

# О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАКРУЧЕННОГО БЕЗЫМПУЛЬСНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА\*

А. Г. ДЕМЕНКОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: demenkov@lchd.ict.nsc.ru

В. А. КОСТОМАХА

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: buklabex@hydro.nsc.ru

Г. Г. ЧЕРНЫХ

*Институт вычислительных технологий СО РАН*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: chernykh@lchd.ict.nsc.ru

The numerical modeling of swirling momentumless turbulent wake has been carried out. The mathematical model including differential equations of dynamics, continuity and normal Reynolds stresses transfer is used. The shear turbulent stresses are defined with the nonequilibrium algebraic relations. The finite-difference algorithm having conservatism with respect to the laws of conservation of momentum and the angular momentum has been constructed. The predicted results are in a good agreement with the experimental data.

## 1. Введение

Настоящая работа посвящена построению математической модели эволюции свободных турбулентных течений с завихренностью. В качестве конкретного примера выбрана задача численного моделирования развития осесимметричного следа с нулевой величиной суммарного избыточного импульса и обусловленным наличием вращательного движения в следе ненулевым значением момента количества движения. Такой след образуется, например, за телом, снабженным винтовым движителем и движущимся в жидкости равномерно и прямолинейно. Ранее безымпурсный след за тонким осесимметричным телом с отличной от нуля закруткой анализировался численно в рамках упрощенной  $\epsilon$ -модели

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №95-01-00910, 95-01-01339.

© А. Г. Деменков, В. А. Костомаха, Г. Г. Черных, 1997.

[1, 2]. Критический обзор этих и некоторых последующих работ можно найти в [3]. В [4] с использованием классической  $e - \varepsilon$ -модели аналитически и численно получены автомодельные решения для закрученного следа за самодвижущимся телом. Ниже представлены результаты расчетов с применением ряда полуэмпирических моделей турбулентности и выполнено сопоставление с экспериментальными данными [5].

## 2. Постановка задачи

Для описания течения привлекается система осредненных уравнений движения в приближении тонкого сдвигового слоя:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^\infty \frac{[W^2 + (\langle w'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)]}{r} dr - \frac{\partial(\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle)}{\partial x}, \quad (1)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \langle v'w' \rangle - \frac{\langle v'w' \rangle}{r} - \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $x, r, \varphi$  — цилиндрическая система координат с началом на задней кромке тела; направление  $x$  противоположно направлению движения тела;  $U, V, W, u', v', w'$  — соответствующие компоненты скорости осредненного и пульсационного движения;  $\langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle, \langle v'w' \rangle$  — рейнольдсовы напряжения; угловые скобки означают осреднение. В правых частях уравнений (1)–(2) в предположении малости отброшены слагаемые с молекулярной вязкостью.

Наиболее полная из рассмотренных замкнутых математических моделей (модель 1) включает в себя дополнительно к (1)–(3) уравнения переноса рейнольдсовых напряжений [6]:

