω, если $\exists C > 0$ $\exists \omega \in \mathbb{R}$ $\forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \leq Ce^{\omega t}$.

Теорема 2 [7]. *Пусть оператор M (L, p)-радиален. Тогда существует экспонецициально ограниченная с константами K, ω из определения* 1 *и сильно непрерывная разрешающая полугруппа уравнения* (1) *(уравнения* (5)*), рассматриваемого на подпространстве $\tilde{\mathcal{U}}$ $(\tilde{\mathcal{F}})$.*

Замечание 2. Операторы полугруппы уравнения (1) (уравнения (5)) при $t > 0$ можно представить в виде

$$U(t) = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1} L\right)^{k(p+1)},$$

$$\left(F(t) = s\text{-}\lim_{k\to\infty}\left(L\left(L - \frac{t}{k(p+1)}M\right)^{-1}\right)^{k(p+1)}\right).$$

Замечание 3. Единицей полугруппы $\{U(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ является проектор P (Q) вдоль $\mathcal{U}^0$ $(\mathcal{F}^0)$ на $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$.

Замечание 4. В качестве плотного в $\mathcal{U}^1$ $(\mathcal{F}^1)$ линеала допустимых начальных значений задачи Коши для уравнения (1) (уравнения (5)) можно взять множество $\mathrm{im} R^L_{(\mu,p+1)}(M)$ $(\mathrm{im} L^L_{(\mu,p+1)}(M))$, на котором полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{U}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ $(\{F(t) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{F}}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\})$ дифференцируема в сильной топологии.

2. Относительно спектральная теорема

Приведенные в этом параграфе результаты получены в [15].

Пусть выполнено условие

$$\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M), \quad \text{(B)}$$

где $\sigma_1^L(M)$ и $\sigma_2^L(M)$ — непустые множества, такие, что существует замкнутый контур $\Gamma \subset \rho^L(M)$, ограничивающий область, внутри которой лежит $\sigma_1^L(M)$, а $\sigma_2^L(M)$ лежит вне этой области.

Считаем контур Γ положительно ориентированным. Имеют смысл интегралы

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\mu^L(M)d\mu, \quad T = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L_\mu^L(M)d\mu.$$

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (B). *Тогда операторы* $S : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ и $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ — *проекторы.*

Положим $\ker S = \mathcal{U}^2$, $\mathrm{im} S = \mathcal{U}^3$, $\ker T = \mathcal{F}^2$, $\mathrm{im} T = \mathcal{F}^3$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathcal{U}^k$ $(\mathrm{dom} M \cap \mathcal{U}^k)$, $k = 2, 3$.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (B). *Тогда*:
(i) $L_k : \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $k = 2, 3$;
(ii) $M_k : \mathrm{dom} M \cap \mathcal{U}^k \to \mathcal{F}^k$, $k = 2, 3$;
(iii) $\sigma^{L_k}(M_k) = \sigma_k^L(M)$, $k = 2, 3$.

3. Инвариантные подпространства и экспоненциальная дихотомия автономного уравнения

Перейдем к изложению основных результатов.

Лемма 4. *Пусть оператор* M (L, p)*-радиален и выполнено условие* (B). *Тогда для любого* $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{U}^3 \subset \mathrm{im} R^L_{(\mu,k)}(M)$, $\mathcal{F}^3 \subset \mathrm{im} L^L_{(\mu,k)}(M)$.

Доказательство. Докажем утверждение о подпространстве $\mathcal{U}^3$. Используя аналог тождества Гильберта

$$R_\mu^L(M) - R_\lambda^L(M) = (\lambda - \mu)R_\lambda^L(M)R_\mu^L(M) \tag{6}$$

и теорему о вычетах, для $u \in \mathcal{U}$, $\lambda \in \rho^L(M)$ получим

$$Su = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (R_\lambda^L(M) + (\lambda - \mu)R_\lambda^L(M)R_\mu^L(M))ud\mu =$$

$$= \frac{R_\lambda^L(M)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\lambda - \mu)R_\mu^L(M)ud\mu = \dots = \frac{(R_\lambda^L(M))^{k+1}}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (\lambda - \mu)^{k+1}R_\mu^L(M)ud\mu. \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть оператор* M (L, p)*-радиален и выполнено условие* (B). *Тогда* $S = PS = SP$, $T = QT = TQ$.

