

# МЕТОД КЛАССИФИКАЦИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ПО СЛОЖНОСТИ НА ОСНОВЕ УГЛОВОЙ МЕРЫ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РОСТА ФУНКЦИЙ

В. А. Головешкин, М. В. Ульянов  
*Московская государственная академия  
приборостроения и информатики, Россия*  
e-mail: muljanov@mail.ru

A new classification of complexity of algorithms designed for solving the problems of theoretical and practical comparative analysis of computational algorithms is proposed. The classification is based on a special angular measure of the asymptotic growth rate of functions and enables to range the algorithms according to their growth rate of difficulty.

## Введение

Важной составной частью любого научного исследования некоторой совокупности объектов является классификация, направленная на выявление характерных и общих свойств объектов. В области разработки математического и алгоритмического обеспечения компьютерных систем такой совокупностью объектов являются алгоритмы решения задач, на которых базируются разрабатываемые программные системы. Впечатляющий рост производительности современных компьютерных систем, подчиняющийся “закону Мура” [1], не снижает ресурсных требований к алгоритмическому обеспечению. В состав этих требований входит и временная эффективность программных реализаций. Это определяется тем, что ряд актуальных сегодня вычислительных задач обладает надполиномиальной сложностью, что характерно для задач из  $NP$ -полных и  $NP$ -трудных классов (см., например, [2, 3]). Другой аспект современных вычислительных задач — большая размерность, например, в реальных задачах, решаемых с использованием метода конечных элементов, особенно обратных задач [4, 5]. Выбор математических методов и алгоритмов решения определяет временные характеристики программной реализации вычислений. Решение практически значимой задачи выбора рационального вычислительного алгоритма может опираться и на специальные методы классификации. Статья посвящена разработке метода классификации алгоритмов, основанного на оценке их вычислительной сложности.

Объектами исследования в классической теории алгоритмов являются вычислительные задачи. К сожалению, целый ряд важных результатов традиционной теории алгоритмов [6, 7], основанных на теории сложности, не может быть автоматически перенесен на алгоритмы решения вычислительных задач. Использование результатов теории сложности

вычислений для классификации алгоритмов не вполне корректно. Это связано в том числе и с тем, что большинство определений классов задач, за исключением классов  $P$  и  $EXP$ , не включает в себя явного указания сложностных оценок [6, 8, 9].

Таким образом, задача разработки корректной классификации алгоритмов по вычислительной сложности является актуальной. Сложность алгоритма определяется функцией, фигурирующей (в терминах классов  $O$  или  $\Theta$ ) в ее асимптотической оценке трудоемкости для худшего случая. Напомним, что функция трудоемкости для худшего случая при заданной размерности входа определяется максимальным количеством элементарных операций, задаваемых алгоритмом в принятой модели вычислений, по всем допустимым входам данной размерности.

## 1. Угловая мера асимптотического роста функций

В рамках теоретического исследования алгоритмов представляет интерес более детальное разграничение сложностных оценок функций трудоемкости, сохраняющее традиционное выделение алгоритмов с полиномиальной и экспоненциальной сложностью. Таким образом, речь идет о математической задаче разделения полиномов и экспонент по скорости роста в рамках единой меры с выделением множества функций, разграничивающих полиномы и экспоненты, и выделения дополнительных множеств субполиномиальных и надэкспоненциальных функций. В качестве элемента множества функций, разграничивающих полиномы и экспоненты, выберем функцию степенного логарифма  $g(x) = (\ln x)^{\ln x}$ .

**Утверждение 1.** Функция степенного логарифма  $g(x) = (\ln x)^{\ln x}$  является разграничивающей для полиномов и экспонент.

**Доказательство.** Для доказательства будем использовать понятие “ $o$  малое” для сравнительного анализа скорости роста функций. По определению “ $o$  малое” (в асимптотике на бесконечности) [10]:

$$z(x) = o(y(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{z(x)}{y(x)} = 0.$$

Таким образом, мы хотим показать, что функция  $g(x)$  удовлетворяет следующим двум соотношениям при  $x \rightarrow \infty$ :

$$f(x) = x^k, \quad k > 0 \Rightarrow f(x) = o(g(x)); \quad (1)$$

$$f(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda > 0 \Rightarrow g(x) = o(f(x)). \quad (2)$$

Для доказательства соотношений (1) и (2) воспользуемся леммой о логарифмическом пределе [11]: если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , т. е.  $f(x) = o(g(x))$ .