$$U \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} = -2(1 - \alpha) \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle u'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{2}{3} (\alpha + \beta) P + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{re \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial r} \right) - \underline{-2(1 - \alpha) \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} - \beta \left( -2 \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} - 2 \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} \right) + 2\gamma e \frac{\partial U}{\partial x}}, \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = 2(1 - \alpha) \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} - \frac{2}{3} \varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle v'^2 \rangle - \frac{2}{3} e \right) + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \frac{2 \langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] - \beta \left( -2 \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - 2 \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle)}{r} \right] + \frac{2}{3}(\alpha + \beta)P - \\
& \quad \underline{-2(1 - \alpha - \beta) \langle v'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + 2\gamma e \frac{\partial V}{\partial r}}, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \langle v'w' \rangle = -2(1 - \alpha) \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{2}{3}\varepsilon - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \left( \langle w'^2 \rangle - \frac{2}{3}e \right) + \\
& \quad + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial r} + \frac{2\langle v'w' \rangle^2}{r} \right) \right] - 2\beta \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} + \\
& \quad + \frac{2C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle)}{r} \right] + \frac{2}{3}(\alpha + \beta)P - \\
& \quad \underline{-2(1 - \alpha) \left( \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} \right) + 2\beta \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} + 2\gamma e \frac{V}{r}}, \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial r} - \frac{W}{r} \langle u'w' \rangle = -(1 - \alpha) \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle u'v' \rangle + \\
& \quad + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial r} - \frac{\langle v'w' \rangle \langle u'w' \rangle}{r} \right) \right] - \beta \left( -\langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r} - \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \\
& \quad - \frac{C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{\langle u'v' \rangle}{r} \right] - \gamma e \frac{\partial U}{\partial r} + \\
& \quad \underline{+(1 - \alpha) \left( \langle u'v' \rangle \frac{V}{r} + \langle u'w' \rangle \frac{W}{r} \right) - \beta \langle u'v' \rangle \frac{V}{r} - \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x}}, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& U \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \frac{W}{r} (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle) = -(1 - \alpha) \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \langle w'^2 \rangle \frac{W}{r} \right) - \\
& \quad - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v'w' \rangle + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{re}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{(\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle)}{r} \right) \right] - \\
& \quad - \beta \left( \langle v'^2 \rangle \frac{W}{r} - \langle w'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial r} - \langle u'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \gamma e \left( \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) + \\
& \quad + \frac{C_s e}{r\varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial (\langle v'^2 \rangle - \langle w'^2 \rangle)}{\partial r} - 4 \langle w'^2 \rangle \frac{\langle v'w' \rangle}{r} \right] - \\
& \quad \underline{-(1 - \alpha) \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} - \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial x} \right) - \beta \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial x}}, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial r} + \frac{W}{r} \langle u'v' \rangle = -(1-\alpha) \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \\
 & - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle u'w' \rangle + \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{e}{\varepsilon} \left( \langle v'^2 \rangle \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\langle u'v' \rangle}{r} \right) \right] - \\
 & - \beta \langle u'v' \rangle \frac{W}{r} + \frac{C_s e}{r \varepsilon} \left[ \langle v'w' \rangle \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial r} - \langle w'^2 \rangle \frac{\langle u'w' \rangle}{r} \right] - \\
 & - (1-\alpha) \left( \langle u'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \beta \left( \langle u'w' \rangle \frac{\partial V}{\partial r} - \langle w'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \gamma e \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Для определения энергии турбулентности  $e$  использовалось уравнение

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{C_s}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial e}{\partial r} \right) + P - \varepsilon, \quad (10)$$

являющееся следствием уравнений переноса нормальных рейнольдсовых напряжений (4)–(6). Скорость диссипации  $\varepsilon$  вычислялась путем решения соответствующего дифференциального уравнения переноса

$$U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{C_\varepsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon}{e} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon). \quad (11)$$

Величина  $P$  — порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения:

$$\begin{aligned}
 P = & - \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} + \langle u'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + \langle u'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial x} + \langle v'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial r} + \langle w'^2 \rangle \frac{V}{r} \right). \quad (12)
 \end{aligned}$$

В уравнениях (4)–(11)  $C_s$ ,  $C_\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\sigma_\varepsilon$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$  — эмпирические постоянные, равные 0.22, 0.17, 0.93, 1.4, 1.16, 0.6, 2.2, 1.3, 1.45, 1.92 соответственно.

Модель 2 получается, если в приведенной выше записи каждого из уравнений (1), (4)–(9) опустить подчеркнутые члены, а в записи уравнения для  $W$  отбросить последнее слагаемое в правой части и положить  $\gamma = \beta = 0$ .

Выражение для  $P$  при этом принималось равным

$$P = - \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \langle v'w' \rangle r \frac{\partial (W/r)}{\partial r} \right). \quad (13)$$

В модели 3 для отыскания касательных рейнольдсовых напряжений используются не дифференциальные уравнения, а алгебраические представления, являющиеся следствием применения локально-равновесного приближения к (7)–(9):

$$\langle u'v' \rangle = - \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{e}{\varepsilon} \langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (14)$$

$$\langle v'w' \rangle = -\frac{1 - C_2 e}{C_1 \varepsilon} \langle v'^2 \rangle r \frac{\partial W}{\partial r}, \quad (15)$$

$$\langle u'w' \rangle = -\frac{1 - C_2 e}{C_1 \varepsilon} \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial V}{\partial r} \right). \quad (16)$$