Доказательство. Возьмем в утверждении леммы 4 $k = p$, тогда $\mathrm{im} S \subset \mathrm{im} R^L_{(\mu,p)}(M) \subset \mathcal{U}^1 = \mathrm{im} P$. Поэтому $Su = PSu$. По определению проекторов имеем

$$PSu = \lim_{k\to\infty}(kR_k^L(M))^{p+1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R_\mu^L(M)ud\mu = SPu.$$

Второе утверждение доказывается аналогично. $\square$

Определение 3. *Пусть $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения* (1). *Множество $\mathcal{P}^1 \subset \mathcal{P}$ называется инвариантным подпространством этого уравнения, если при любом u_0 из некоторого плотного в $\mathcal{P}^1$ линеала существует единственное решение $u = u(t)$ задачи* (1), (4), *причем $u(t) \in \mathcal{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$.*

Теорема 4. *Пусть оператор M (L,p)-радиален и выполнено условие* (B). *Тогда существует не менее двух инвариантных подпространств уравнения* (1) (*уравнения* (5)).

Доказательство. Согласно следствию 1 имеем $(P-S)^2 = P^2 - SP - PS + S^2 = P - 2S + S = P - S$. Поэтому $P - S = P(I-S) = (I-S)P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ — проектор на некоторое подпространство $\mathcal{U}^4 \subset (\mathcal{U}^1 \cap \mathcal{U}^2)$. В силу тождеств $S(P-S) = (P-S)S = \mathbb{O}$, $P = S + P - S$ имеем $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}^3 \oplus \mathcal{U}^4$.

Согласно замечанию 3 верны соотношения: $U(t) = U(t)P = U(t)S + U(t)(P-S)$. Коммутирование операторов S и $U(t)$ следует из тождества (6), замечания 2 и непрерывности оператора S. Тогда для $u_0 \in \mathcal{U}^3$ имеем $U(t)u_0 = U(t)Su_0 = SU(t)u_0 \in \mathcal{U}^3$. Из теоремы 1, замечания 4 и леммы 4 следует, что $\mathcal{U}^3$ – инвариантное подпространство уравнения (1).

Аналогично с заменой проектора S на $P - S$ показывается инвариантность подпространства $\mathcal{U}^4$. При этом начальные значения u_0 можно брать из линеала $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p+1)}(M) \cap \mathcal{U}^4$, который плотен в $\mathcal{U}^4$, поскольку линеал $\mathrm{im}R^L_{(\mu,p+1)}(M)$ плотен в $\mathcal{U}^1$.

Таким же образом доказывается утверждение теоремы об уравнении (5), инвариантными подпространствами которого являются $\mathcal{F}^3$, $\mathcal{F}^4 = \mathrm{im}(Q-T)$. □

Определение 4. *Пусть $\mathcal{P}$ — фазовое пространство уравнения (1), $\mathcal{P} = \mathcal{P}^1 \oplus \mathcal{P}^2$, где $\mathcal{P}^k$ — инвариантные подпространства, $k = 1, 2$. Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет экспоненциальную дихотомию (или, короче, э-дихотомично) на $J \subset \mathbb{R}$, если выполняются следующие условия*:

(i) $\exists N_1, \nu_1 > 0$ $\|u^1(t)\| \le N_1 e^{-\nu_1(s-t)}\|u^1(s)\|$ $\forall s, t \in J$, $s \ge t$;

(ii) $\exists N_2, \nu_2 > 0$, $\|u^2(t)\| \le N_2 e^{-\nu_2(t-s)}\|u^2(s)\|$ $\forall s \in J$ $\forall t \in J \cap [s, +\infty)$,

где решения уравнения $u^k(t) \in \mathcal{P}^k$ $\forall t \in J$, $k = 1, 2$.

Теорема 5. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, существует $\beta > 0$ такое, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\beta \le \mathrm{Re}\mu \le \beta\} = \emptyset$ и множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > 0\}$ ограничено. Тогда уравнение* (1) (*уравнение* (5)) *имеет экспоненциальную дихотомию на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Из условий теоремы следует выполнение условия (B). Переобозначим инвариантные многообразия $\mathcal{U}^3 = \mathcal{U}^+$, $\mathcal{U}^4 = \mathcal{U}^-$. Пусть $L_\pm = L\big|_{\mathcal{U}^\pm}$, $M_\pm = M\big|_{\mathrm{dom}M_\pm}$, $\mathrm{dom}M_\pm = \mathrm{dom}M \cap \mathcal{U}^\pm$. Согласно теореме 3 $L_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^\pm; \mathcal{F}^\pm)$, $M_\pm \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}^\pm; \mathcal{F}^\pm)$, $\sigma^{L_\pm}(M_\pm) = \sigma_\pm$, где $\sigma_- = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu < 0\}$. Отсюда следует, что оператор M_+ (L_+, σ)-ограничен [4], а оператор M_- (L_-, p)-радиален с константой $\omega \le -\beta$.

