Вычислительные технологии **Том 10, № 6, 2005**

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО УРАВНЕНИЙ КОРПУСОВА — ПЛЕТНЕРА — СВЕШНИКОВА НА ГРАФЕ

Г. А. Свиридюк
Челябинский государственный университет, Россия
e-mail: ridyu@csu.ru

В. В. Шеметова
Магнитогорский государственный университет, Россия
e-mail: analysis@masu.ru

Initial-boundary-value problem for the equation $(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + \beta\mathrm{div}(u\nabla u)$ is considered on the graph. This problem simulates quasistationary processes in the medium representing some cylindrical semiconductors which are arbitrarily interconnected. The phase space of this problem is described.

Введение

Уравнение

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + \beta\mathrm{div}(u\nabla u) \tag{0.1}$$

моделирует квазистационарные процессы в токопроводящих средах без дисперсии [1]. Нас интересует случай, когда среда представляет собой несколько цилиндрических полупроводников, соединенных между собой в произвольном порядке. В этом случае, как показано в [2], многомерное, вообще говоря, уравнение (0.1) можно редуцировать к одномерным, определенным на некотором графе.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг, причем каждая дуга E_j имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим задачу с краевыми

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t),\ E_j,\, E_k \in E^{\alpha}(V_i) \cup E^{\omega}(V_i), \tag{0.2}$$

$$\sum_{E_j\in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k\in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0 \tag{0.3}$$

и начальными

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x),\ x \in (0,l_j) \tag{0.4}$$

условиями для уравнений

$$(\lambda u_j - u_{jxx})_t = \alpha u_{jxx} + \beta(u_j u_{jx})_x. \tag{0.5}$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.2) требует, чтобы решения были непрерывными на вершинах графа, а условие (0.3) — аналог условия Кирхгофа — в случае, когда граф $\mathbf{G}$ состоит из единственной нециклической дуги, превращается в условие Неймана.

Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, заданных на графе, начали изучать сравнительно недавно [3, 4]. К настоящему времени аспекты, в которых изучаются эти уравнения, становятся все более разнообразными [2, 5]. Дело дошло до уравнений соболевского типа на графах [6]. Нашей целью является развитие метода, изложенного в [6], в данной ситуации. Этот метод заключается в редукции задачи (0.2)–(0.5) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.6}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u) \tag{0.7}$$

и последующего изучения фазового пространства уравнения (0.7).

Уравнения соболевского типа составляют обширную область математики. О прогрессе в этой области можно судить по монографиям [7–10]. В отличие от упомянутых работ наш подход заключается в использовании метода фазового пространства, базирующегося на теории относительно σ-ограниченных операторов и вырожденных аналитических групп операторов. Детально этот подход изложен в [11] для линейных уравнений соболевского типа.

Статья кроме вводной части содержит четыре раздела и список литературы. Первый раздел носит пропедевтический характер, в нем собраны сведения из [11], адаптированные к нашей ситуации. Во втором разделе приводятся результаты о разрешимости задачи Коши (0.6), (0.7), основанные на результатах работы [12]. В третьем разделе проводится редукция задачи (0.2)–(0.5) к задаче (0.6), (0.7). Четвертый раздел посвящен основному результату статьи — описанию фазового пространства задачи (0.2)–(0.5).

Здесь условимся о следующем. Все рассмотрения проводятся в вещественных банаховых пространствах, однако при рассмотрении “спектральных” вопросов вводится их естественная комплексификация. Все контуры ориентированы движением “против часовой стрелки” и ограничивают область, лежащую “слева” при таком движении. Символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены “единичный” и “нулевой” операторы, области определения которых ясны из контекста.

1. Относительно $\boldsymbol{\sigma}$-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны). Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ оператора M. Нетрудно показать, что множество $\rho^L(M)$ всегда открыто, поэтому L-спектр оператора M всегда замкнут.

