

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕРМОДИФФУЗИИ В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ*

М. В. ЕФИМОВА

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск, Россия

e-mail: andr@icm.krasn.ru

Stability of the interface between two immiscible newtonian fluids to monotonous perturbations is studied. A linear profile of concentration is assumed for both fluids. Explicit dependencies of Marangoni number versus wave number and other physical parameters were found. Neutral stability curves were numerically obtained in the case of the glycerin — water system.

1. Основные уравнения и равновесное состояние

Рассмотрим движение двух несмешивающихся несжимаемых теплопроводных вязких жидкостей с общей границей раздела. Обозначим через Ω_j ($j = 1, 2$) области, занятые жидкостями, через ρ_j , ν_j , χ_j , c_{pj} — соответственно плотности, кинематические вязкости, коэффициенты температуропроводности, удельной теплоемкости жидкостей. Далее предполагается, что эти параметры — положительные постоянные. Тогда движение жидкостей описывается системой уравнений при $\mathbf{x} \in \Omega_j$:

$$\mathbf{u}_{jt} + \mathbf{u}_j \nabla \mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_j} \nabla p_j = \nu_j \Delta \mathbf{u}_j; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_j = 0; \quad (1.2)$$

$$\theta_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla \theta_j = \chi_j \Delta \theta_j; \quad (1.3)$$

$$c_{jt} + \mathbf{u}_j \cdot \nabla c_j = d_j \Delta \left(c_j + \frac{k_\theta^j}{\theta_c} \theta_j \right), \quad (1.4)$$

где $\mathbf{u}_j(\mathbf{x}, t)$ — вектор скорости; p_j — отклонение давления от гидростатического; θ_j — температура; c_j — концентрация; θ_c — средняя температура слоев, внешние силы отсутствуют.

Обозначим через Γ поверхность раздела жидкостей. Предположим, что коэффициент поверхностного натяжения σ на границе раздела зависит от температуры и концентрации: $\sigma = \sigma(\theta, c)$. Сформулируем, следуя [1, 2] (в [1] рассмотрен лишь случай стационарного

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00836-а) и Программы Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-902.2003.1).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

течения и $c = 0$), условия на поверхности Γ :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = V_n; \quad (1.6)$$

$$\theta_1 = \theta_2, \quad c_1 = \alpha c_2; \quad (1.7)$$

$$(P_2 - P_1)\mathbf{n} = 2\sigma H\mathbf{n} + \nabla_{11}\sigma; \quad (1.8)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial n} - \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial n} = 0; \quad (1.9)$$

$$\rho_2 d_2 \left(\frac{\partial c_2}{\partial n} + \frac{k_\theta^2}{\theta_2} \frac{\partial \theta_2}{\partial n} \right) = \rho_1 d_1 \left(\frac{\partial c_1}{\partial n} + \frac{k_\theta^1}{\theta_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial n} \right). \quad (1.10)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор нормали к Γ , направленный из Ω_1 в Ω_2 ; V_n — скорость перемещения поверхности раздела Γ в направлении \mathbf{n} ; $P_j = (-p_j - \rho_j \mathbf{g} \cdot \mathbf{x})E + 2\rho_j \nu_j D_j$ — тензоры напряжений; E — единичный тензор; H — средняя кривизна поверхности Γ ($H > 0$, если Γ выпукла наружу области Ω_1); $\nabla_{11} = \nabla - (\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}$ — поверхностный градиент; $\lambda_j = \chi_j \rho_j c_{p_j}$ — коэффициенты теплопроводности; \mathbf{u} и θ — значения вектора скорости и температур обеих жидкостей на Γ , попарно совпадающие в силу (1.5), (1.7), так что $\nabla_{11} \cdot \mathbf{u}$ есть поверхностная дивергенция вектора \mathbf{u} , во втором равенстве (1.7) α есть постоянная равновесия Генри.