Введем обозначения $U_\pm(t) = U(t)\big|_{\mathcal{U}^\pm}$. При доказательстве теоремы 4, в частности, показано, что $U_\pm(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^\pm)$. Из (L_+, σ)-ограниченности оператора M_+ и результатов [4] следует, что полугруппа $\{U_+(t) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ аналитически продолжима до группы во всю плоскость, а ее операторы представимы в виде

$$U_+(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^{L_+}_\mu(M_+)e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R},$$

где замкнутый контур Γ ограничивает σ_+, как в условии (B).

Для $u \in \mathcal{U}^1$ имеем $u = u^+ + u^-$, $u^\pm \in \mathcal{U}^\pm$. Так, если $s \ge t$, то

$$u^+(t) = U_+(t-s)u^+(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^{L_+}_\mu(M_+)e^{\mu(t-s)}u^+(s)d\mu =$$

$$= e^{-\nu_1(s-t)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R_\mu^{L_+}(M_+) e^{(\mu-\nu_1)(t-s)} u^+(s) d\mu.$$

Можно выбрать такой контур Γ, что $\nu_1 = \min\{\mathrm{Re}\mu : \mu \in \Gamma\} > 0$. Отсюда вытекает оценка

$$\|u^+(t)\| \leq e^{-\nu_1(s-t)} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \|R^{L_+}(M_+)\| |d\mu| \|u^+(s)\| \leq e^{-\nu_1(s-t)} N_1 \|u^+(s)\|.$$

Здесь использована непрерывность $R_\mu^L(M)$ по μ на компакте $\Gamma \subset \rho^L(M)$.

Далее, пусть $t \geq s$, тогда $u^-(t) = U_-(t-s)u^-(s)$ и

$$\|u^-(t)\| \leq N_2 e^{-\nu_2(t-s)} \|u^-(s)\|.$$

В силу теоремы 2 здесь можно взять $\nu_2 = \beta$, $N_2 = K$. Теорема доказана. □

4. Неавтономное уравнение

Рассмотрим задачу Коши (4) для уравнения

$$L\,\dot{u}(t) = a(t) M u(t), \tag{7}$$

где $a \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$. Покажем, что для неавтономных уравнений такого вида пригодно понятие фазового пространства.

Теорема 6. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, $a \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathbb{R}_+)$. Тогда фазовым пространством уравнения* (7) *является множество $\mathcal{U}^1$.*

Доказательство. Сделав в (4), (7) замену

$$\tau = \int\limits_0^t a(z)dz \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad T = \int\limits_0^{+\infty} a(z)dz \leq +\infty, \tag{8}$$

мы приходим к задаче Коши

$$L\,\dot{v}(\tau) = M v(\tau), \quad \tau \in [0, T),$$

$$v(0) = u_0.$$

Здесь $v(\tau) = u(\varphi(\tau))$, а $t = \varphi(\tau)$ – обратное к (8) преобразование, которое существует, поскольку $a(z) > 0$, и поэтому функция $\tau(t)$ монотонно возрастает. По теореме 1 получим требуемое. □

Теорема 7. *Пусть оператор M (L,p)-радиален, существует $\beta > 0$ такое, что $\sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : -\beta \leq \mathrm{Re}\mu \leq \beta\} = \emptyset$, множество $\sigma_+ = \sigma^L(M) \cap \{\mu \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\mu > 0\}$ ограничено, а для функции $a \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ выполняется $\inf\limits_{z \in \mathbb{R}} a(z) > 0$. Тогда уравнение* (7) *имеет экспоненциальную дихотомию на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 6, воспользуемся заменой (8), подразумевая теперь, что переменная t, а значит, и τ могут принимать любые отрицательные значения. Понятно, что упомянутые прежде подпространства $\mathcal{U}^+$ и $\mathcal{U}^-$ являются инвариантными и для уравнения (7). Для $v(\tau) \in \mathcal{U}^1$ имеем $v(\tau) = v^+(\tau) + v^-(\tau)$, $v^\pm(\tau) \in \mathcal{U}^\pm$.

