

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛИ ДАЛЬНЕГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА*

О. В. КАПЦОВ, И. А. ЕФРЕМОВ

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Красноярск, Россия

e-mail: kaptsov@icm.krasn.ru

Two-dimensional and axisymmetric models of the turbulent far wake are considered. The full symmetry groups for this models are derived. In particular, the models are invariant under two dilatations. Using the symmetry subgroup we reduce the correspondent systems of partial differential equations to the ordinary differential equations and obtain solutions with natural boundary conditions. Some scale-invariant solutions agree qualitatively with the experimental data.

Изучению турбулентных течений посвящено очень большое число статей и монографий [1–13]. Однако многие принципиальные проблемы остаются нерешенными. К настоящему времени отсутствует общепринятая модель, описывающая различные типы турбулентных движений жидкости. Одной из популярных моделей в последние 25 лет является $k - \varepsilon$ -модель Лаундера. Она относится к классу так называемых полуэмпирических моделей второго порядка [1, 2]. Данная модель широко используется в численных расчетах, однако строгих математических результатов для нее известно немного [10].

В нашей работе рассматривается упрощение $k - \varepsilon$ -модели, которое используется для описания дальнего турбулентного следа (см., например, [11–13]):

$$\begin{aligned}
 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial u_1}{\partial y} \right), \\
 u_0 \frac{\partial e}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \\
 u_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= \frac{1}{y^s} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^s \frac{c_\mu}{\sigma} \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_1 e \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 - c_2 \frac{\varepsilon^2}{e},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где u_0 — скорость набегающего потока; u_1 — дефект скорости; e — кинетическая энергия турбулентности; ε — скорость диссипации кинетической энергии; c_μ, c_1, c_2, σ — эмпирические константы; $s = 0$ для плоского течения и $s = 1$ в осесимметричном случае.

Сначала находится группа преобразований, допускаемая системой уравнений (1). Группа преобразований (при $s = 0$) порождается переносами по x, y, u и двумя растяжениями;

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00130 и № 04-01-00209).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

в осесимметричном случае перенос по y отсутствует. С помощью найденных операторов растяжения система уравнений с частными производными редуцируется к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. Решение редуцированной системы находится стандартными численными методами типа Рунге — Кутты. Полученные решения согласуются с экспериментальными данными [13] на качественном уровне.

Предположим, что скорость набегающего потока u_0 равна 1 ($c_\mu \sigma \neq 0$), а константы c_1 и c_2 пока считаются произвольными. Будем искать алгебру Ли операторов [14], допускаемую системой (1). Эти операторы ищутся в канонической форме [15, 16]

$$L = h_u \frac{\partial}{\partial u} + h_e \frac{\partial}{\partial e} + h_\varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon}. \quad (2)$$

Коэффициенты h_u , h_e , h_ε должны иметь следующее представление:

$$h_u = \eta^1 - u_x \xi^1 - u_y \xi^2, \quad h_e = \eta^2 - e_x \xi^1 - e_y \xi^2, \quad h_\varepsilon = \eta^3 - \varepsilon_x \xi^1 - \varepsilon_y \xi^2.$$

Здесь функции ξ^1 , ξ^2 , η^1 , η^2 , η^3 могут зависеть от x , y , u , e , ε .

Сначала рассматривается плоский случай, т. е. в системе (1) нужно положить $s = 0$. Нахождение допускаемых операторов производим по стандартной схеме [14]: действуем продолженным оператором (2) на систему (1) и переходим на многообразие, порожденное этой системой, т. е. выражаем все производные от функций u , e , ε , включающие дифференцирование по x , в силу системы (1). Далее производим “расщепление” полученных определяющих уравнений относительно производных по y от тех же функций u , e , ε . В результате приходим к системе 28 линейных уравнений с частными производными на пять функций ξ^1 , ξ^2 , η^1 , η^2 , η^3 . Большинство из этих уравнений имеют громоздкий вид и поэтому здесь не приводятся. Наиболее простыми являются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \eta_{\varepsilon\varepsilon}^2 &= 0, & \eta_{uu}^2 &= \eta_{uu}^1, & \eta_{u\varepsilon}^2 &= 0, \\ \xi_{yy}^2 &= 2\eta_{yu}^2, & \eta_{ee}^3 &= 0, & \eta_{ue}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Можно показать, что общее решение системы определяющих уравнений имеет вид