При этом дифференциальные уравнения модели 2 применяются для нахождения других величин. В модели 4 рейнولدсовы напряжения  $\langle u'^2 \rangle$ ,  $\langle v'^2 \rangle$ ,  $\langle w'^2 \rangle$ ,  $\langle u'w' \rangle$  определяются по алгебраическим формулам, получающимся путем неравновесного усечения Роди дифференциальных уравнений переноса этих величин [7]:

$$\langle u'^2 \rangle = -\beta_1 \langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial r} + \gamma_1, \quad (17)$$

$$\langle v'^2 \rangle = -\beta_1 \langle v'w' \rangle \frac{W}{r} + \gamma_1, \quad (18)$$

$$\langle w'^2 \rangle = -\beta_1 \langle v'w' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \gamma_1, \quad (19)$$

$$\langle u'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle u'v' \rangle \frac{\partial W}{\partial r} + \langle v'w' \rangle \frac{\partial V}{\partial r} \right). \quad (20)$$

Здесь  $\alpha_1 = -\lambda \frac{e}{\varepsilon}$ ,  $\beta_1 = 2\alpha_1$ ,  $\gamma_1 = 2\frac{e}{3} + \beta_1 \frac{P}{3}$ ,  $\lambda = \frac{1 - C_2}{C_1 + P/\varepsilon - 1}$ . Остальные неизвестные величины определяются из соответствующих уравнений модели 2.

Последняя из рассмотренных в работе моделей — модель 5 — получается из предыдущей заменой алгебраических представлений (17)–(19) на дифференциальные уравнения модели 2, а уравнения переноса  $\langle v'w' \rangle$  на алгебраическую аппроксимацию

$$\langle v'w' \rangle = \alpha_1 \left( \langle v'^2 \rangle r \frac{\partial}{\partial r} (W/r) + \frac{W}{r} (v'^2 - w'^2) \right). \quad (21)$$

Уравнения математических моделей обезразмериваются с использованием масштаба скорости  $U_0$  (равной по величине скорости движения тела) и масштаба длины  $D$  — характерного размера тела. При  $x = x_0$  задаются начальные условия для  $U, W, \langle u'_i u'_j \rangle, \varepsilon$ , согласующиеся с экспериментальными данными по динамике безымпulsiveго закрученного турбулентного следа за сферой [5]. При  $r \rightarrow \infty$  ставились условия невозмущенного потока, а для  $r = 0$  краевые условия определялись исходя из симметричности функций  $U, \langle u'^2 \rangle, \langle v'^2 \rangle, \langle w'^2 \rangle, \langle v'w' \rangle, \varepsilon$  и антисимметричности функций  $W, V, \langle u'v' \rangle, \langle u'w' \rangle$ .

### 3. Результаты расчетов

Алгоритм решения задачи аналогичен приведенному в [8]. Предварительно уравнения математических моделей переписывались в дивергентном виде так, чтобы законы сохранения импульса и момента количества движения были следствием их интегрирования по поперечному сечению следа с учетом краевых условий задачи. Построены конечно-разностные аппроксимации уравнений и граничных условий на оси следа, консервативные по отношению к этим законам. Осуществлено тестирование алгоритма на асимптотическом решении Л. Г. Лойцянского о вырождении ламинарной закрученной затопленной струи.