По теореме 5, если $\tau \leq \zeta$, то $\|v^+(\tau)\| \leq N_1 e^{-\nu_1(\zeta-\tau)}\|v^+(\zeta)\|$ при некоторых $N_1, \nu_1 > 0$ и поэтому для $t = \varphi(\tau) \leq s = \varphi(\zeta)$

$$\|u^+(t)\| = \|v^+(\tau)\| \leq N_1 e^{-\nu_1 \int\limits_t^s a(z)dz}\|v^+(\zeta)\| = N_1 e^{-\nu_1 a(r_1)(s-t)}\|u^+(s)\| \leq$$

$$\leq N_1 e^{-\nu_3(s-t)}\|u^+(s)\|,$$

где $r_1 \in (t,s)$ по теореме о среднем; $\nu_3 = \nu_1 \inf\limits_{z\in\mathbb{R}} a(z)$.

Аналогичным образом для $s \in \mathbb{R}$, $t \in [s,+\infty)$ получим

$$\|u^-(t)\| \leq N_2 e^{-\nu_2 \int\limits_s^t a(z)dz}\|u^-(s)\| = N_2 e^{-\nu_2 a(r_2)(t-s)}\|u^-(s)\| \leq$$

$$\leq N_2 e^{-\nu_4(t-s)}\|u^-(s)\|,$$

$r_2 \in (s,t)$, $\nu_4 = \nu_2 \inf\limits_{z\in\mathbb{R}} a(z)$. □

5. Экспоненциальные дихотомии линеаризованной системы уравнений фазового поля

Рассмотрим систему уравнений

$$\theta_t(x,t) + \varphi_t(x,t) = \Delta\theta(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+; \tag{9}$$

$$\Delta\varphi(x,t) + \alpha\varphi(x,t) + \beta\theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{10}$$

снабженную граничными условиями

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(x,t) + \lambda\theta(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+; \tag{11}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}(x,t) + \lambda\varphi(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{12}$$

которая является линеаризацией в нуле системы уравнений фазового поля, описывающих в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [16, 17]. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Искомыми функциями являются $\theta(x,t)$, $\varphi(x,t)$.

Редуцируем систему (9)–(12) к уравнению (1). Сначала сделаем замены $\theta(x,t)+\varphi(x,t) = u(x,t)$, $\varphi(x,t) = v(x,t)$. Тогда система примет вид

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - \Delta v(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+; \tag{13}$$

$$\Delta v(x,t) + (\alpha-\beta)v(x,t) + \beta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+; \tag{14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x,t) + \lambda u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+; \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + \lambda v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{16}$$

Возьмем $\mathcal{U} = \mathcal{F} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \beta I & (\alpha-\beta)I + \Delta \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{dom} M = \left\{(u,v) \in (H^2(\Omega))^2 : \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right) u(x) = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \lambda\right) v(x) = 0, x \in \partial\Omega\right\}.$$

Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$. Причем $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$.

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\mathrm{dom} A = \{w \in H^2(\Omega) : \dfrac{\partial w}{\partial n}(x) + \lambda w(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 8. *Пусть* $\beta - \alpha \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* M $(L,0)$*-радиален.*

Доказательство. Используя разложение по базису $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$, нетрудно получить операторы

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu I - \Delta & \Delta \\ -\beta I & (\beta-\alpha)I - \Delta \end{pmatrix},$$

$$(\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\beta-\alpha-\lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu(\beta-\alpha) + (\alpha-\mu)\lambda_k + \lambda_k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{-\lambda_k \langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu(\beta-\alpha) + (\alpha-\mu)\lambda_k + \lambda_k^2} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\beta\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu(\beta-\alpha) + (\alpha-\mu)\lambda_k + \lambda_k^2} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(\mu-\lambda_k)\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu(\beta-\alpha) + (\alpha-\mu)\lambda_k + \lambda_k^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}),$$

$$R_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}} & \mathbb{O} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\beta\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{(\beta-\alpha-\lambda_k)\left(\mu - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}),$$

$$L_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{\mu - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}} & \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{-\lambda_k\langle \cdot, \varphi_k\rangle \varphi_k}{(\beta-\alpha-\lambda_k)\left(\mu - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}).$$

Поскольку последовательности $\{\beta(\beta-\alpha-\lambda_k)^{-1}\}$ и $\{-\lambda_k(\beta-\alpha-\lambda_k)^{-1}\}$ ограничены, а последовательность $\{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k(\alpha+\lambda_k-\beta)^{-1}\}$ ограничена справа, то существует $K > 0$ такое, что для всех

$$\mu > \omega = \max_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}$$

$$\max\left\{\|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}\right\} \le \frac{K}{|\mu-\omega|}.$$