$$\xi^1 = k_1 x + k_3, \quad \xi^2 = k_2 y + k_4,$$

$$\eta^1 = (-k_1 + k_2)u + k_5, \quad \eta^2 = 2(-k_1 + k_2)e, \quad \eta^3 = (-3k_1 + 2k_2)\varepsilon, \quad (3)$$

где k_i — произвольные постоянные. Следовательно, алгебра Ли операторов, допускаемых системой (1), является пятимерной. Базис этой алгебры образован переносами по x , y , u и двумя растяжениями. Мы не приводим выкладки, связанные с нахождением общего решения (3), поскольку они стандартны, громоздки, кроме того, подобные исследования подробно описаны в известных монографиях [14–16] и многочисленных статьях. Заметим, что для решения определяющих уравнений полезно использовать пакеты `rifsimp` и `pdsolve`, входящие в последние версии системы Maple. Применение этих пакетов позволяет контролировать “ручные” вычисления.

В осесимметричном случае, т. е. при $s = 1$, алгебра допускаемых операторов четырехмерна. Все операторы, кроме переноса по y , остаются такими же, как и в плоском случае.

Перейдем к редукции системы (1) и построению инвариантных решений. Нас интересуют прежде всего автомодельные решения системы (1), поскольку в дальнейшем турбулентном

следе экспериментально наблюдаются автомодельные режимы. Рассмотрим допускаемый оператор растяжения вида

$$Z = x\partial_x + \alpha y\partial_y + (\alpha - 1)u\partial_u + (2\alpha - 2)e\partial_e + (2\alpha - 3)\varepsilon\partial_\varepsilon,$$

где α — произвольная постоянная. Решение системы (1), инвариантное относительно преобразования, порожденного этим оператором, имеет вид

$$u = x^{\alpha-1}U(t), \quad e = x^{2\alpha-2}E(t), \quad \varepsilon = x^{2\alpha-3}\Upsilon(t), \quad (4)$$

где $t = y/x^\alpha$ — автомодельная переменная. Подставляя представление (4) в исходную модель (1), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} U'' &= \frac{(\alpha - 1)U\Upsilon^2 - U'\alpha t\Upsilon^2 - 2c_\mu EU'\Upsilon E' + c_\mu E^2U'\Upsilon'}{c_\mu E^2\Upsilon}, \\ E'' &= \frac{2tE(\alpha - 1)\Upsilon^2 - t^2E'\alpha\Upsilon^2 - sc_\mu E^2\Upsilon E' - 2tc_\mu E\Upsilon E'^2}{tc_\mu E^2\Upsilon} + \\ &\quad + \frac{tc_\mu E^2E'\Upsilon' - tc_\mu E^22U'^2\Upsilon + t\Upsilon^3}{tc_\mu E^2\Upsilon}, \\ \Upsilon'' &= \frac{2t\Upsilon^3\alpha\sigma E - 3t\Upsilon^3\sigma E - t^2\Upsilon'\alpha\sigma\Upsilon^2 E - sc_\mu E^3\Upsilon'\Upsilon}{tc_\mu E^3\Upsilon} - \\ &\quad - \frac{2tc_\mu E^2\Upsilon'\Upsilon E' + tc_\mu E^3\Upsilon'^2 - tE^2c_1c_\mu U'^2\sigma\Upsilon^2 + tc_2\Upsilon^4\sigma}{tc_\mu E^3\Upsilon}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эмпирические константы, входящие в систему (5), выбираются, согласно [13], следующим образом: $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 0.1287$, $c_2 = 1.92$, $\sigma = 1.3$.