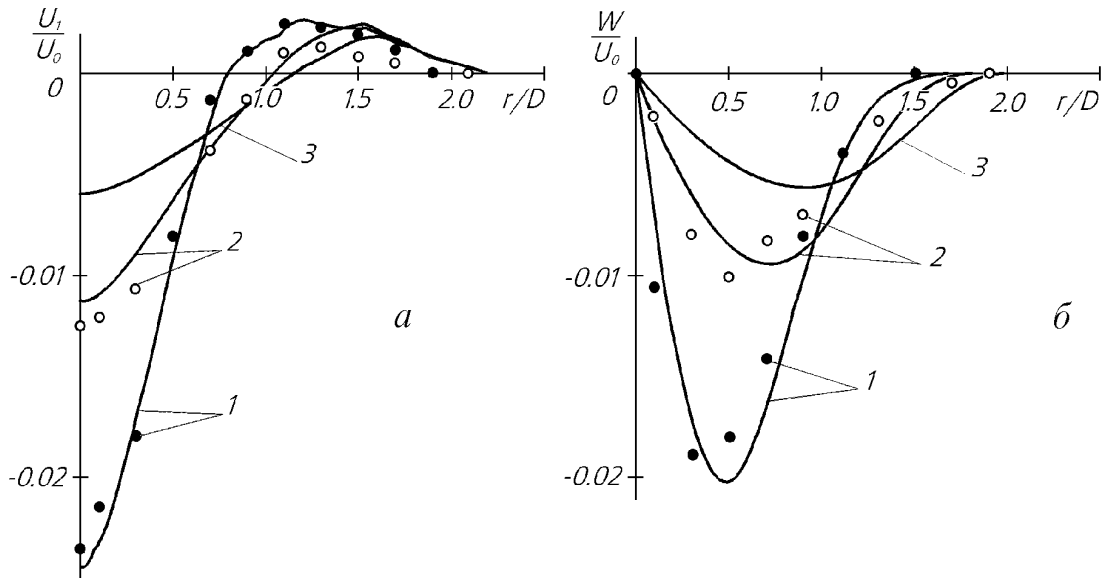


Рис. 1.

Ниже представлены результаты расчетов, выполненных на основе модели 5, давшей лучшее согласие с экспериментальными данными. В качестве начальных условий использовались величины, полученные экспериментально при  $x = 10D$ . Расчеты выполнялись (из соображений простоты) на равномерных неподвижных сетках. Параметры сетки выбирались в ходе численных экспериментов так, что одновременное уменьшение шагов сетки по переменной  $r$  в 2 раза и по переменной  $x$  в 2 раза приводило к отклонениям сеточных решений, не превышающим в равномерной норме 2%.

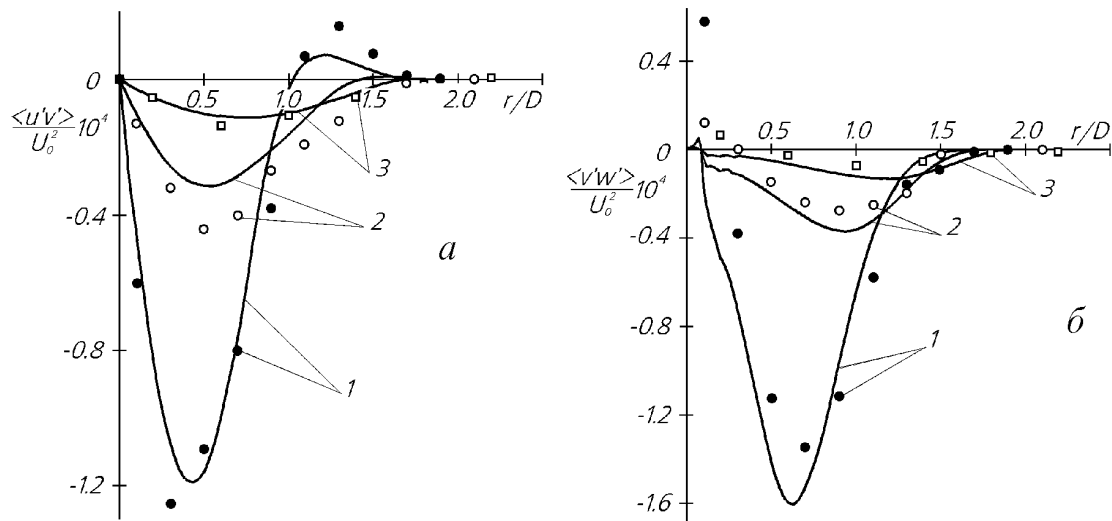


Рис. 2.

Нормированные распределения дефекта продольной компоненты скорости  $U_1 = U - U_0$  и тангенциальной компоненты скорости  $W$  приведены на рис. 1, а, б соответственно. На рис. 1–3 результаты расчетов показаны сплошными линиями, точки—экспериментальные данные, цифрами 1, 2, 3 обозначены соответственно расстояния от тела  $x/D = 20, 50, 100$ . Касательные реинльдсовы напряжения  $\langle u'v' \rangle, \langle v'w' \rangle$  сопоставлены на рис. 2, а, б.