На основании этой леммы покажем справедливость соотношения (1):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^k)}{\ln((\ln x)^{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cdot \ln x}{\ln x \cdot \ln(\ln x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{\ln(\ln x)} = 0,$$

следовательно,  $x^k = o((\ln x)^{\ln x})$  при  $k > 0$ , и справедливость соотношения (2):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln((\ln x)^{\ln x})}{\ln(e^{\lambda x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x \cdot \ln(\ln x)}{\lambda x} = 0,$$

значит,  $(\ln x)^{\ln x} = o(e^{\lambda x})$  при  $\lambda > 0$ .

Таким образом, показано, что функция степенного логарифма  $g(x) = (\ln x)^{\ln x}$  принадлежит множеству функций, разграничивающих полиномы и экспоненты.  $\square$

В целях дальнейшей классификации алгоритмов по сложности функции трудоемкости введем угловую меру асимптотического роста функций.

Пусть дана функция сложности некоторого алгоритма  $f = f(x)$ , монотонно возрастающая, и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Поставим ей в соответствие функцию

$$h(x) = \ln(f(x)) + \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(x)) + \ln x} x. \quad (3)$$

Покажем, что предел производной функции  $h(x)$  как для полиномов, так и для экспонент равен константе:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = C, \quad C > 0. \quad (4)$$

Докажем следующие две леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $f(x) = e^{\lambda x}(1 + \gamma(x))$ , где  $\lambda > 0$ ,  $\gamma(x) = o(1)$ ,  $\gamma'(x) = o(1)$ , при  $x \rightarrow \infty$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \lambda + 1$ .

**Доказательство.** Вычислим  $h'(x)$  для функции  $f(x)$ , используя определение функции  $h(x)$  — формулу (3):

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{f'}{f} + \frac{\ln f}{\ln f + \ln x} + x \frac{\frac{f'}{f} (\ln f + \ln x) - \ln f \left( \frac{f'}{f} + \frac{1}{x} \right)}{(\ln f + \ln x)^2} = \\ &= \frac{f'}{f} + \frac{\ln f}{\ln f + \ln x} + x \frac{\frac{f'}{f} \ln x - \frac{1}{x} \ln f}{(\ln f + \ln x)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Вычислим пределы при  $x \rightarrow \infty$  слагаемых полученной производной для функции  $f(x) = e^{\lambda x}(1 + \gamma(x))$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{f} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda e^{\lambda x}(1 + \gamma(x)) + e^{\lambda x} \gamma'(x)}{e^{\lambda x}(1 + \gamma(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda(1 + \gamma(x)) + \gamma'(x)}{(1 + \gamma(x))} = \lambda, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f}{\ln f + \ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lambda x + \ln(1 + \gamma(x))}{\lambda x + \ln(1 + \gamma(x)) + \ln x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\frac{f'}{f} \ln x - \frac{1}{x} \ln f}{(\ln f + \ln x)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\frac{\lambda e^{\lambda x}(1 + \gamma) + e^{\lambda x} \gamma'}{e^{\lambda x}(1 + \gamma)} \ln x - \frac{1}{x} (\lambda + \ln(1 + \gamma))}{(\lambda + \ln(1 + \gamma) + \ln x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\lambda(1 + \gamma) + \gamma' \ln x}{(1 + \gamma)} - \frac{\lambda + \frac{\ln(1 + \gamma)}{x}}{x}}{\left( \lambda + \ln(1 + \gamma) + \frac{\ln x}{x} \right)^2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \lambda + 1$ , и лемма 1 доказана.  $\square$

**Лемма 2.** Пусть  $f(x) = x^k(1 + \gamma(x))$ , где  $\gamma(x) = o(1)$ ,  $\gamma'(x) = o(1)$ ,  $x\gamma'(x) = O(1)$ , при  $x \rightarrow \infty$ , тогда  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \frac{k}{k+1}$ .