Рассмотрим сначала плоский случай, т. е. будем предполагать, что $s = 0$. Пусть выполняется следующее условие:

$$\frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \pm\infty.$$

Тогда, интегрируя первое уравнение системы (1) по y от $-\infty$ до ∞ , получим

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u dy = 0 \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} u dy = \text{const}. \quad (6)$$

Подставим представление (4) во второе равенство (6). В результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1}U(t)x^\alpha dt = \text{const}. \quad (7)$$

Для того чтобы левая часть равенства (7) не зависела от x при $U > 0$, необходимо взять $\alpha = 0.5$. Поэтому решения системы (5) ищутся при $\alpha = 0.5$.

Решения системы (5) должны удовлетворять условиям

$$U'(0) = E'(0) = \Upsilon'(0) = 0; \quad (8)$$

$$U(t) \rightarrow 0, \quad E(t) \rightarrow 0, \quad \Upsilon(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Решения системы (5), удовлетворяющие условиям (8), (9), находятся с помощью стандартных численных методов типа Рунге — Кутты. Как показывают расчеты, решений системы (5) с условиями (8), (9) существует достаточно много. Типичные графики решений представлены на рис. 1–3. В качестве начальных данных берутся условия (8) и $U(0) = 0.165$, $E(0) = 0.00749$, $\Upsilon(0) = 0.009$. Мы не можем доказать строго, что все три функции обращаются в нуль в одной точке, и даже не можем утверждать, что решения имеют компактный носитель. Следует отметить, что решения системы (5) весьма чувствительны к изменениям начальных данных. Небольшое изменение начальных данных приводит, например, к тому, что решения перестают удовлетворять условиям (9).

В осесимметричном случае вместо (6) имеет место закон сохранения

$$\int_{-\infty}^{\infty} yu(x, y)dy = \text{const.}$$

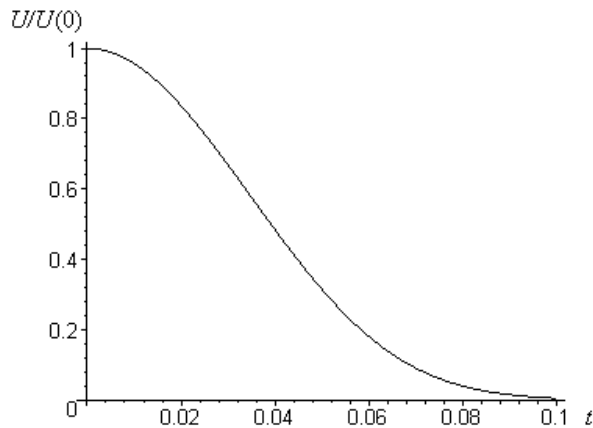


Рис. 1. Плоский случай. График функции $U(t)/U(0)$.

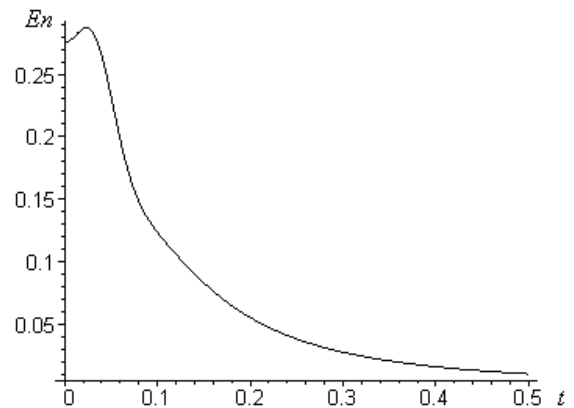


Рис. 2. Плоский случай. График функции $En = E(t)/U(0)^2$.