Интенсивности компонент турбулентных флуктуаций скорости  $\sigma_u = \sqrt{\langle u'^2 \rangle} / U_0$ ,  $\sigma_v = \sqrt{\langle v'^2 \rangle} / U_0$ ,  $\sigma_w = \sqrt{\langle w'^2 \rangle} / U_0$  приведены на рис. 3. Видно, что модель 5 вполне удовлетворительно описывает экспериментальные данные.

Расчеты, выполненные по другим моделям (модели 1–4), показали, что модели 1, 2 неудовлетворительно описывают поле средней скорости и распределения касательных напряжений  $\langle u'v' \rangle$ ,  $\langle v'w' \rangle$ . Модели 3, 4, удовлетворительно описывая ряд из рассмотренных характеристик течения, хуже модели 5 предсказывают поведение тангенциальной составляющей скорости  $W$  и напряжения  $\langle v'w' \rangle$ .

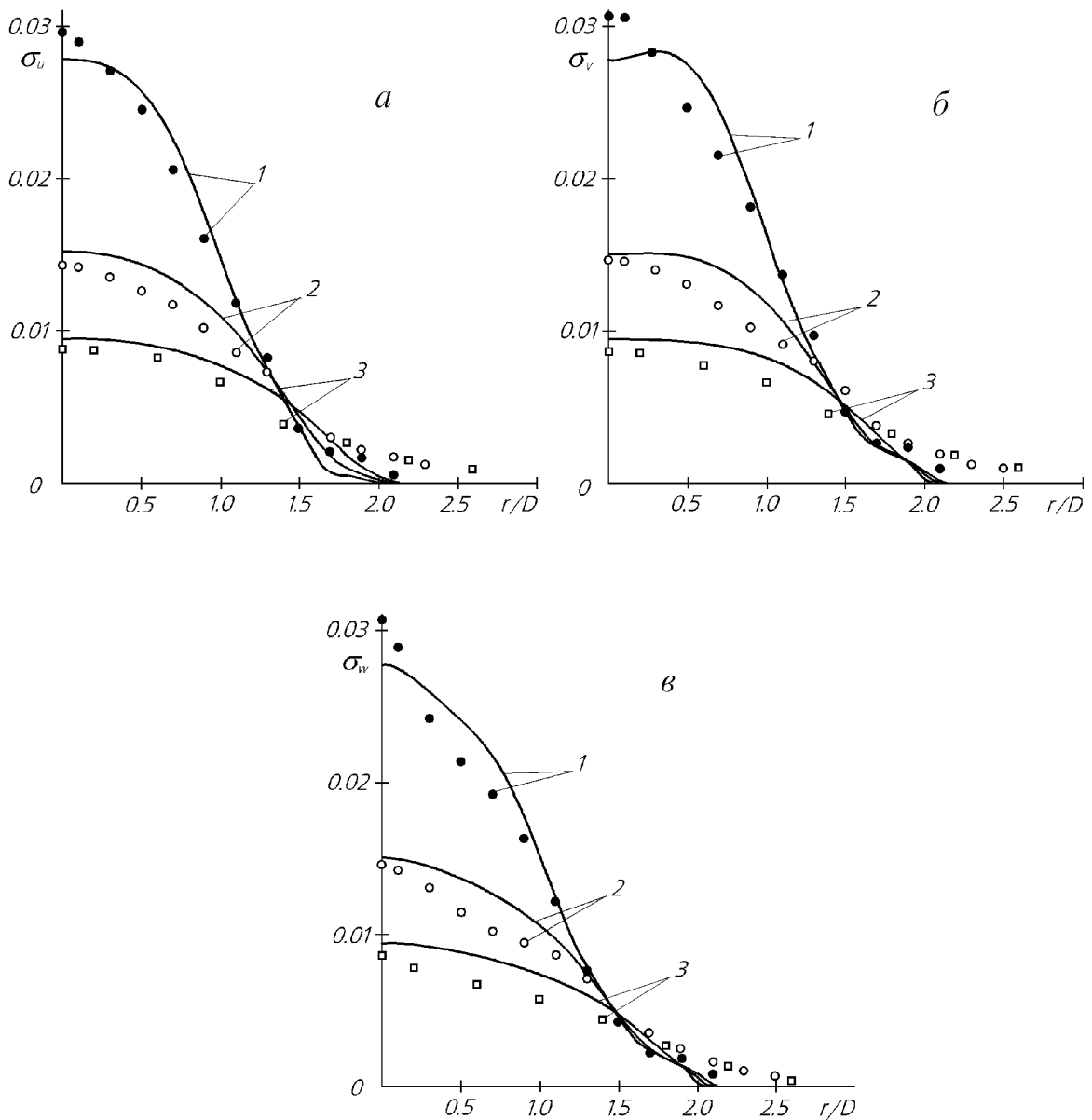


Рис. 3.

