

МОДЕЛЬ ЗАКАЧКИ ПРОППАНТА В ТРЕЩИНУ ГИДРОРАЗРЫВА

А. В. ТАТОСОВ

Тюменский государственный университет, Россия

e-mail: vkutrunov@utmn.ru

The formation process of the hydraulic fractures is considered. The model of crack development is developed.

Введение

Для повышения дебита нефтяных скважин иногда применяется технология гидроразрыва пласта. С целью формирования трещины гидроразрыва в скважину подается вязкий полимер — жидкость гидроразрыва с примесью твердых частиц (проппант). Закачиваемая вязкая смесь, надавливая на берега начальной трещины, расширяет ее. Ввиду просачивания жидкости гидроразрыва в пласт у берегов трещины скапливаются частицы и быстро осаждаются на “дно”. После прекращения закачки смеси трещина вновь сужается. Окончательная ее форма определяется распределением по длине слоя осевших частиц. Асимптотика развития трещины указана в [1]. В работе [2] проведено исследование процесса роста трещины гидроразрыва в пористой среде. Цель данного исследования — определить влияние примеси частиц в жидкости гидроразрыва на динамику раскрытия трещины и ее конечную форму.

1. Математическая постановка задачи

Допущения. Движение жидкости с примесями частиц в трещине опишем в односкоростном приближении. Трещина гидроразрыва предполагается вертикальной. Прикоснувшись к стенке частицы оседают на “дно”, оставаясь в одном поперечном сечении. Осевший слой частиц не изменяет картину фильтрации. Объемным содержанием жидкости в осевшем слое пренебрегаем. Будем также считать, что закачиваемая смесь жидкости гидроразрыва и взвешенных частиц с объемными долями α_1 и α_2 однородна. В силу принятых допущений объемное содержание взвешенных частиц остается неизменным по всей длине трещины. Размер частиц не учитывается.

Форма трещины. Общий вид вертикальной трещины представлен на рис. 1. На основании гипотезы Перкинса [3] с учетом формы плоских трещин в упругой среде [4] в работе [2] указана связь избыточного давления P со средней шириной трещины δ :

$$P = b\delta, \quad b = \frac{4\mu\sigma}{\pi(1-\nu\sigma)h} = \text{const}, \quad (1.1)$$

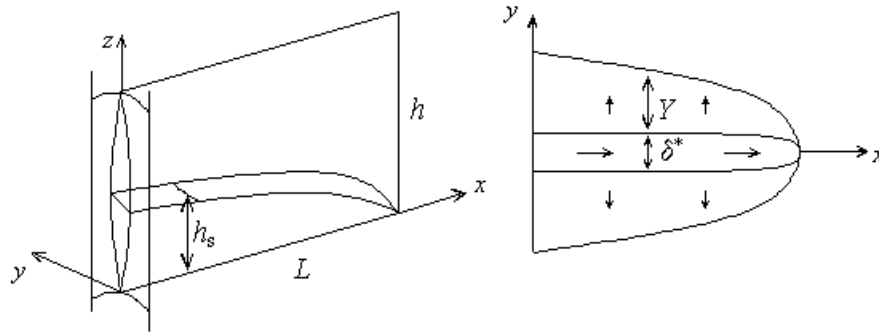


Рис. 1. Общий вид вертикальной трещины и сечение в горизонтальной плоскости: h , L , δ^* — соответственно высота, длина и ширина трещины, h_s — высота слоя осевших частиц, Y — глубина зоны пропитки.

где ν_σ — коэффициент Пуассона; μ_σ — модуль сдвига материала. Геометрическая форма трещины такова, что

$$\delta \ll h \ll L.$$

Здесь $h = \text{const}$, L — соответственно высота и длина трещины. На носике трещины в приближении Перкинса избыточное давление равно нулю:

$$x = L(t) : P = 0.$$

При построении математической модели в квазиодномерном приближении форму поперечного сечения трещины заменим прямоугольной. С целью сохранения средних геометрических размеров эллиптической трещины за стороны прямоугольника возьмем величины δ и h , приняв связь (1.1).