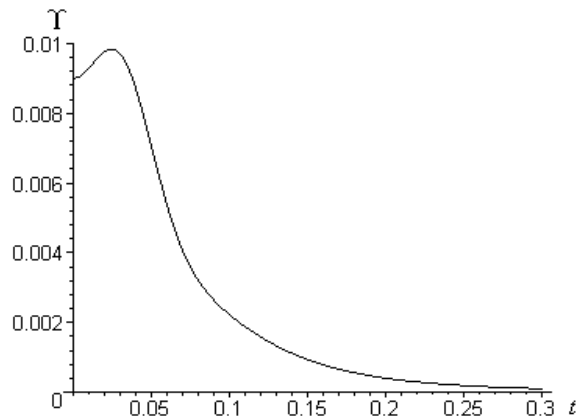


Рис. 3. Плоский случай. График функции $\Upsilon(t)$.

Этот закон сохранения справедлив при условии

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(y \frac{e^2}{\varepsilon} u_y \right) = 0.$$

Используя этот закон сохранения и повторяя приведенные ранее рассуждения, легко показать, что автомодельные решения вида (4) с неотрицательной функцией $U(t)$ возможны только при $\alpha = 1/3$. Явных решений системы (5) нам не удалось найти, и мы использовали численные методы. В осесимметричном случае система (5) имеет особенность при $t = 0$, поэтому начальные данные задавались при $t_0 = 0.001$.

На рис. 4–6 представлены графики функций U , E , Υ , соответствующие начальным данным $U(t_0) = 0.2$, $U'(t_0) = 0$, $E(t_0) = 0.012$, $E'(t_0) = 0$, $\Upsilon(t_0) = 0.015$, $\Upsilon'(t_0) = 0$. Поскольку функции U , E , Υ обращаются в нуль в точке, близкой к 0.066, мы продолжаем решение нулем за этой точкой.

Другого типа решение получается при следующем выборе начальных данных: $U(t_0) = 0.9$, $U'(t_0) = -0.09$, $E(t_0) = 0.8$, $E'(t_0) = -0.02$, $\Upsilon(t_0) = 0.881$, $\Upsilon'(t_0) = -0.05$. Графики решений, соответствующие этим начальным условиям, похожи на графики, приведенные на рис. 1–3. Однако функции E , Υ не имеют локального максимума при $t > t_0$. Соответ-

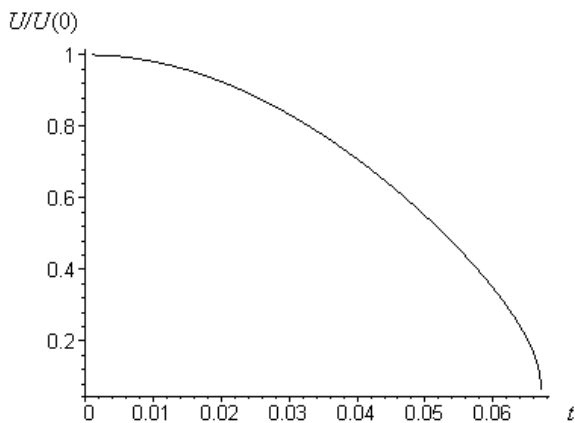


Рис. 4. Осесимметричный случай. График функции $U(t)/U(0)$.

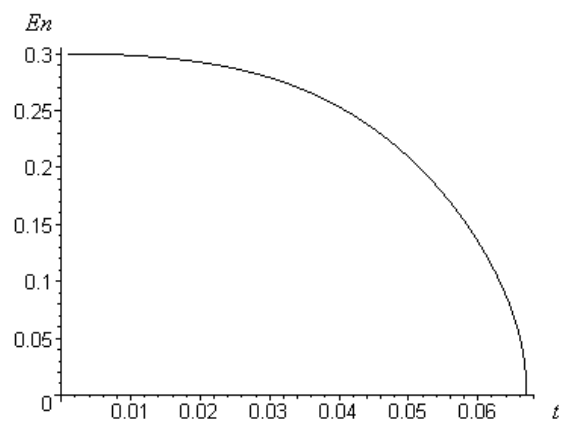


Рис. 5. Осесимметричный случай. График функции $En = E(t)/U(0)^2$.