Определение 1.1. Оператор M называется *спектрально ограниченным* относительно оператора L (короче, (L,σ)-ограниченным), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \, \forall \mu \in \mathbb{C} \; (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то оператор M (L,σ)-ограничен точно тогда, когда ограничен оператор $L^{-1}M$ (или, что то же самое, оператор ML^{-1}). Если существует оператор $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, а оператор L компактен, то оператор M не будет (L,σ)-ограниченным.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда имеют смысл соответственно *правая* и *левая*

$$R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$$

L-резольвенты оператора M. Если оператор $M(L,\sigma)$-ограничен, то, выбрав контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, можно построить интегралы *типа Данфорда — Тейлора*

$$P = (2\pi i)^{-1}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu,\ Q = (2\pi i)^{-1}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu.$$

Лемма. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ — проекторы.*

Положим $\ker P = \mathfrak{U}^0, \operatorname{im} P = \mathfrak{U}^1, \ker Q = \mathfrak{F}^0, \operatorname{im} Q = \mathfrak{F}^1$, а через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на подпространство $\mathfrak{U}^k$, $k = 0,1$.

Теорема 1.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда:*

(i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0), L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Построим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Пусть оператор $M(L,\sigma)$-ограничен. Тогда в силу теоремы 1.1 уравнение (0.7) можно расщепить на два уравнения:

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u), \tag{1.1}$$

$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u), \tag{1.2}$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$.

Следствие. *В условиях теоремы 1.1 при всех $\mu \in \rho^L(M)$ имеет место равенство*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{-k}S^{k-1}L_1^{-1}Q.$$

Определение 1.2. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M точка ∞ называется:

(i) устранимой особой точкой, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) полюсом порядка p, если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) существенно особой точкой в оставшемся случае.

В дальнейшем условимся устранимую особую точку называть полюсом порядка нуль. Немного отходя от стандарта, вектор $\varphi \in \ker L\backslash\{0\}$ будем называть *собственным вектором*. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ будем называть *цепочкой M-присоединенных векторов* собственного вектора φ_0, если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q,\ q = 0,1,\ldots$$

Цепочка может быть бесконечной, в частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$. Однако она обязательно конечна, если в ней существует вектор φ_q

такой, что $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки будем называть ее *длиной.* Линейная оболочка собственных и M-присоединенных векторов называется *M-корневым линеалом* оператора L. Замкнутый M-корневой линеал называется *M-корневым пространством.*

Теорема 1.2. *Пусть L — фредгольмов оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M;

(ii) ни один собственный вектор оператора L не имеет цепочки M-присоединенных векторов длиной больше $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

2. Квазистационарные траектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.1}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{2.2}$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.2) при некотором $T \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением* этого *уравнения.* Решение $u = u(t)$ уравнения (2.2) называется *решением задачи* (2.1), (2.2), если оно удовлетворяет условию (2.1) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Как показывают приведенные ниже два примера, при изучении задачи (2.1), (2.2) могут встретиться следующие трудности. В примере

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

задача (2.1), (2.2) при $u = \operatorname{col}(x,y), u_0 = \operatorname{col}(0,0)$ неразрешима, а во втором

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

имеет два решения — стационарное $u(t) = \operatorname{col}(0;0)$ и $u(t) = \operatorname{col}(t/2; t^2/4)$.

Для того чтобы обойти эти неприятности, в [12] предложено ограничиться так называемыми *квазистационарными траекториями*, т. е. теми решениями уравнения (2.2), которые лежат во множестве

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Квазистационарными они названы потому, что обобщают понятие стационарной траектории. Здесь Q — проектор из разд. 1, а понятие “лежать” означает, что решение принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ как траектория, но не как точка (т. е. $u(t) \in \mathfrak{M}$ при каждом $t \in (-T;T)$). Заметим, что если ∞ — полюс порядка нуль L-резольвенты оператора M, то все решения уравнения (2.2) с необходимостью должны лежать во множестве $\mathfrak{M}$, и если $u_0 \notin \mathfrak{M}$, то решение задачи (2.1), (2.2) не существует.