Кинематические соотношения. Вследствие просачивания жидкости гидроразрыва в пласт взвешенные частицы подходят к берегам трещины и согласно принятым допущениям оседают вниз (рис. 2, а). Определить скорость роста осевшего слоя частиц удобнее на вспомогательной схеме (рис. 2, б). Частицы, коснувшись стенки, “прилипают” к ней, образуя ровный слой: ε — ширина свободной области, w — скорость движения контактной линии, v — скорость жидкости по нормали к берегам трещины, v_r — скорость жидкости гидроразрыва в пласте, α — объемное содержание взвешенных частиц, β — объемное содержание жидкости гидроразрыва в пласте. Скорости w , v , v_r определены относительно

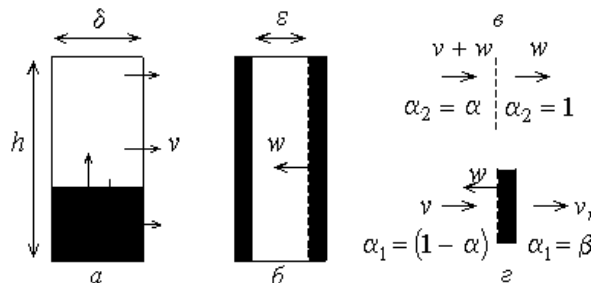


Рис. 2. Схематическое представление плоского сечения трещины, затемненная область — слой частиц; а — осаднение частиц, коснувшихся стенки; б — прилипание частиц, коснувшихся стенки; в — движение частиц относительно контактной линии; г — движение жидкости относительно берегов трещины.

боковой поверхности трещины. По определению w имеем

$$2w = \frac{\partial}{\partial t}(\delta - \varepsilon). \quad (1.2)$$

Условия непрерывности потока частиц через контактную линию (рис. 2, *в*) и потока жидкости через слой “прилипших” частиц (рис. 2, *з*) дают связи скоростей:

$$\alpha(v + w) = w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\alpha}{1 - \alpha}v; \quad (1.3)$$

$$(1 - \alpha)(v + w) = \beta v_r \quad \Rightarrow \quad v_r = \frac{1}{\beta}v. \quad (1.4)$$

Уравнения движения. Уравнение неразрывности для жидкой смеси с учетом деформации трещины и осаждения частиц запишем в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(su)}{\partial x} = -2(v + w)h.$$

Здесь u — скорость движения смеси вдоль трещины; s — площадь поперечного сечения свободной области. Учитывая, что $s = \varepsilon h$, получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon u)}{\partial x} = -2(v + w). \quad (1.5)$$

В силу принятых ограничений на геометрические параметры трещины в уравнении движения смеси целесообразно пренебречь инерционным слагаемым. Согласно условию осаждения частиц, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta}{\delta^2}u. \quad (1.6)$$

В целях упрощения формул эффективную вязкость смеси примем равной вязкости жидкости гидроразрыва η .

Фильтрацию жидкости в грунт опишем по аналогии с [2], применяя гипотезу плоских сечений: жидкость гидроразрыва просачивается в пористую среду только по нормали к трещине. Вязкость жидкости, изначально насыщающей пласт, считаем малой в сравнении с вязкостью жидкости гидроразрыва. Учитывая дополнительно различие скоростей в трещине и пласте, запишем

$$v_r = v_r(t), \quad \frac{\partial p_r}{\partial y} = -\frac{\eta}{k}v_r,$$

где p_r — избыточное давление жидкости гидроразрыва в грунте; βk — проницаемость грунта. В силу граничных условий

$$0 \leq y \leq Y, \quad p_r(0) = P, \quad p_r(Y) = 0$$

найдем

$$v_r = \frac{k P}{\eta Y}. \quad (1.7)$$

Глубина зоны пропитки Y определяется уравнением

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = v_r. \quad (1.8)$$

Исключая переменные P, w, v, v_r , систему уравнений (1.1)–(1.8) приведем к виду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= -\frac{2\beta}{1-\alpha} \frac{kb}{\eta} \frac{\delta}{Y}, \\ u &= -\frac{b}{12\eta} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial Y^2}{\partial t} &= \frac{2kb}{\eta} \delta, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha} \frac{\partial Y}{\partial t}.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Последнее уравнение с учетом начальных условий

$$\delta = \varepsilon = Y = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