**Доказательство.** Используем формулу (5) из леммы 1 для  $h'(x)$ :

$$h'(x) = \frac{f'}{f} + \frac{\ln f}{\ln f + \ln x} + x \frac{\frac{f'}{f} \ln x - \frac{1}{x} \ln f}{(\ln f + \ln x)^2}.$$

Вычислим пределы при  $x \rightarrow \infty$  слагаемых производной  $h'(x)$  для функции  $f(x) = x^k(1 + \gamma(x))$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{f} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{kx^{k-1}(1 + \gamma(x)) + x^k \gamma'(x)}{x^k(1 + \gamma(x))} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{x} + \frac{\gamma'(x)}{1 + \gamma(x)} \right] = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f}{\ln f + \ln x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \ln x + \ln(1 + \gamma(x))}{k \ln x + \ln(1 + \gamma(x)) + \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k + \frac{\ln(1 + \gamma(x))}{\ln x}}{k + \frac{\ln(1 + \gamma(x))}{\ln x} + 1} = \frac{k}{k+1}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\frac{f'}{f} \ln x - \frac{1}{x} \ln f}{(\ln f + \ln x)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{\frac{kx^{k-1}(1 + \gamma) + x^k \gamma'}{x^k(1 + \gamma)} \ln x - \frac{1}{x} (k \ln x + \ln(1 + \gamma))}{(k \ln x + \ln(1 + \gamma) + \ln x)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k + \frac{\gamma' \ln x}{(1 + \gamma)} x - (k \ln x + \ln(1 + \gamma))}{\ln^2 x \left[ k + \frac{\ln(1 + \gamma)}{\ln x} + 1 \right]^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)^2} \left[ \frac{k}{\ln^2 x} + \frac{\gamma' x}{(1 + \gamma) \ln x} - \frac{k}{\ln x} - \frac{\ln(1 + \gamma)}{\ln^2 x} \right] = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = k/(k+1)$ , и лемма 2 доказана.  $\square$

Равенство константе предела производной функции  $h(x)$  как для полиномов, так и для экспонент — формула (4) — позволяет доказать следующую лемму, вводящую преобразование системы координат.

**Лемма 3.** Пусть дана функция  $h(x)$ , такая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = C$ , где  $C > 0$ . Рассмотрим образованную на основе функции  $h(x)$  параметрически заданную функцию  $z(s)$ , определенную следующим образом:

$$z(s) = \begin{cases} s = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right), \\ z = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{h(x)} \right), \end{cases} \quad (6)$$

тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{C}.$$

**Доказательство.** По определению функции  $z(s)$  (см. формулу (6)), при  $x \rightarrow \infty$   $s \rightarrow 0$ ,  $h(x) \rightarrow \infty$   $z \rightarrow 0$ , в соответствии с этим положим  $z = 0$  при  $s = 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ).

Вычислим производную функции  $z(s)$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{1}{1+1/h^2} \left( -\frac{h'}{h^2} \right)}{\frac{1}{1+1/x^2} \left( -\frac{1}{x^2} \right)} = \frac{(x^2+1)h'}{h^2+1}.$$

Рассмотрим

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)h'(x)}{h(x)^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 h'(x)}{h(x)^2},$$

заметим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h'(x)}{1} = C,$$

в результате получаем

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 h'(x)}{h(x)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) \frac{x^2}{h(x)^2} = C \frac{1}{C^2} = \frac{1}{C},$$

и лемма 3 доказана. □

Полученный в лемме 3 результат может быть графически интерпретирован следующим образом. В системе координат  $(z, s)$  полиномы и экспоненты отображаются в функции, имеющие в асимптотике при  $x \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow 0$  разные углы наклона касательной в точке  $(z=0, s=0)$ , что и определило предложенное авторами название “угловая мера асимптотического роста функций”. Пример функций  $z(s)$  для полинома  $f(x) = x$  и экспоненты  $f(x) = e^x$  приведен на рис. 1. Доказанные леммы служат основой следующей теоремы.