Пусть точка $u_0 \in \mathfrak{M}$. Назовем множество $\mathfrak{M}$ *банаховым C^∞-многообразием в точке* $u_0 \in \mathfrak{M}$, если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и $u_0^1 = Pu_0$ соответственно и существует C^∞-диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}^1 \to \mathfrak{O}$ такой, что D^{-1} есть сужение на $\mathfrak{O}$ проектора P (см. разд. 1). Немного отходя от стандарта [13, с. 31], назовем пару $(D, \mathfrak{O}^1)$ *картой*. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^∞-многообразием*, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$, если в каждой своей точке оно имеет карту. Связное банахово C^∞-многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 2.1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка нуль L-резольвенты оператора M, а оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Пусть в точке u_0 множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием. Тогда для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{M})$ задачи (2.1),(2.2).*

Доказательство. Обозначим через D'_{u^1} производную Фреше оператора $D \in C^\infty(\mathfrak{O}^1;\mathfrak{O})$ в точке $u^1 \in \mathfrak{O}^1$. Очевидно, $D'_{u^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; T_u\mathfrak{M})$, где $T_u\mathfrak{M}$ — касательное к $\mathfrak{M}$ пространство в точке $u = D(u^1)$. Подействовав оператором D'_{u^1} на обе части уравнения (1.2) слева, получим

$$\dot{u} = A(u), \tag{2.3}$$

где оператор $A : u \to D'_{P_u}SPu + D'_{P_u}L_1^{-1}QN(u)$, $u \in \mathfrak{O}$. По построению оператор $A \in C^\infty(\mathfrak{O}; T\mathfrak{M})$, где

$$T\mathfrak{M} = \bigcup_{u\in\mathfrak{O}} T_u\mathfrak{M}$$

— касательное расслоение $\mathfrak{O}$. Однозначная разрешимость (при некотором $T \in \mathbb{R}_+$) задачи (2.1), (2.3) — классический результат [13, с. 80]. Понятно, что полученное таким способом решение $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{O})$ является решением задачи (2.1), (2.2). □

3. Постановка задачи

Для редукции задачи (0.2)–(0.5) к задаче (0.6), (0.7) через $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ обозначим множество

$$\mathbf{L_2}(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \ldots, g_j, \ldots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}.$$

Множество $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j(x)h_j(x)\,dx.$$

Через $\mathfrak{U}$ обозначим множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ и выполнено } (0.2)\}.$$

Множество $\mathfrak{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u^2_{jx}(x) + u^2_j(x))\,dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит, пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\lambda u_j v_j + u_{jx} v_{jx})\, dx,\ \langle Mu, v\rangle = -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \alpha u_{jx} v_{jx}\, dx \quad \forall u,\ v \in \mathfrak{U}$$

зададим линейные операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$. Введем также в рассмотрение оператор

$$\langle N(u), v\rangle = -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta u_j u_{jx} v_{jx}\, dx \quad \forall u,\ v \in \mathfrak{U}.$$

Лемма 3.1. *(i) При любых $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ оператор M (L,σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка нуль.*

(ii) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа для данной задачи, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Пусть $\{\varphi_k\}$ — соответствующие им собственные функции, ортонормированные в смысле $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$ и утверждение леммы очевидно.

Пусть $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda = \lambda_l\}$. Возьмем вектор $\varphi \in \ker L\backslash\{0\}$, т. е.

$$\varphi = \sum_{\lambda=\lambda_l} a_l \varphi_l, \sum_{\lambda=\lambda_l} |a_l| > 0.$$

Поскольку

$$M\varphi = \alpha\lambda \sum_{\lambda=\lambda_l} a_l \varphi_l \notin \operatorname{im} L,$$

т. е. вектор φ не имеет M-присоединенных векторов, в силу теоремы 1.2 имеет место утверждение (i) леммы.