Обычно используется линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры и концентрации

$$\sigma(\theta, c) = \sigma^0 - \gamma(c - c^0) - \sigma_T(\theta - \theta^0), \quad \sigma_T = \text{const} > 0, \quad \gamma = \text{const} > 0. \quad (1.11)$$

Области Ω_1 и Ω_2 могут контактировать не только друг с другом, но и с твердыми телами. Поверхности твердых тел, контактирующих с жидкостями, обозначим через Σ_i . На них ставятся условия прилипания

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \cap \Sigma_i, \quad (1.12)$$

где $\mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t)$ — скорость движения стенки Σ_i . Кроме того, будем считать, что температура в точках Σ_i удовлетворяет одному из условий

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial n} = h_i(\mathbf{x}, t), \quad \theta_i = b_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \cap \Sigma_i, \quad (1.13)$$

с заданными функциями $h_i(\mathbf{x}, t), b_i(\mathbf{x}, t)$.

Если через твердые поверхности Σ_i нет потока вещества, то

$$\frac{\partial c_i}{\partial n} + \frac{k_\theta^i}{\theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma_i. \quad (1.14)$$

Соотношения (1.1)–(1.10) следует дополнить начальными условиями

$$\Omega_i = \Omega_i^0; \quad (1.15)$$

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \quad (1.16)$$

$$\theta_i(\mathbf{x}, 0) = \theta_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0; \quad (1.17)$$

$$c_i(\mathbf{x}, 0) = c_i^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_i^0. \quad (1.18)$$

Если поверхности Σ_i не имеют общих точек с Γ , то постановка нестационарной задачи о термокапиллярном движении закончена. Сформулируем эту задачу. Требуется найти области Ω_i ($i = 1, 2$) и функции \vec{u}_i , p_i , θ_i , c_i , определенные в областях Ω_i так, чтобы выполнялись уравнения (1.1)–(1.3), граничные условия (1.4)–(1.10), (1.12), (1.13), (1.14) и начальные условия (1.15)–(1.18).

Заметим, что в [3] доказана разрешимость плоской стационарной задачи о чисто термокапиллярном течении одной жидкости. В работе [4] доказана глобальная разрешимость одномерной нестационарной задачи с двумя коэффициентами вязкости, правда, без термокапиллярного эффекта. В [5] изучена линейная устойчивость поверхности при наличии диффузионного переноса между двумя несмешивающимися вязкими жидкостями.

В данной работе рассматриваются два несмешивающихся несжимаемых плоских слоя смесей с общей поверхностью раздела $y = 0$. Плоскости $y = \pm l$ суть непроницаемые твердые стенки. Считается, что данная конфигурация находится в покое: $\mathbf{u}_j = 0$, $j = 1, 2$. При указанных выше условиях задача о термодиффузионном равновесии с поверхностью раздела [6], как можно видеть, имеет решение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j = 0, \quad p_j = \text{const}, \quad \theta_1 &= \frac{\theta_{10} - \theta_{20}}{(\lambda + 1)l} y + \frac{\theta_{20} + \lambda\theta_{10}}{\lambda + 1}, \\ \theta_2 &= \frac{\lambda(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + \frac{\theta_{20} + \lambda\theta_{10}}{\lambda + 1}, \\ c_1 &= -\frac{k_1(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + c_0, \quad c_2 = -\frac{k_2\lambda(\theta_{10} - \theta_{20})}{(\lambda + 1)l} y + c_0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В (1.19) θ_{10} , θ_{20} — температуры твердых стенок при $y = \pm l$ соответственно; $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ — отношение коэффициентов теплопроводностей; $k_j = k_\theta^j/\theta_c$, k_θ^j — коэффициенты термодиффузии; c_0 — концентрация на границе раздела (все эти величины предполагаются постоянными).

Замечание 1. Поверхностно-активные вещества на поверхности $y = 0$ отсутствуют, а в законе Генри $c_2 = \alpha c_1$ постоянная α полагается без ограничения общности равной единице.

2. Задача о малых возмущениях

Для изучения устойчивости равновесного состояния двух слоев жидкостей (1.19) воспользуемся уравнениями малых возмущений, полученных в общем виде в [6]. Будем рассматривать только стационарные возмущения, тогда в линеаризованной задаче исчезают все производные по времени.