**Теорема 1** (об угловой мере асимптотического роста функций). Пусть дана функция  $f = f(x)$ , монотонно возрастающая, и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Определим меру  $\pi(f(x))$  асимптотического (на бесконечности) роста функции  $f(x) : \pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg(R)$ , где

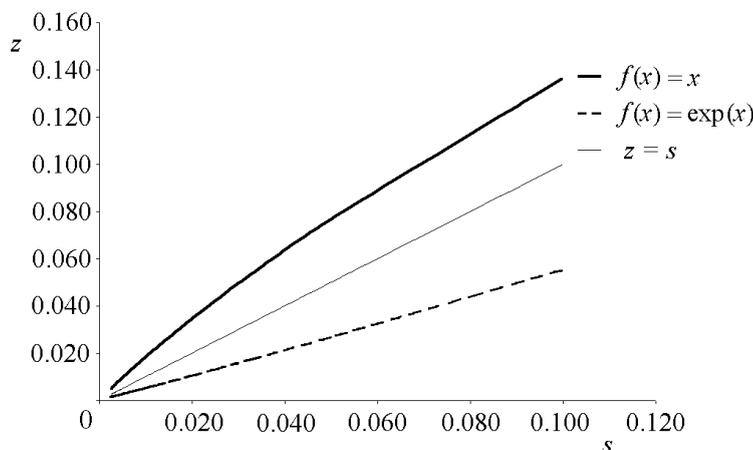


Рис. 1. Функция  $z(s)$  для полинома  $f(x) = x$  и экспоненты  $f(x) = e^x$ .

$R = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds}$ , параметрически заданная функция  $z(s)$  определена в виде

$$\begin{cases} s = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right); \\ z = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{h(x)} \right), \end{cases}$$

а функция  $h(x)$  задана по функции  $f(x)$  следующим образом:

$$h(x) = \ln(f(x)) + \frac{\ln(f(x))}{\ln(f(x)) + \ln x} x,$$

тогда, если:

1)  $f(x) = e^{\lambda x} (1 + \gamma(x))$ , где  $\lambda > 0$ ,  $\gamma(x) = o(1)$ ,  $\gamma' = o(1)$ , при  $x \rightarrow \infty$ , то  $\pi/2 < \pi(f(x)) < \pi$ ;

2)  $f(x) = x^k (1 + \gamma(x))$ , где  $\gamma(x) = o(1)$ ,  $\gamma'(x) = o(1)$ ,  $x\gamma'(x) = O(1)$ , при  $x \rightarrow \infty$ , то  $0 < \pi(f(x)) < \pi/2$ ;

3)  $f(x) = \ln x^{\ln x}$ , то  $\pi(f(x)) = \pi/2$ .

**Доказательство.** Докажем первое утверждение теоремы.

Если  $f(x) = e^{\lambda x} (1 + \gamma(x))$ , то предел производной функции  $h(x)$ , образованной по функции  $f(x)$ , при  $x \rightarrow \infty$  равен  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \lambda + 1$ , где  $\lambda > 0$ , по лемме 1. Значение

$$R = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = \frac{1}{1 + \lambda}$$

в силу леммы 3, а следовательно, возможные значения  $\lambda$  в пределах  $0 < \lambda < \infty$  определяют пределы изменения  $\operatorname{arctg}(R)$  между  $\pi/4 > \operatorname{arctg}(R) > 0$ , что приводит к изменению значений меры  $\pi/2 < \pi(f(x)) < \pi$  в силу определения  $\pi(f(x))$ . Тем самым доказано первое утверждение теоремы.

Докажем второе утверждение. Если  $f(x) = x^k (1 + \gamma(x))$ , то предел производной, образованной по функции  $f(x)$ , функции  $h(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , равен  $\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \frac{k}{k+1}$ , где  $k > 0$ , по лемме 2. Значение

$$R = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = \frac{k+1}{k}$$

в силу леммы 3, а следовательно, возможные значения  $k$  в пределах  $0 < k < \infty$  определяют пределы изменения  $\operatorname{arctg}(R)$  между  $\pi/2 > \pi(f(x)) > \pi/4$ , что приводит к изменению значений меры  $0 < \pi(f(x)) < \pi/2$  в силу определения  $\pi(f(x))$ . Тем самым доказано второе утверждение теоремы.