Рис. 4 демонстрирует изменение с расстоянием от тела осевых значений интенсивностей флуктуаций различных компонент скорости  $\sigma_u^0$ ,  $\sigma_v^0$ ,  $\sigma_w^0$ , характерного размера следа

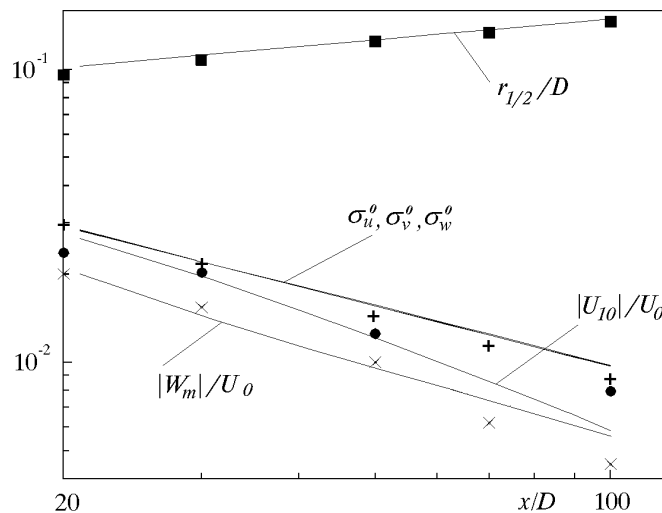


Рис. 4.

$r_{1/2}/D$ , абсолютной величины дефекта продольной компоненты средней скорости  $|U_{10}|/U_0$  и модуля максимального значения тангенциальной компоненты скорости  $|W_m|/U_0$ . Величина  $r_{1/2}$  при этом определялась из соотношения  $\sigma_u(x, r_{1/2}) = \sigma_u(x, 0)/2$ . Видно, что как увеличение поперечного размера следа, так и вырождение турбулентности в следе модель 5 отражает достаточно хорошо.

## Список литературы

- [1] SHETZ J. A., FAVIN S. Numerical solution for the near wake of a body with propeller. *J. Hydronautics*, **11**, №10, 1977, 136–141.
- [2] SHETZ J. A., FAVIN S. Numerical solution of a body-propeller combination including swirl and comparison with data. *J. Hydronautics*, **13**, №4, 1979, 46–51.
- [3] ШЕТЦ ДЖ. *Турбулентные течения. Процессы вдува и перемешивания*. Мир, М., 1984.
- [4] ГУМИЛЕВСКИЙ А. Г. Автомодельность и законы вырождения в следах с компенсацией по импульсу и моменту количества движения. *Изв. РАН. Сер. МЖГ*, №5, 1993, 35–41.
- [5] КОСТОМАХА В. А., ЛЕСНОВА Н. В. Турбулентный закрученный след за сферой с полной или частичной компенсацией силы сопротивления. *ПМТФ*, **36**, №2, 1995, 88–98.
- [6] ЛАУНДЕР Б. Е., МОРС А. Численный расчет осесимметричных сдвиговых течений с использованием замыканий для напряжений. В *“Турбул. сдвиговые течения. 1”*, Под ред. А. С. Гиневского, Машиностроение, М., 1982, 291–310.
- [7] SHARIF M. A., WONG J. K. E. Evaluation of the performance of three turbulence closure models in the prediction of confined swirling flows. *Computers and Fluids*, **24**, №1, 1995, 81–100.



- [8] ДЕМЕНКОВ А. Г., ЧЕРНЫХ Г. Г. О численном моделировании струйных течений вязкой несжимаемой жидкости. В *“Вычисл. технологии”*, 4, №12, ИВТ СО РАН, Новосибирск, 1995, 119–131.

*Поступила в редакцию 13 января 1997 г.*