дает интеграл

$$\varepsilon = \delta - \frac{2\alpha\beta}{1-\alpha} Y.\tag{1.10}$$

Система (1.9) дополняется граничным условием на носике трещины

$$x = L(t) : \quad \delta = 0\tag{1.11}$$

и граничным условием на входе в трещину.

2. Автомодельное движение

Осаждение частиц. Решение задачи будем искать в автомодельной форме:

$$\begin{aligned}\delta(x, t) &= t^n D^* D(\xi), \quad \varepsilon(x, t) = t^p H^* H(\xi), \quad u(x, t) = t^r U^* U(\xi), \\ Y(x, t) &= t^s Y^* Y(\xi), \quad \xi = \frac{x}{E^* t^m}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь n, p, r, s, m — безразмерные параметры; D^*, H^*, U^*, Y^*, E^* — размерные постоянные; ξ — безразмерная автомодельная переменная.

Подставляя решение в форме (2.1) в систему (1.9), с учетом интеграла (1.10) получим четыре обыкновенных дифференциальных уравнения относительно ξ :

$$\begin{aligned}pH - m\xi \frac{dH}{d\xi} + H \frac{dU}{d\xi} + U \frac{dH}{d\xi} &= -24 \frac{D}{Y}, \\ U &= -D^2 \frac{dD}{d\xi}, \\ 2sY^2 - m\xi \frac{dY^2}{d\xi} &= D, \\ \frac{dH}{d\xi} &= \frac{dD}{d\xi} - 48\alpha \frac{dY}{d\xi};\end{aligned}\tag{2.2}$$

найдем значения безразмерных параметров:

$$n = p = r = s = 1, \quad m = 2, \quad (2.3)$$

и размерных постоянных:

$$D^* = H^* = \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2} \frac{kb}{288\eta}, \quad Y^* = \frac{\beta}{(1-\alpha)} \frac{kb}{12\eta}, \quad (2.4)$$

$$U^* = E^* = \frac{\beta^3}{(1-\alpha)^3} \left(\frac{k}{24}\right)^{3/2} \left(\frac{b}{12\eta}\right)^2.$$

Положим также $a = 48\alpha$.

Из формы автомодельного решения следует, что на входе в трещину избыточное давление P_0 растет пропорционально времени

$$x = 0 : \quad \frac{dP_0}{dt} = \dot{P}_0 = \text{const}. \quad (2.5)$$

Данное условие для системы (2.2) запишем в виде

$$\xi = 0 : \quad D = A; \quad A = \frac{(1-\alpha)^2}{\beta^2} \frac{288\eta\dot{P}_0}{kb^2} = \text{const}. \quad (2.6)$$

Граничное условие (1.11) на носике трещины

$$\xi = \xi_0 : \quad D = 0, \quad (2.7)$$

где ξ_0 — неопределенный параметр, соответствующий безразмерной координате носика.