Для доказательства третьего утверждения рассмотрим функцию  $h(x)$  для функции степенного логарифма  $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$

$$h(x) = \ln x \ln \ln x + x \frac{\ln x \ln \ln x}{\ln x \ln \ln x + \ln x} = \ln x \ln \ln x + x \frac{\ln \ln x}{\ln \ln x + 1},$$

и вычислим предел производной функции  $h(x)$  при  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln \ln x}{x} + \ln x \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} + \frac{\ln \ln x}{\ln \ln x + 1} \right) +$$

$$+ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \frac{\frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} (\ln \ln x + 1) - \ln \ln x \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}}{(\ln \ln x + 1)^2} \right) = 1,$$

тогда в силу леммы 3

$$R = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ (s \rightarrow 0)}} \frac{dz}{ds} = 1,$$

а следовательно,  $\arctg(R) = \pi/4$  и мера  $\pi \left( (\ln x)^{\ln x} \right) = \pi/2$ .

Таким образом, теорема об угловой мере асимптотического роста функций полностью доказана.  $\square$

## 2. Свойства угловой меры асимптотического роста функций

Предложенная угловая мера асимптотического роста функций обладает рядом свойств, которые позволяют использовать ее для построения классификации алгоритмов по сложности функции трудоемкости.

Для сравнения двух функций по асимптотической скорости их роста будем использовать отношение  $\prec$ , введенное Поль-Дюбуа Раймоном (1871) [12]:

$$f(x) \prec g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

На базе введенной меры  $\pi(f(x))$  определим следующие пять функциональных множеств в предположении что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

1. Определим множество функций

$$FZ = \{f(x) \mid f(x) \prec x^k, \forall k > 0\}.$$

Для функции  $f(x)$  из множества  $FZ$  значение  $R$ , определяемое по лемме 3, равно  $+\infty$ , и мера  $\pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg(R) = 0 \forall f(x) \in FZ$ , в частности  $\pi(\ln(x)) = 0$ .

2. Определим множество полиномов

$$FP = \{f(x) \mid \exists k > 0 : f(x) = \Theta(x^k)\}.$$

Данное определение базируется на лемме 2, однако можно показать, что предложенная мера остается в силе и для более широкого класса функций вида  $f(x) = \Theta(x^k)g(x)$ , где  $g(x) \in FZ$ , тогда множество  $FP$  может быть определено следующим образом: вначале определим множество функций

$$F_k = \{f(x) \mid x^{k-\varepsilon} \prec f(x) \prec x^{k+\varepsilon}, k > 0, \varepsilon \rightarrow +0, x \rightarrow +\infty\}$$

и на его основе — множество обобщенных полиномов

$$FP = \{f(x) \mid \exists k > 0 : f(x) \in F_k\},$$

для функции  $f(x)$  из множества  $FP$  значение  $R = (k+1)/k$ ,  $k > 0$ , по леммам 2 и 3 и мера  $\pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg((k+1)/k)$ , следовательно,  $0 < \pi(f(x)) < \pi/2$ .

График меры для полиномов представлен на рис. 2, а.

3. Определим множество функций

$$FL = \{f(x) | x^k \prec f(x) \prec e^{\lambda x}, \forall k > 0, \forall \lambda > 0\}.$$

Для функции  $f(x)$  из множества  $FL$  значение  $R$ , определяемое по лемме 3, равно 1 и мера  $\pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg(1) = \pi/2$ , в частности  $\pi(\ln x^{\ln x}) = \pi/2$ .

4. Определим множество экспонент

$$FE = \{f(x) | \exists \lambda > 0 : f(x) = \Theta(e^{\lambda x})\}.$$

Данное определение базируется на лемме 1, однако можно показать, что предложенная мера остается в силе и для более широкого класса функций вида  $f(x) = \Theta(e^{\lambda x})g(x)$ , где  $g(x) \in \{FZ, FP, FL\}$ , тогда множество  $FE$  может быть определено следующим образом: определим множество функций

$$F_\lambda = \{f(x) | e^{(\lambda-\varepsilon)x} \prec f(x) \prec e^{(\lambda+\varepsilon)x}, \lambda > 0, \varepsilon \rightarrow +0, x \rightarrow +\infty\}$$

и на его основе определим множество обобщенных экспонент

$$FE = \{f(x) | \exists \lambda > 0 : f(x) \in F_\lambda\}.$$

Для функции  $f(x)$  из множества  $FE$  значение  $R = 1/(1 + \lambda)$ ,  $\lambda > 0$ , по леммам 1 и 3, и мера  $\pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg(1/(1 + \lambda))$ , следовательно,  $\pi/2 < \pi(f(x)) < \pi$ . График меры для экспонент представлен на рис. 2, б.