Выберем в качестве масштаба длины, скорости, давления, температуры и концентрации соответственно величины

$$l, \quad \frac{\nu_j}{l}, \quad \frac{\rho_j \nu_j^2}{l^2}, \quad \frac{(\theta_{10} - \theta_{20})\nu_j}{\chi_j}, \quad \frac{k_\theta^j(\theta_{10} - \theta_{20})}{\theta_c}, \quad j = 1, 2.$$

Уравнения малых возмущений в слоях $\Omega_1 = \{1 > \eta > 0, -\infty < \xi < \infty\}$, $\Omega_2 = \{-1 < \eta < 0, -\infty < \xi < \infty\}$ ($\xi = x/l$, $\eta = y/l$) будут иметь вид

$$\nabla P_j = \Delta \mathbf{U}_j, \quad \text{div } \mathbf{U}_j = 0, \quad \Delta T_j = \varepsilon_j V_j, \quad \Delta(C_j + \text{Pr}_j T_j) = S_j V_j \frac{\partial c_j}{\partial \eta}, \quad (2.1)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\lambda + 1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 1}, \quad S_j = \frac{\nu_j}{d_j}, \quad \text{Pr}_j = \frac{\nu_j}{\chi_j}. \quad (2.2)$$

Граничные условия на поверхности раздела $\eta = 0$ сводятся в этом случае к следующим (влиянием поверхностной вязкости пренебрегаем, так как она обычно очень мала):

$$U_2 = \nu U_1, \quad V_2 = V_1 = 0, \quad C_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} R = k_\theta \left(C_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \eta} R \right); \quad (2.3)$$

$$T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} R = \frac{\nu}{\chi} \left(T_1 + \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} R \right), \quad \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \frac{\lambda \nu}{\chi} \frac{\partial T_1}{\partial \eta}; \quad (2.4)$$

$$\rho \nu^2 P_1 - P_2 + 2V_{2\eta} - 2\rho \nu^2 V_{1\eta} = \text{We} R_{\xi\xi}; \quad (2.5)$$

$$U_{2\eta} + V_{2\xi} - \rho \nu^2 (U_{1\eta} + V_{1\xi}) = -M \left(T_2 + \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} R \right)_\xi - \text{Sr} \left(C_2 + \frac{\partial c_2}{\partial \eta} R \right)_\xi; \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 c_2}{\partial \eta^2} R + \text{Pr}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = \rho d k_\theta \left(\frac{\partial C_1}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial \eta^2} R + \text{Pr}_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right), \quad (2.7)$$

где введены обозначения: $\nu = \nu_1/\nu_2$, $k_\theta = k_\theta^1/k_\theta^2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $\rho = \rho_1/\rho_2$; Pr — число Прандтля;

$$\begin{aligned} \text{We} &= \frac{\sigma_0 l}{\rho_2 \nu_2^2} \quad \text{— число Вебера;} \\ M &= \frac{\sigma_T (\theta_{10} - \theta_{20}) l}{\rho_2 \nu_2 \chi_2} \quad \text{— число Марангони;} \\ \text{Sr} &= \frac{\gamma k_\theta^2 l (\theta_{10} - \theta_{20})}{\rho_2 \nu_2^2 \theta_c} \quad \text{— число Соре.} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Граничные условия на твердых стенках:

$$U_1 = 0, \quad T_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad \frac{\partial C_1}{\partial \eta} + \text{Pr}_1 \frac{\partial T_1}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 1; \quad (2.9)$$

$$U_2 = 0, \quad T_2 = 0, \quad V_2 = 0, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \eta} + \text{Pr}_2 \frac{\partial T_2}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = -1. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.1)–(2.10) являются спектральной задачей относительно числа Марангони. Ищем ее решение, пропорциональное $\exp(i\alpha\xi)$, α — безразмерное волновое число. В слоях $0 < \eta < 1$ ($j = 1$) и $-1 < \eta < 0$ ($j = 2$) решение имеет вид