Присутствие частиц не меняет вида решения и граничных условий, указанных в [2] для общего случая. Учитывая интеграл (1.10), находим дополнительное ограничение на объемное содержание дисперсных частиц в закачиваемой смеси:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} < \frac{1}{2\beta b} \sqrt{\frac{\eta\dot{P}_0}{k}} \quad \text{или} \quad a < \sqrt{2A}. \quad (2.8)$$

Распределение безразмерных функций автомодельной переменной ищем, решая численно краевую задачу (2.2), (2.6), (2.7). На рис. 3 показана зависимость D , H , U от ξ при $A = 5$, $a = 1$. Функции D и H монотонно убывают по длине трещины, а вблизи носика резко падают до нуля. Подобным образом ведет себя скорость U , снижаясь до предельного значения $U(\xi_0) = m\xi_0$. При возрастании объемного содержания частиц до $48\alpha = a = 2$ функция $H(\xi)$ имеет слабо выраженный максимум, а $U(\xi)$ — более заметную точку перегиба. Высота слоя осевших частиц есть

$$h_s = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} h.$$

Отсюда для относительной высоты будем иметь

$$\frac{h_s}{h} = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta} = \frac{D - H}{D} = \frac{aY}{D}$$

или

$$\frac{h_s}{h} = af(\xi), \quad f(\xi) = \frac{Y}{D}.$$

В малой окрестности носика трещины безразмерные функции имеют вид

$$D = (6\xi_0(\xi_0 - \xi))^{1/3} + \dots, \quad H \sim D, \quad Y = o(D).$$

Увеличение объемного содержания частиц приводит к замедлению скорости роста трещины:

$$L(t) = \xi_0 U^* t^m.$$

Это связано с уменьшением полного расхода на входе из-за перекрывания части входного сечения трещины слоем осевших частиц. Значение же начальной скорости смеси несколько увеличивается вследствие возрастания градиента давления:

$$a = 0 : \xi_0 \approx 1.42, \quad U \approx 37, \quad HU \approx 185,$$

$$a = 1 : \xi_0 \approx 1.25, \quad U \approx 46, \quad HU \approx 156,$$

$$a = 2 : \xi_0 \approx 1.03, \quad U \approx 67, \quad HU \approx 127.$$

После прекращения закачки смеси трещина вновь сужается. Определим упрощенно остаточную форму трещины как прямоугольную со средней шириной δ_s :

$$\delta_s = \delta - \varepsilon = tD^*(D - H) = taD^*Y. \quad (2.9)$$

Функция $Y(\xi)$ близка к линейной зависимости, причем

$$Y(0) = \sqrt{\frac{A}{2s}}, \quad Y(\xi_0) = 0.$$

Прилипание частиц. Рассмотрим дополнительную модель формирования трещины гидроразрыва при закачивании вязкой смеси. Пусть взвешенные частицы, коснувшись стенки, прилипают к ней, образуя ровный слой. Теперь схема, представленная на рис. 2, б, является основной.

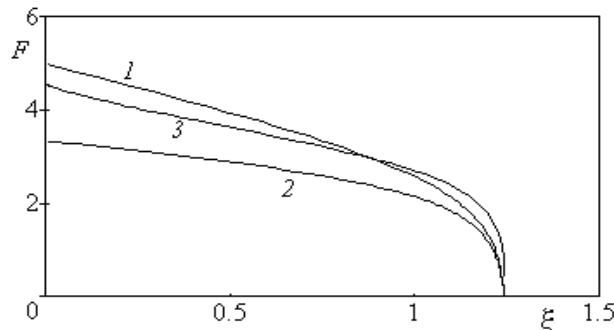


Рис. 3. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной по длине трещины: кривые 1–3 — соответственно ширина трещины D , “ширина” свободной области H и уменьшенная в десять раз скорость смеси U .

Изменению в математической модели подлежит только уравнение движения (импульса) смеси. В принятом приближении оно будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12\eta}{\varepsilon^2}u. \quad (2.10)$$

Новая система уравнений движения жидкости гидроразрыва с примесью частиц допускает решение в виде (2.1). Автомодельные постоянные решения и вид граничных условий остаются прежними.