5. Определим множество функций

$$FF = \{f(x) | e^{\lambda x} \prec f(x), \forall \lambda > 0\}.$$

Для функции  $f(x)$  из множества  $FF$  значение  $R$ , определяемое по лемме 3, равно 0 и мера  $\pi(f(x)) = \pi - 2 \cdot \arctg(R) = \pi$ , в частности  $\pi(x^x) = \pi$ .

Укажем следующий ряд свойств, которыми обладает введенная угловая мера асимптотического роста функций  $\pi(f(x))$ :

1) мера  $\pi(f(x))$  не зависит от коэффициента у главного порядка функции  $f(x)$  и ее аддитивных компонент с асимптотической скоростью роста ниже, чем у компонента главного порядка;

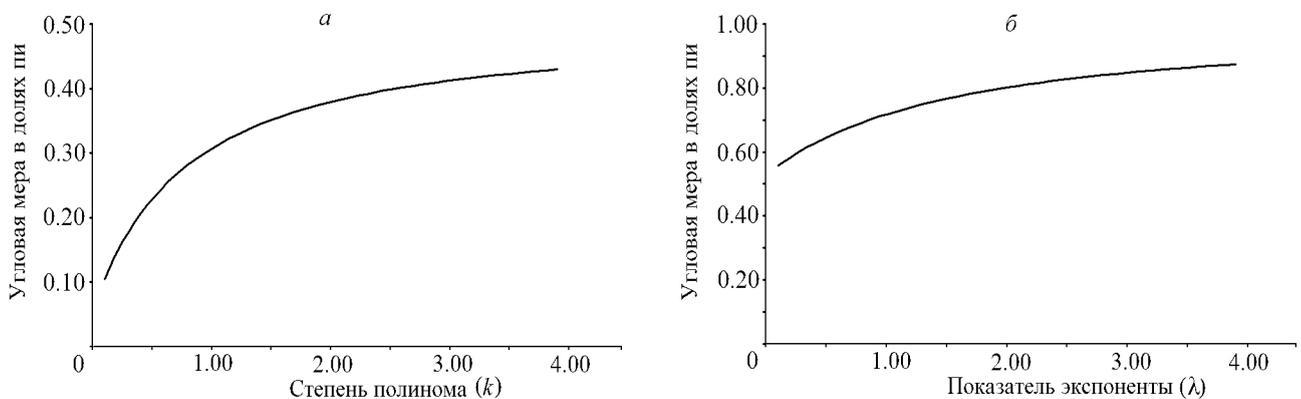


Рис. 2. График меры  $\pi(f(x))$  для полиномов  $f(x) = \Theta(x^k)$  (а) и для экспонент  $f(x) = \Theta(e^{\lambda x})$  (б).

- 2) если  $f(x) = \Theta(g(x))$ , то  $\pi(f(x)) = \pi(g(x))$  в силу свойства 1 и определения множества функций, задаваемых обозначением  $\Theta$ ;
- 3) мера  $\pi(x^k)$  принимает значение, равное  $\pi/4$ , для степени  $k = \sqrt{2}/2$ ;
- 4) мера  $\pi(e^{\lambda x})$  принимает значение, равное  $3\pi/4$ , при показателе  $\lambda = \sqrt{2}$ ;
- 5) мера  $\pi(f(x))$  обладает следующим интересным свойством:  $\pi(x^{1/\lambda}) + \pi(e^{\lambda x}) = \pi$ , в частности  $\pi(x) + \pi(e^x) = \pi$ .

### 3. Классификация вычислительных алгоритмов по вычислительной сложности функции трудоемкости

Использование угловой меры асимптотического роста функций  $\pi(f(x))$  позволяет предложить следующий метод классификации вычислительных алгоритмов по асимптотике роста функции трудоемкости (для худшего случая относительно всех допустимых входов данной размерности) — сложности алгоритма. Сохраняя общепринятое обозначение  $n$  для размерности входа алгоритма  $A$  и обозначая через  $f_A(n)$  функцию трудоемкости алгоритма в худшем случае, заметим, что в силу свойства 2 угловой меры асимптотического роста функций мера функции трудоемкости совпадает с мерой ее асимптотической оценки. Подразумевая формальный переход от  $n$  к  $x$  при вычислении  $\pi(f_A(n)) \Rightarrow \pi(f_A(x))$  и считая, что аргумент  $x$  непрерывен, а необходимые значения вычисляются в точках  $x = n$ , введем следующее теоретико-множественное определение классов алгоритмов.