(ii)

$$\begin{gathered} |\langle N'_u v, w\rangle| = | -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta u_j v_{jx} w_{jx}\, dx - \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \beta v_j u_{jx} w_{jx}\, dx| \le \\ \le |\beta|(|\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j v_{jx} w_{jx}\, dx| + |\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j u_{jx} w_{jx}\, dx|) \le \\ \le |\beta|(\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} |u_j|\cdot|v_{jx}|\cdot|w_{jx}|\, dx + \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} |v_j|\cdot|u_{jx}|\cdot|w_{jx}|\, dx) \le \\ \le \mathrm{const}\|u\|_{\mathfrak{U}}\cdot\|v\|_{\mathfrak{U}}\cdot\|w\|_{\mathfrak{U}}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Также для производной Фреше N''_u оператора N в точке u имеем

$$|\langle N''_u(a,b), c\rangle| = | -2\beta \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} a_j b_{jx} c_{jx}\, dx| \le \mathrm{const}\|a\|_{\mathfrak{U}}\cdot\|b\|_{\mathfrak{U}}\cdot\|c\|_{\mathfrak{U}}. \tag{3.2}$$

Все остальные производные Фреше порядка $n > 2$ оператора N в точке u равны нулю. Таким образом, утверждение (ii) леммы следует из (3.1), (3.2) и непрерывности вложения $W_2^1(0, l_j) \subset C[0, l_j]$. $\square$

Нетрудно видеть, что в данной ситуации L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \backslash \{l : \lambda = \lambda_l\} \right\}.$$

Поэтому можно построить проекторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, \ \lambda \notin \{\lambda_k\}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \lambda_l} \langle \,\cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ \lambda \in \{\lambda_k\}, \end{cases} \qquad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, \ \lambda \notin \{\lambda_k\}, \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda = \lambda_l} \langle \,\cdot\,, \varphi_k \rangle \varphi_k, \ \lambda \in \{\lambda_k\}. \end{cases}$$

Значит, множество $\mathfrak{M}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} \mathfrak{U}, \ \lambda \notin \{\lambda_k\}, \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle Mu + N(u), \varphi_k \rangle = 0, \lambda \in \{\lambda_k\}\}. \end{cases}$$

Аналогично этому

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases} \mathfrak{U}, \lambda \notin \{\lambda_k\}; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda \in \{\lambda_k\}\}. \end{cases}$$

Очевидно, что в данном случае все решения задачи (0.6), (0.7) являются квазистационарными траекториями и лежат во множестве $\mathfrak{M}$.

В силу теоремы 2.1 имеет место

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$ и в точке u_0 множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием. Тогда для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{M})$ задачи (0.6),(0.7).*

4. Морфология фазового пространства

Перейдем теперь к описанию фазового пространства задачи (0.6), (0.7). Здесь мы рассмотрим ситуацию, когда ядро оператора L одномерно. В частности, это имеет место, когда граф состоит из единственной нециклической дуги. В нашей ситуации это означает, что система состоит из единственного уравнения.

Определение 4.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.7), если:

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (0.7) лежит в $\mathfrak{P}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при каждом $t \in (-T, T)$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (0.6), (0.7).

Итак, пусть $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l\}$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = a\varphi_l + v$, $v \in \mathfrak{U}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда

$$-\beta a^2 \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{lj} (\varphi_{ljx})^2 \, dx - \beta a \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{lj} v_{jx} \varphi_{ljx} \, dx - \beta a \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j (\varphi_{ljx})^2 \, dx -$$

$$-\beta \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_{jx} v_j \varphi_{ljx} \, dx - \alpha a \lambda_l = 0.$$

Преобразуя полученное уравнение, запишем

$$a^2\frac{\beta\lambda_l}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j}\varphi_{lj}^3\,dx + a(\beta\lambda_l\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2\,dx - \alpha\lambda_l) + \frac{\beta\lambda_l}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j^2\varphi_{lj}\,dx = 0. \quad (4.1)$$

При выполнении условия

$$\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2 \neq \frac{\alpha}{\beta} \quad (4.2)$$

данное уравнение имеет два решения:

$$a_1 = \frac{1}{\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int\limits_0^{l_j}\varphi_{lj}^3\,dx}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2\,dx - \frac{\sqrt{D}}{\beta\lambda_l}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int\limits_0^{l_j}\varphi_{lj}^3\,dx}\left(\frac{\alpha}{\beta} - \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2\,dx + \frac{\sqrt{D}}{\beta\lambda_l}\right),$$