Увеличение объемного содержания частиц в закачиваемой смеси приводит к большему замедлению скорости роста трещины, чем в предыдущем случае. Присутствие частиц теперь уменьшает полный расход и его скорость во входном сечении:

$$a = 1 : \xi_0 \approx 0.92, U \approx 34, HU \approx 116,$$

$$a = 2 : \xi_0 \approx 0.5, U \approx 31, HU \approx 59.$$

В данной модели течения существенно возрастает сопротивление потоку вследствие уменьшения ширины свободной области трещины.

3. Уравнения движения в безразмерной форме

Запишем уравнения движения жидкости гидроразрыва с примесями частиц (1.9) в безразмерной форме. В качестве масштаба измерения переменных величин возьмем их характерные значения:

$$\bar{x} = \frac{x}{L^*}, \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta^*}, \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*}, \bar{u} = \frac{u}{u^*}, \bar{v} = \frac{v_r}{v^*}, \bar{Y} = \frac{Y}{Y^*}. \quad (3.1)$$

Учитывая вид уравнений, положим

$$\delta^* = \varepsilon^* = \frac{P^*}{b}, u^* = \frac{b}{12\eta} \frac{(\delta^*)^3}{L^*}, v^* = \frac{k P^*}{\eta Y^*}, Y^* = v^* t^*. \quad (3.2)$$

Здесь δ^* , L^* , t^* , Y^* , u^* , v^* — характерные значения ширины трещины, ее длины, времени закачки смеси, глубины зоны пропитки, скорости жидкости гидроразрыва в трещине и грунте.

В безразмерных переменных система уравнений движения (1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{x}} &= -\frac{1}{B} \frac{\bar{\delta}}{\bar{Y}}, \\ \bar{u} &= -\bar{\delta}^2 \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{x}}, \\ \frac{\partial \bar{Y}^2}{\partial \bar{t}} &= 2\bar{\delta}, \\ \frac{1}{G} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{t}} - \frac{\alpha}{B} \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \bar{t}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $G = u^* t^* / L^*$, $B = (1 - \alpha) u^* \delta^* / (2\beta v^* L^*)$. Сумма обратных величин G и B :

$$\frac{1}{G} + \frac{1}{B} = \frac{(1 - \alpha) L^* \delta^* h + 2\beta v^* t^* L^* h}{(1 - \alpha) u^* t^* \delta^* h}. \quad (3.4)$$

В выражении (3.4) $(1-\alpha)u^*t^*\delta^*h$ — характерный объем закаченной в трещину жидкости гидроразрыва; $(1-\alpha)L^*\delta^*h$ — характерный объем жидкости гидроразрыва в трещине; $2\beta v^*t^*L^*h$ — характерный объем жидкости гидроразрыва, просочившейся в пласт. Таким образом, сумма величин $1/G$ и $1/B$ порядка единицы.

Малый осадок частиц. Система (3.3) может быть упрощена для двух предельных случаев: $B \gg 1$ и $G \gg 1$, $\alpha G \ll 1$. Первый соответствует малому протеканию жидкости гидроразрыва в грунт, второй — большому протеканию с достаточно малой долей примеси частиц.

При малом протекании в грунт динамика раскрытия трещины определяется двумя уравнениями:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \delta \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \delta}{\partial x} = 0, \quad u = -\frac{b}{12\eta} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Во втором предельном случае вместо (3.5) имеем

$$\delta \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \delta}{\partial x} = -\frac{2\beta}{1-\alpha} \frac{kb}{\eta} \frac{\delta}{Y}, \quad u = -\frac{b}{12\eta} \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y^2}{\partial t} = \frac{2kb}{\eta} \delta. \quad (3.6)$$

Системы уравнений (3.5), (3.6) примечательны тем, что допускают решение вида (2.1) и позволяют варьировать тип граничных условий на входе в трещину.

4. Заполнение пропантом трещины гидроразрыва

Выше представлены автомодельные решения уравнений движения смеси в раскрывающейся трещине гидроразрыва. Граничное условие на входе в трещину соответствует линейному росту давления со временем. Если же, например, давление в начальной точке постоянно, то автомодельное движение с просачиванием жидкости гидроразрыва в грунт и осаждением частиц невозможно. Слой частиц за конечный промежуток времени заполнит полость, по крайней мере во входном сечении.