1. Класс  $\pi 0$  (пи нуль) — класс “быстрых алгоритмов” — это алгоритмы, функции трудоемкости которых принадлежат множеству  $FZ$  и имеют меру нуль:

$$\pi 0 = \{A | \pi(f_A(n)) = 0 \Leftrightarrow f_A(n) \in FZ\}.$$

Алгоритмы, принадлежащие этому классу, являются существенно быстрыми относительно длины входа; в основном это алгоритмы, имеющие полилогарифмическую или логарифмическую сложность. Так, например, к этому классу относится алгоритм бинарного поиска в массиве отсортированных ключей — асимптотическая оценка его трудоемкости —  $O(\ln(n))$  [6], сложность  $\ln n$ , мера  $\pi(\ln(n)) = 0$ .

2. Класс  $\pi P$  — класс “рациональных (собственно полиномиальных) алгоритмов” — это алгоритмы, функции трудоемкости которых принадлежат множеству  $FP$ :

$$\pi P = \{A | 0 < \pi(f_A(n)) < \pi/2 = 0 \Leftrightarrow f_A(n) \in FP\}.$$

К этому классу относится большинство реально используемых алгоритмов, позволяющих решать вычислительные задачи за рациональное время; отметим, что этот класс обладает свойством естественной замкнутости. Связь этого класса с классом задач  $P$  устанавливается следующим утверждением.

**Утверждение 2.** Введенный класс алгоритмов  $\pi P$  является подклассом алгоритмов, определяющих класс задач  $P$  в теории сложности вычислений.

**Доказательство.** По определению [13] задача относится к классу  $P$ , если есть положительное число  $k$  и алгоритм, решающий эту задачу с оценкой  $O(n^k)$ , а алгоритмы из класса  $\pi P$  имеют асимптотическую оценку трудоемкости  $\Theta(n^k)$ , но строго формально записи  $O(f(n))$  и  $\Theta(f(n))$  обозначают множество функций [6], и по определению

$$\Theta(f(n)) \subset O(f(n)).$$

□

3. Класс  $\pi L$  — класс “субэкспоненциальных алгоритмов” — это алгоритмы, функции трудоемкости которых принадлежат множеству  $FL$ :

$$\pi L = \{A | \pi(f_A(n)) = \pi/2 \Leftrightarrow f_A(n) \in FL\}.$$

Этот класс образуют алгоритмы с более чем полиномиальной, но менее чем экспоненциальной сложностью. Эти алгоритмы достаточно трудоемки, соответствующие задачи, как правило, принадлежат сложностному классу  $NP$ , но для некоторых задач такие алгоритмы применяются на практике. Примером может служить алгоритм факторизации больших составных чисел методом обобщенного числового решета [14], применяемый для прямых атак на криптосистему RSA. Если  $n$  есть количество битов числа, предъявляемого для факторизации, то оценка сложности этого алгоритма, приведенная в [14], имеет вид

$$f_A(n) = e^{O(n^{1/3} \cdot (\ln(n))^{2/3})}, \quad \pi(f_A(n)) = \pi/2.$$

Обозначение  $L$  в названии класса отражает тот факт, что функция степенного логарифма  $g(x) = (\ln x)^{\ln x}$  является одной из функций, разграничивающих полиномы и экспоненты в силу теоремы 1.

4. Класс  $\pi E$  — класс “собственно экспоненциальных алгоритмов” — это алгоритмы, функции трудоемкости которых принадлежат множеству  $FE$ :

$$\pi E = \{A | \pi/2 < \pi(f_A(n)) < \pi \Leftrightarrow f_A(n) \in FE\}.$$

Это алгоритмы с экспоненциальной трудоемкостью, на сегодня применимые только для малой длины входа. Возможности реального использования таких алгоритмов связаны с практической реализацией квантовых компьютеров. Примерами алгоритмов этого класса являются переборные алгоритмы для точного решения  $NP$ -полных задач, таких как задача о выполнимости схемы, задача о сумме, задача о клике и т. д. [6], имеющие асимптотические оценки трудоемкости (сложность) вида  $O(2^n)$ ,  $O(n2^n)$ ,  $O(n^2 2^n)$ .