$$\begin{aligned} P_j(\eta) &= A_j \text{sh}\alpha\eta + B_j \text{ch}\alpha\eta, \\ U_j(\eta) &= \left(H_j + \frac{i}{2} B_j \eta \right) \text{sh}\alpha\eta + \left(\tilde{\nu} F + \frac{i}{2} A_j \eta \right) \text{ch}\alpha\eta, \\ V_j(\eta) &= \left(D_j + \frac{1}{2} A_j \eta \right) \text{sh}\alpha\eta + \frac{1}{2} B_j \text{ch}\alpha\eta, \\ T_j(\eta) &= \left(Q_j - \frac{1}{8\alpha^2} \varepsilon_j A_j \eta + \frac{1}{8\alpha} \varepsilon_j B_j \eta^2 \right) \text{sh}\alpha\eta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[N_j + \left(\frac{1}{2\alpha} \varepsilon_j D_j - \frac{1}{8\alpha^2} \varepsilon_j B_j \right) \eta + \frac{1}{8\alpha} \varepsilon_j A_j \eta^2 \right] \operatorname{ch} \alpha \eta, \\
 C_j(\eta) = & \left[\Phi_j - \frac{\varepsilon_j (S_j - \operatorname{Pr}_j) A_j}{8\alpha^2} \eta + \frac{\varepsilon_j B_j (S_j - \operatorname{Pr}_j)}{8\alpha} \eta^2 \right] \operatorname{sh} \alpha \eta + \\
 & + \left[M_j + \frac{\varepsilon_j (A_j - B_j) (S_j - \operatorname{Pr}_j)}{16\alpha^3} + \frac{\varepsilon_j (S_j - \operatorname{Pr}_j)}{2\alpha} \left(D_j - \frac{B_j}{4\alpha} \right) \eta + \frac{\varepsilon_j A_j (S_j - \operatorname{Pr}_j)}{8\alpha} \eta^2 \right] \operatorname{ch} \alpha \eta,
 \end{aligned}$$

где $A_j, B_j, H_j, F, D_j, Q_j, N_j, \Phi_j, M_j$ — постоянные, которые зависят от волнового числа α ; величина $\tilde{\nu} = 1$ при $j = 1$ и $\tilde{\nu} = \nu$ при $j = 2$.

Для начала предположим, что $We \gg 1$, это часто выполнено для экспериментов в условиях орбитального полета. В этом случае поверхность раздела можно считать недеформируемой, т. е. $R = 0$, и граничные условия (2.5) не учитываются в дальнейшем анализе.

Число Марангони находим из граничного условия (2.6) при $\eta = 0$ (после “отделения” переменной ξ ; учтены также равенства $V_1 = V_2 = 0$ при $\eta = 0$):

$$M = \frac{i(U_{2\eta} - \rho\nu^2 U_{1\eta}) - \alpha \operatorname{Sr} C_2}{\alpha T_2}.$$

Подставив в формулу постоянные $H_1, A_1, H_2, A_2, N_2, M_2$, найденные из граничных условий (2.3)–(2.10), получим после длинных преобразований выражение для числа Марангони:

$$\begin{aligned}
 M = & \frac{8\chi(\rho\nu + 1)}{F(\alpha)\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)} \operatorname{cth} \alpha + \frac{\operatorname{SrPr}_2(1 + \rho d k_\theta)}{1 + \rho d} - \\
 & - \frac{\operatorname{Sr}\chi(\rho d k_\theta \varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2 \nu)}{F(\alpha)\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)\nu(1 + \rho d)} \operatorname{cth} \alpha \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\operatorname{cth} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} + a(\alpha) \right), \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F(\alpha) = & \frac{\operatorname{cth} \alpha (\alpha + 1) - \operatorname{sh} \alpha (\operatorname{ch} \alpha + \alpha \operatorname{sh} \alpha)}{\alpha^2 (\alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha)}; \quad b(\alpha) = \frac{2\alpha + \operatorname{cth} \alpha (\alpha + 1) - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\alpha^2 (\alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha)}; \\
 a(\alpha) = & 1 + \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\alpha - \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha}; \quad g(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} - \frac{\operatorname{cth} \alpha}{\alpha}.
 \end{aligned}$$

При этом в (2.11) $\chi = \chi_1/\chi_2 \neq 1$. В случае $\chi = 1$ $N_1 = N_2 = 0$ и возмущение температуры на поверхности раздела равно нулю. Значит, термокапиллярный эффект на ней отсутствует. Однако можно найти критическое число Co_c :

$$\operatorname{Sr} = \frac{8\nu(1 + \rho\nu)(1 + \rho d)}{(\rho d k_\theta \varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2 \nu) P(\alpha)}, \quad (2.12)$$

где

$$P(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\operatorname{cth} \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} + a(\alpha).$$

Как видно из рис. 1, в системе глицерин — вода усиление термодиффузионного эффекта наблюдается в области коротких волн, а в системе вода — глицерин — в области длинных волн.