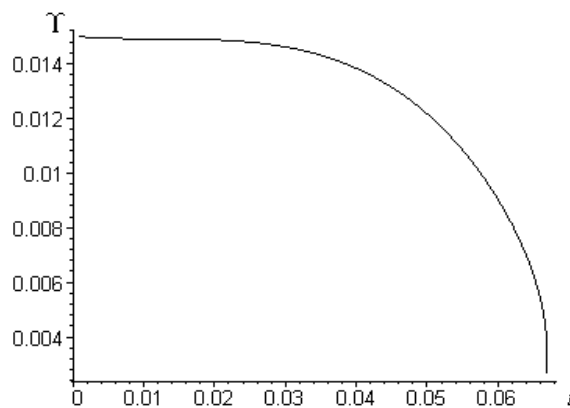


Рис. 6. Осесимметричный случай. График функции $\Upsilon(t)$.

ствующие решения монотонно убывают при $t > t_0$ и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Основываясь на приведенных автомоделных решениях, мы не можем утверждать, что данная модель дает лучшие результаты по дефекту скорости, чем классические модели [1]. Однако она позволяет находить кинетическую энергию турбулентности e и скорость диссипации кинетической энергии ε . Качественное поведение этих функций согласуется с экспериментальными данными [13].

Авторы выражают признательность Г.Г. Черных и В.Н. Гребеневу за внимание к работе и предоставленные материалы.

Список литературы

- [1] Лойцянский Г.Л. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
- [2] ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. Принципы и применения / Под ред. У. Фроста и Т. Моулдера. М.: Мир, 1980. 245 с.
- [3] БУКРЕЕВ В.И., ДЕМЕНКОВ А.Г., КОСТОМАХА В.А., ЧЕРНЫХ Г.Г. Распространение тепла от линейного источника в плоском турбулентном следе // ПМТФ. 1996. Т. 32, № 5. С. 115–126.
- [4] ДЕМЕНКОВ А.Г., ЧЕРНЫХ Г.Г. О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. технологии. 1995. Т. 4, № 12. С. 119–131.
- [5] КУРБАЦКИЙ А.Ф. Моделирование нелокального турбулентного переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, 1988. 240 с.
- [6] КУРБАЦКИЙ А.Ф., ОНУФРИЕВ А.Т. Моделирование турбулентного переноса в следе за цилиндром с привлечением уравнений для третьих моментов // ПМТФ. 1979. Т. 15, № 6. С. 99–107.
- [7] ФЕДОРОВА Н.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. О численном моделировании осесимметричных турбулентных следов // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1992. Т. 6(23), № 3. С. 141–159.
- [8] ФЕДОРОВА Н.Н., ЧЕРНЫХ Г.Г. О численном моделировании плоских турбулентных следов // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 24–34.
- [9] CHERNYKH G.G., DEMENKOV A.G. On numerical simulation of jet flows of viscous incompressible fluids // Russ. J. of Numer. Analysis and Mathematical Modelling. 1997. Vol. 12, N 2. P. 111–125.
- [10] ГРЕБЕНЕВ В.Н. Применение метода эквипотенциалей в задачах гидродинамики свободных турбулентных течений и фильтрации: Дис. на соискание ученой степени докт. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2004. 195 с.
- [11] ВОРОПАЕВА О.Ф., ИЛЮШИН Б.Б., ЧЕРНЫХ Г.Г. Численное моделирование дальнего безымпурсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 756–760.
- [12] ЧЕРНЫХ Г.Г. Введение в численное моделирование свободных турбулентных течений: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1996. 84 с.

- [13] Хинце И.О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 521 с.
- [14] Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1966. 131 с.
- [15] ИБРАГИМОВ Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
- [16] ОЛВЕР П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989. 639 с.

Поступила в редакцию 12 мая 2005 г.