5. Класс  $\pi F$  — класс “надэкспоненциальных алгоритмов” — это алгоритмы, функции трудоемкости которых принадлежат множеству  $FF$ :

$$\pi F = \{A | \pi(f_A(n)) = \pi \Leftrightarrow f_A(n) \in FF\}.$$

Это класс практически неприменимых алгоритмов, обладающих более чем экспоненциальной трудоемкостью факториального или показательного-степенного вида. Например, алгоритм решения задачи коммивояжера методом полного перебора имеет оценку  $\Omega(n!)$ , а поскольку  $n! = \Gamma(n+1)$ , где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция Эйлера и  $\ln(\Gamma(x+1)) \approx x \cdot \ln x - x$ , то  $n! \approx e^{n \cdot (\ln n - 1)}$ , а поскольку мера  $\pi(e^{x(\ln x - 1)}) = \pi$ , этот алгоритм относится к классу  $\pi F$ .

К этому же классу относится алгоритм полного перечисления всех остовных деревьев полного графа на вершинах с асимптотической оценкой трудоемкости  $\Omega(n^{n-2})$  [12].

Обозначение  $F$  в названии класса отражает принадлежность к этому классу алгоритмов с факториальной (Factorial) оценкой трудоемкости.

## Заключение

В статье в целях теоретического анализа и исследования вычислительных алгоритмов введена угловая мера асимптотического роста функций, исследованы свойства угловой меры

асимптотического роста функций, на основе введенной угловой меры и функциональных множеств предложен метод классификации вычислительных алгоритмов по сложности функций их трудоемкости.

Полученные результаты могут быть использованы для теоретического исследования ресурсной эффективности вычислительных алгоритмов и на практике для сравнительного анализа и обоснования выбора рациональных алгоритмов.

## Список литературы

- [1] Дьяконов В.П. “Закон Мура” и компьютерная математика // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003. № 1. С. 82–86.
- [2] Андреева К.Г., Никитов С.А. Оптимизация использования сырья в задаче линейного раскроя // Информ. технологии. 2003. № 11. С. 24–29.
- [3] ГЭРИ М., ДЖОНСОН Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи М.: Мир, 1982.
- [4] АЛЕКСАНДРОВ А.Е. Эволюционная методология разработки и сопровождения математического и программного обеспечения технических систем. М.: Машиностроение, 2001.
- [5] АЛЕКСАНДРОВ А.Е., КАТКОВ Р.Э. Параметрическая оптимизация технических объектов на основе базового варианта с использованием программной системы “Термоупругость-3D” // Информ. технологии. 2002. № 9. С. 21–24.
- [6] КОРМЕН Т., ЛЕЙЗЕРСОН Ч., РИВЕСТ Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999.
- [7] ПАПЛАДИМИТРИУ Х., СТАЙГЛИЦ К. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. М.: Мир, 1985.
- [8] КУК С.А. Сложность процедур вывода теорем // Кибернет. сб., новая серия. 1975. Вып. 12. С. 5–15.
- [9] ХОПКРОФТ ДЖ., МОТОВАНИ Р., УЛЬМАН ДЖ. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. 2-е изд.: Пер. с англ. М.: Изд. дом “Вильямс”, 2002.
- [10] ИЛЬИН В.А., САДОВНИЧИЙ В.А., СЕНДОВ БЛ.Х. Математический анализ. М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1979.
- [11] ШИЛОВ Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 2. М.: Наука. Гл. ред. физико-математической литературы, 1969.
- [12] ГРЭХЕМ Р., КНУТ Д., ПАТАШНИК О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. М.: Мир, 1998.
- [13] КАРП Р.М. Сводимость комбинаторных проблем // Кибернет. сб., новая серия. 1975. Вып. 12. С. 16–38.
- [14] ЧМОРА А.Л. Современная прикладная криптография. М.: Гелиос АРВ, 2001.

*Поступила в редакцию 1 ноября 2004 г.,  
в переработанном виде — 23 сентября 2005 г.*