По формуле (2.11) построены кривые для систем вода — глицерин и глицерин — вода, которые согласуются с найденной асимптотикой:

в случае длинных волн ($\alpha \rightarrow 0$) $M \sim \frac{30A_1 - 5A_2}{3} \frac{1}{\alpha^2}$;
 в случае коротких волн ($\alpha \rightarrow \infty$) $M \sim A_1 \alpha^2$, где

$$A_1 = \frac{8\chi(\rho\nu + 1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)}; \quad A_2 = \frac{\text{Sr}\chi(\rho dk_\theta \varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2 \nu)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(1 - \chi)\nu(1 + \rho d)}.$$

В случае деформируемой поверхности критическое число Марангони имеет вид

$$M(\text{We}) = \frac{1 + \rho\nu}{\alpha\varepsilon_1 g_1} - \frac{\text{Sr}(\rho dk_\theta \varepsilon_1 s_1 - \varepsilon_2 s_2 \nu)}{8\alpha(1 + \rho d)\varepsilon_1 \nu g_1} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{\text{cth}\alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2 g(\alpha)} + a(\alpha) \right) + \\ + \frac{\text{SrPr}_1 \varepsilon_2 (1 - \chi)(1 + \rho dk_\theta)}{8(1 + \rho d)\nu g_1} F(\alpha)\text{th}(\alpha) + \frac{\text{Sr}(1 + \rho dk_\theta)}{g_1 \alpha \text{We}(1 + \rho d)} a(\alpha)(1 - \rho\nu), \quad (2.13)$$

где

$$g_1 = \frac{\varepsilon_2(1 - \chi)}{8\chi} F(\alpha)\text{th}(\alpha) + \frac{a(\alpha)(1 - \rho\nu)}{\text{Pr}_2 \alpha \text{We}}.$$

Можно показать, что $M(\text{We}) \rightarrow M$ из (2.13) при $\text{We} \rightarrow \infty$.

На рис. 2, а приведена зависимость числа Марангони в системе глицерин — вода для случая недеформируемой поверхности раздела. Минимум кривой $M = 6.25 \cdot 10^5$ достигается в точке $\alpha = 6.71$ при $\text{Sr} = -10$. Замечено, что при уменьшении числа Соре происходит смещение области устойчивости в область коротких волн, а при увеличении — в область длинных волн. Если поверхность деформируема, то при фиксированном Sr при увеличении We в области длинных волн порог устойчивости понижается (рис. 2, б).

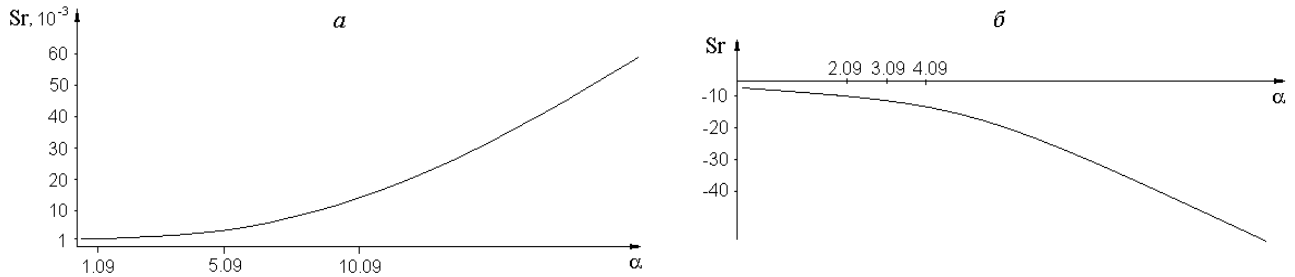


Рис. 1. Зависимость числа Соре от волнового числа α в системе глицерин — вода (а) и в системе вода — глицерин (б).

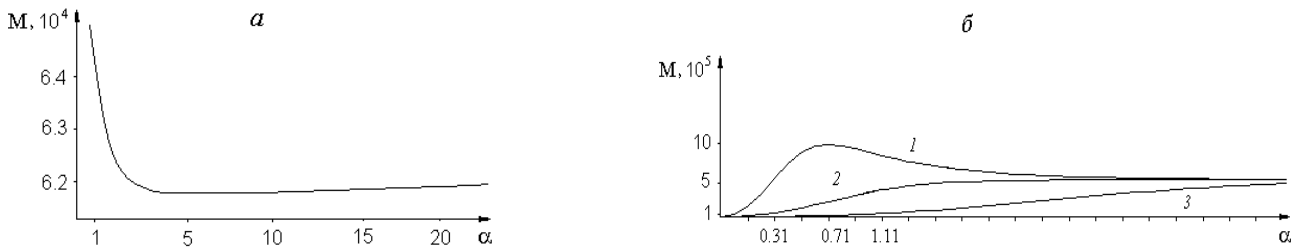


Рис. 2. Зависимость числа Марангони от волнового числа α в системе глицерин — вода при $\text{Sr} = -10$: а — недеформируемая поверхность раздела; б — поверхность деформируемая; кривая 1 — $\text{We} = 100$, 2 — $\text{We} = 10$, 3 — $\text{We} = 1$.