где $D = \left(\beta\lambda_l\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int\limits_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2\,dx - \alpha\lambda_l\right)^2 - \beta^2\lambda_l^2\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int\limits_0^{l_j} v_j^2\varphi_{lj}\,dx\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int\limits_0^{l_j}\varphi_{lj}^3\,dx$. Поэтому для любого $v\in\mathfrak{U}^1$, удовлетворяющего (4.1), (4.2), существуют две точки — $u_1 = a_1\varphi_l + v$ и $u_2 = a_2\varphi_l + v$, лежащие во множестве $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{U}_\delta^1$ множество тех точек из $\mathfrak{U}^1$, которые удовлетворяют (4.1), (4.2). Таким образом, мы построили биективное отображение δ^k множества $\mathfrak{U}_\delta^1$ во множество $\mathfrak{M}_k$, где $\delta^k v = a_k\varphi_l + v$, $\mathfrak{M}_k = \delta^k[\mathfrak{U}_\delta^1]$, $k = 1, 2$. Для того чтобы показать, что δ^k — C^∞-диффеоморфизм, воспользуемся теоремой о неявной функции. Зафиксируем $v\in\mathfrak{U}_\delta^1$ и построим отображение

$$F(a,v) = a^2\frac{\beta\lambda_l}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j}\varphi_{lj}^3\,dx + a(\beta\lambda_l\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j\varphi_{lj}^2\,dx - \alpha\lambda_l) + \frac{\beta\lambda_l}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j^2\varphi_{lj}\,dx,$$

$F(a,v) = 0$ и $F'_a(a,v)\neq 0$, значит, δ^k — C^1-диффеоморфизм. В силу того что F класса C^∞, следует, что δ^k — C^∞-диффеоморфизм.

Таким образом, справедлива

Теорема 4.1. *Для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и:*

(i) $\lambda\notin\{\lambda_k\}$, фазовым пространством уравнения (0.7) является $\mathfrak{U}$;

(ii)$\lambda\in\{\lambda_k\}$, фазовое пространство уравнения (0.7) содержит объединение двух компонент $\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2\subset\mathfrak{M}$.

Заключение

В работе описано фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнений Корпусова — Плетнера — Свешникова на графе, т. е. получено множество допустимых начальных значений, при которых задача (0.2)–(0.5) однозначно разрешима. Исследована структура фазового пространства: оно содержит объединение двух компонент, каждая из которых является простым банаховым C^∞-многообразием. В теореме 4.1, (*ii*) фазовое пространство лежит на 1-сборке Уитни.

Список литературы

[1] Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. Квазистационарные процессы в проводящих средах без дисперсии // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 4, № 8. С. 1237–1249.

[2] Yanagida E. Stability of nonconstant steady states in reaction-diffusion systems on graphs // Japan J. Induct. Appl. Math. 2001. Vol. 18. P. 25–42.

[3] von Below J. A maximum principle for semilinear parabolic network equations // Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 1991. Vol. 133. P. 37–45.

[4] Пенкин О.М., Покорный Ю.В. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Мат. заметки. 1996. Т. 59, № 5. С. 777–780.

[5] Шафаревич А.И. Дифференциальные уравнения на графах, описывающие асимптотические решения уравнений Навье — Стокса, сосредоточенные в малой окрестности кривой // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 8. С. 1119–1130.

[6] Свиридюк Г.А. Уравнения соболевского типа на графах // Неклас. уравн. мат. физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 221–225.

[7] Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 2003.

[8] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. N.Y.: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[9] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические операторно-дифференциальные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

[10] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov — Schmidt method in nonlinear analysis and applications. Dordrecht; Harbour: Kluwer Acad. Publ., 2002.

[11] Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht — Boston: VSP, 2003.

[12] Свиридюк Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57, № 3. С. 192–207.

[13] Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. Волгоград: Платон, 1997.

Поступила в редакцию 10 ноября 2004 г.