Найдем полугруппу системы (13)–(16) по формуле

$$U(t) = s - \lim_{n\to\infty} \left((n/t)R^L_{n/t}(M)\right)^n$$

(см. [5, 7]). Имеем

$$\left((n/t)R^L_{n/t}(M)\right)^n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n/t)^n\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\left(\dfrac{n}{t} - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)^n} & \mathbb{O} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(n/t)^n\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{(\beta-\alpha-\lambda_k)\left(\dfrac{n}{t} - \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)^n} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$U(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta\exp\left(\dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

Полученная полугруппа вырождается на ядре оператора L. Фазовым пространством системы (13)–(16) является подпространство

$$\mathcal{U}^1 = \{(u, \beta(\beta-\alpha-A)^{-1}u) \in (L_2(\Omega))^2 : u \in L_2(\Omega)\}.$$

Введем обозначение $\mu_k = \dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}$.

Теорема 9. *Пусть* $\beta-\alpha, -\alpha, 0 \notin \sigma(A)$ *и существуют такие* λ_k, *что* $\mathrm{Re}\mu_k > 0$. *Тогда система* (13)–(16) *имеет экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Нетрудно показать, что $\sigma^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = \mu_k\}$. Из доказательства теоремы 8 следует, что в правой полуплоскости чисел μ_k конечное количество. Поэтому условия теоремы 5 выполняются в силу дискретности спектра $\sigma(A)$, а значит, и относительного спектра $\sigma^L(M)$. □

Замечание 5. Очевидно, что

$$\mathcal{U}^+ = \mathrm{span}\{\varphi_k : \mathrm{Re}\mu_k > 0\}, \quad \mathcal{U}^- = \overline{\mathrm{span}}\{\varphi_k : \mathrm{Re}\mu_k < 0\},$$

$$U_+(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k:\mathrm{Re}\mu_k>0} \exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \displaystyle\sum_{k:\mathrm{Re}\mu_k>0} \frac{\beta\exp\left(\dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$U_-(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k:\mathrm{Re}\mu_k<0} \exp\left(\frac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \displaystyle\sum_{k:\mathrm{Re}\mu_k<0} \frac{\beta\exp\left(\dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k t}{\alpha+\lambda_k-\beta}\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемой системе уравнение (13) заменим на уравнение

$$b(t)u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - \Delta v(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{17}$$

где $b(t) > 0$ — скалярная функция.

Следствие 2. *Пусть* $\beta - \alpha, -\alpha, 0 \notin \sigma(A)$, *существуют такие* λ_k, *что* $\mathrm{Re}\mu_k > 0$, *функция* $b \in C(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ *ограничена. Тогда система* (14)–(17) *имеет экспоненциальную дихотомию.*

Доказательство. Система (14)–(17) редуцируется к уравнению (7) с функцией $a(t) = 1/b(t)$, которая удовлетворяет условиям теоремы 7 в силу положительности и ограниченности функции $b(t)$. □

Замечание 6. Эволюционный процесс [2, 11] неавтономной системы (14)–(17) имеет вид

$$U(t,s) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \exp\left(\dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\int\limits_s^t \dfrac{d\tau}{b(\tau)}\right)\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\beta\exp\left(\dfrac{(\alpha+\lambda_k)\lambda_k}{\alpha+\lambda_k-\beta}\int\limits_s^t \dfrac{d\tau}{b(\tau)}\right)}{\beta-\alpha-\lambda_k}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad s \le t.$$

Список литературы

[1] Соболевский П.Е. О вырождающихся параболических операторах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 2. С. 302–304.

[2] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[3] Массера Ж., Шеффер Ж. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.

[4] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.

[5] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.

[6] Федоров В.Е. Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.

[7] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, вып. 3. С. 173–200.

[8] Свиридюк Г.А., Келлер А.В. Инвариантные пространства и дихотомии решений одного класса линейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Математика. 1997. № 5. С. 60–68.

[9] Келлер А.В. Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск: ЧелГУ, 1997.

[10] Левитан Б.М., Жиков В.В. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1978.

[11] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.

[12] Баскаков А.Г. Обратимость линейных дифференциальных операторов и экспоненциальная дихотомия // Докл. РАН. 1999. Т. 368, № 5. С. 590–592.

[13] Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Смешанная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с квазиоднородной старшей частью. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

[14] Федоров В.Е. О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 12. С. 1646–1649.

[15] Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения $Ax(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 11. С. 1996–2010.

[16] Плотников П.И., Старовойтов В.Н. Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.

[17] Плотников П.И., Клепачева А.В. Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.

Поступила в редакцию 11 марта 2005 г.,
в переработанном виде — 12 октября 2005 г.