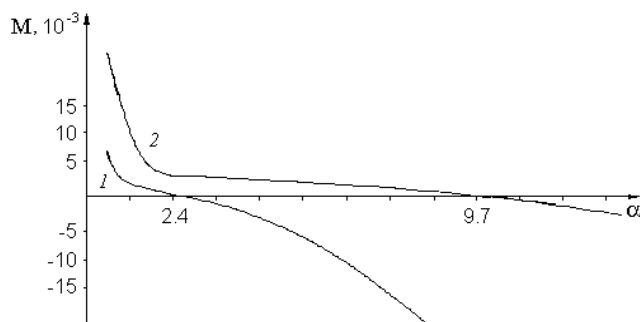


Рис. 3. Зависимость числа Марангони от волнового числа α : кривая 1 при $Sr = -10$, кривая 2 — при $Sr = -100$.

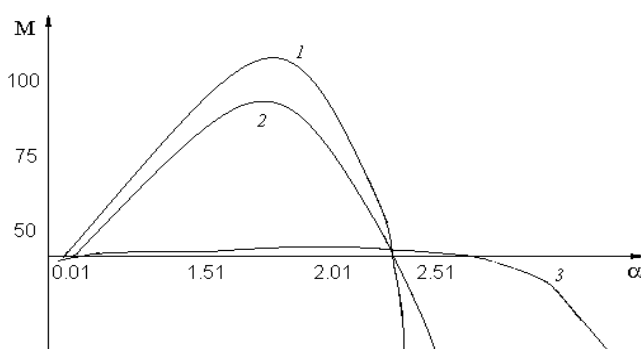


Рис. 4. Зависимость числа Марангони от волнового числа α при $Sr = -10$: кривая 1 — $We = 100$, кривая 2 — $We = 10$, кривая 3 — $We = 1$.

В системе вода — глицерин устойчивость наблюдается в области длинных волн при $Sr = -1, -10$ и в области средних волн при $Sr = -100$ для недеформируемой поверхности (рис. 3). В случае деформируемой поверхности раздела устойчивость наблюдается в диапазоне $\alpha = 0.51, \dots, 2.51$ (рис. 4). Влияние деформируемости границы раздела на устойчивость проявляется в том, что при уменьшении числа Вебера понижается порог устойчивости.

Автор благодарит В.К. Андреева за постановку задачи.

Список литературы

- [1] NAPOLITANO L.G. Plane Marangoni — Poiseuille flow two immiscible fluids // Acta Astronautica. 1980. Vol. 7, N 4, 5. P. 461–478.
- [2] ПУХНАЧЕВ В.В. Движение вязкой жидкости со свободными границами: Учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 1989.
- [3] ЛАГУНОВА М.В. О разрешимости плоской задачи термокапиллярной конвекции // Пробл. мат. анализа. Вып. 10: “Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория”. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. С. 33–47.

- [4] SHELUKHIN V. Joint Motion of Viscous and Semi-Viscous Flows // Intern. Workshop “Free Boundaries in Viscous Flows”. St. Peterburg, 1996. Abstracts. P. 17.
- [5] ХЕННЕНБЕРГ М., Биш П.М., Винь-Адлер М., Занфельд А. Неустойчивость поверхности раздела и продольные волны в системе жидкость — жидкость // Гидродинамика межфазных поверхностей: Сб. статей. 1984. № 34 С. 19–44.
- [6] Андреев В.К. Линеаризованная задача о малых возмущениях движения жидкости с поверхностью раздела при наличии эффектов Соре // Математическое моделирование в механике: Мат. сем. Деп. ВИНТИ № 1999-В99. С. 12–33.

Поступила в редакцию 15 июня 2005 г.