Будем считать, что поток смеси вдоль трещины возможен только при условии $\varepsilon > 0$. Если же в некотором сечении $\varepsilon = 0$, а $\delta > 0$, то трещина перекрыта. В таком сечении движение смеси отсутствует, избыточное давление падает до нуля, просачивание приостанавливается. Раскрытая трещина при этом удерживается слоем частиц, находящимся в напряженном состоянии.

Для численного интегрирования выберем безразмерную форму уравнений движения (3.3), которую представим в виде (черта над безразмерными величинами опущена)

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{1}{B} v, \\ q &= -\varepsilon \delta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = v, \\ \frac{1}{G} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{G} \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\alpha}{B} \frac{\partial Y}{\partial t}, \end{aligned}$$

где

$$q = \varepsilon u, \quad v = \begin{cases} \delta/Y, & \varepsilon > 0; \\ 0, & \varepsilon = 0. \end{cases}$$

Определим масштаб измерения переменных величин соотношениями (3.2), положив дополнительно

$$P^* = P_0, \quad \frac{1}{G} + \frac{1}{B} = 1, \quad B = 2.$$

Таким образом, характерные значения

$$L^* = \frac{(1 - \alpha)}{4\beta} \sqrt{\frac{k}{6}} \frac{P_0^2}{kb^2}, \quad t^* = \frac{(1 - \alpha)^2 \eta P_0}{4\beta^2 kb^2}, \quad \delta^* = \varepsilon^* = \frac{P_0}{b},$$

$$q^* = \frac{2\beta}{(1 - \alpha)} \sqrt{\frac{k}{6}} \frac{P_0^2}{\eta b}, \quad Y^* = \frac{(1 - \alpha) P_0}{2\beta b}, \quad v^* = \frac{2\beta kb}{(1 - \alpha) \eta}.$$

С целью облегчить расчеты несколько уменьшим скорость протекания в грунт незначительной первоначальной пропиткой его жидкостью гидроразрыва, взяв в качестве начальных условий

$$\delta(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = 0, \quad Y(x, 0) = \text{eps}.$$

Варьирование eps на интервале [0.001; 0.01] не дает заметных изменений решения.

Примем граничное условие

$$\delta(0, t) = 1.$$

Иными словами, избыточное давление на входе в трещину постоянно и равно по величине P_0 .

На рис. 4 приведен пример расчета процесса развития трещины и ее заполнения пропантом при $\alpha = 0.1$. Наличие примеси частиц в жидкости гидроразрыва существенно влияет на характер процесса в целом. При $\alpha = 0$ трещина непрерывно растет, хотя замедленно, но неограниченно. В данном же случае ее длина не может превысить некоторого максимального значения L_m . При приближении $L(t)$ к значению L_m происходит закупоривание носика трещины и ее дальнейший рост прекращается. Ввиду продолжающегося просачивания жидкости гидроразрыва в грунт свободное пространство сокращается и за конечный промежуток времени полностью исчезает.

Для большей убедительности проведем аналогичный расчет закачки пропанта в частично раскрытую и заполненную частицами трещину. Начальные условия примем следующие:

$$\delta(x, 0) = \text{eps}, \quad \varepsilon(x, 0) = 0.$$

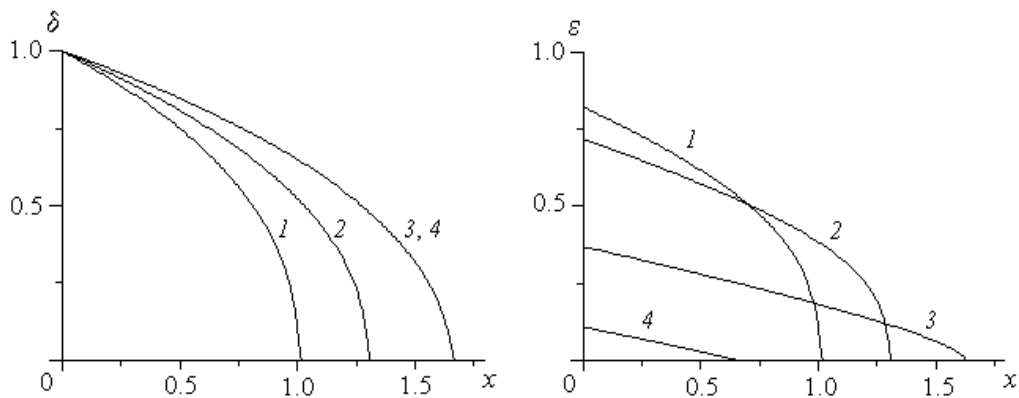


Рис. 4. Распределения безразмерных величин по длине трещины: кривые 1–4 соответствуют моментам времени $t = 1.6, 4, 20, 40$.

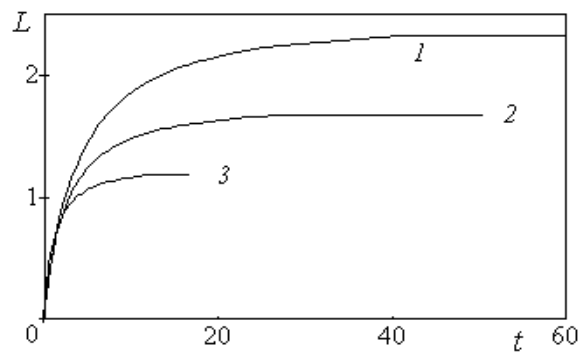


Рис. 5. Зависимость безразмерной длины трещины L от безразмерного времени t : кривые 1–3 соответствуют объемному содержанию частиц в смеси $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2$; конечные точки кривых 2 и 3 показывают момент заполнения пропантом всей трещины, для кривой 1 он равен ≈ 200 .

Граничные условия оставим прежние. Анализ расчетов не выявил новых особенностей решения. Картина движения остается прежней с той лишь очевидной разницей, что максимум L_m несколько уменьшается.

На рис. 5 показано влияние объемного содержания частиц в смеси на динамику раскрытия трещины. Представлены результаты расчетов в виде зависимостей L от времени t для $\alpha = 0.05, 0.1, 0.2$. Изменение объемного содержания частиц в указанном интервале не меняет характера процесса. Увеличение α приводит к уменьшению максимальной длины трещины и времени ее заполнения пропантом. Значительное сокращение моментов достижения предельной длины и времени заполнения связано с непостоянством скорости протекания в грунт жидкости гидроразрыва.

Заключение

В результате исследования предложенной модели закачки пропанта в трещину гидроразрыва выявлены следующие особенности. Модель допускает автомодельное решение. Присутствие частиц в жидкости гидроразрыва, подаваемой в скважину, замедляет рост трещины. Этот эффект особенно заметен в случае “прилипания” частиц к берегам трещины. В автомодельном режиме осаждение частиц повышает скорость втекающей смеси, прилипание — снижает. Условие постоянства давления на входе ограничивает рост трещины. Раскрытая трещина при этом целиком заполняется пропантом, начиная с ее носика. Величина объемного содержания частиц в закачиваемой смеси существенно влияет на время заполнения трещины и менее существенно — на ее конечную форму.

Список литературы

- [1] NORDGREN R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE J. Paper 7834. 1972. Vol. 12, N 8. P. 306–314.
- [2] ИВАШНЕВ О.Е., СМИРНОВ Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2003. № 6. С. 28–36.

- [3] PERKINS T.K., KERN L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. Paper SPE 89. 1961. Vol. 13, N 9. P. 937–949.
- [4] НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 23 декабря 2004 г.,
в переработанном виде — 15 августа 2005 г.*