

ОПТИМИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ И РЕЖИМОВ РАБОТЫ СКВАЖИН НЕФТЕПРОМЫСЛА

К. Р. АЙДА-ЗАДЕ, С. З. КУЛИЕВ

Институт кибернетики НАН Азербайджана, Баку

e-mail: kamil_aydazade@rambler.ru

Producing and injecting oilfield wells operating in the frontal water drive regime are considered. A formulation and numerical solution of the problem of locations and flow rates optimization is suggested. A finite-dimensional approximation of the corresponding continuous optimal control problem with distributed parameters is used. In the case of the reduced discrete problem, analytical formulas for the gradient of the cost functional on all optimized parameters are obtained. The results of numerical experiments are presented.

Введение

Эффективность эксплуатации нефтяных месторождений во многом определяется режимами добычи сырья и закачки воды в пласт по скважинам, кустам скважин, которые влияют на динамику изменения контура водонефтяного контакта (ВНК), отчего, в свою очередь, зависят сроки эксплуатации, заводнения, коэффициент нефтеотдачи пласта.

Исследуется численное решение задачи оптимального размещения добывающих и нагнетательных скважин и оптимального управления их дебитами при эксплуатации нефтяного пласта в режиме водонапорного поршневого вытеснения. Математическая постановка задачи определяется нелинейным интегродифференциальным уравнением с частными производными, описывающим изменение положения водонефтяного контакта в пространстве и во времени [1]. Целевой функционал задачи определяется формой ВНК в конечный момент временного периода или в течение всего процесса эксплуатации нефтяного пласта. В целом рассматриваемая задача представляет собой проблему оптимального управления нелинейной системой с оптимизируемыми местами размещения сосредоточенных источников и их мощностей — функций от времени. Для решения поставленной задачи использована конечно-разностная аппроксимация. В результате получена задача конечно-мерной оптимизации со специальной структурой ограничений. С использованием специфики структуры ограничений получены формулы для условного градиента функционала, что позволило применять эффективные методы оптимизации первого порядка для численного решения поставленной задачи. Приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении контрольных задач.

Отметим, что задачи оптимального управления процессами эксплуатации нефтегазовых месторождений, запасов подземных вод давно привлекали внимание многих исследователей [1–5], но развитие вычислительной техники, средств управления лишь в последние

годы позволило вплотную подойти к практической реализации и применению результатов расчетов в реальных условиях природных месторождений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское движение замкнутого контура нефтеносности Γ при работе системы скважин в неограниченном пласте с постоянными мощностью H , пористостью m и проницаемостью k . Вязкость нефти внутри контура Γ (область G_1) обозначим через μ_1 , вязкость воды вне контура Γ (область G_2) — μ_2 . Пусть скважины имеют объемные дебиты $Q_\nu(t)$, причем значениям индекса $\nu = 1, 2, \dots, l_1$ соответствуют добывающие скважины в нефтяной области G_1 , а значениям $\nu = l_1 + 1, l_1 + 2, \dots, l_1 + l_2$ — нагнетательные скважины в окружающей водяной зоне G_2 .

Ставится следующая задача оптимального управления: определить такое расположение нагнетательных и добывающих скважин и их дебиты во времени, чтобы изменение границы раздела жидкостей Γ в процессе эксплуатации нефтяного месторождения было оптимальным исходя из какого-либо критерия управления. Движение границы раздела двух несжимаемых жидкостей — воды и нефти — в полярной системе координат можно описать следующей нелинейной интегродифференциальной краевой задачей [1]:

$$(f^2(\theta, t))_t - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} (f^2(\gamma, t))_t K(\theta, \gamma, t) d\gamma = \frac{1}{2\pi m H} \sum_{\nu=1}^{l_1+l_2} \lambda_\nu Q^\nu(t) K^\nu(\theta, t, \rho_\nu, \alpha_\nu), \quad (1)$$

$$f(\theta, 0) = f^0(\theta), \quad f(0, t) = f(2\pi, t), \quad \theta \in [0; 2\pi], \quad t \in [0; T], \quad (2)$$

$$K(\theta, \gamma, t) = [f^2(\theta, t) - f(\theta, t)f(\gamma, t) \cos(\theta - \gamma) + f_\theta(\theta, t)f(\gamma, t) \sin(\theta - \gamma)] / [f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t)f(\gamma, t) \cos(\theta - \gamma) + f^2(\gamma, t)],$$

$$K^\nu(\theta, t) = [f^2(\theta, t) - f(\theta, t)\rho_\nu \cos(\theta - \alpha_\nu) + f_\theta(\theta, t)\rho_\nu \sin(\theta - \alpha_\nu)] / [f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t)\rho_\nu \cos(\theta - \alpha_\nu) + \rho_\nu^2],$$

$$\lambda_\nu = \begin{cases} 1 - \lambda, & \nu = 1, \dots, l_1, \\ 1 - \lambda, & \nu = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2, \end{cases} \quad \lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \quad c_1 = k/\mu_1, c_2 = k/\mu_2.$$

Здесь $f(\theta, t)$ — радиус-вектор, определяющий состояние контура во времени; $f_t(\cdot, \cdot)$, $f_\theta(\cdot, \cdot)$ — соответствующие частные производные; l_1, l_2 — число добывающих и нагнетательных скважин, размещенных в точках с координатами (ρ_ν, α_ν) с дебитами $Q^\nu(t)$, $\nu = 1, \dots, L$, $L = l_1 + l_2$, причем $Q^\nu \leq 0$ для $\nu = 1, \dots, l_1$ и $Q^\nu \geq 0$ для $\nu = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_2$; c_1, c_2 — коэффициенты текучести соответственно в нефтяной и водяной зонах; T — промежуток времени, в течение которого исследуется процесс (планирования, управления, эксплуатации нефтяного месторождения).

При заданных дебитах скважин $Q(t) = (Q^1(t), \dots, Q^L(t))$, $t \in [0; T]$, и местах их размещения (ρ_ν, α_ν) , $\nu = 1, \dots, L$, с применением численных методов решения начально-краевой задачи (1),(2) однозначно определяется состояние ВНК, т.е. $f(\theta, t)$ в каждый момент времени $t \in [0; T]$. Будем предполагать, что часть l_{11} из l_1 добывающих скважин с координатами (ρ_ν, α_ν) , $\nu = 1, \dots, l_{11}$ и l_{21} из l_2 нагнетательных скважин с координатами (ρ_ν, α_ν) , $\nu = l_1 + 1, \dots, l_1 + l_{21}$ функционируют, а l_{12} добывающих и l_{22} нагнетательных скважин необходимо разместить, $l = l_{12} + l_{22}$.

В задачах планирования, оперативного управления, как правило, имеются ограничения, определяемые планово-экономическими, технологическими, геологическими, техническими возможностями эксплуатации месторождения и размещения скважин:

$$\underline{Q}^\nu \leq Q^\nu(t) \leq \overline{Q}^\nu, \quad \nu = 1, \dots, L, \quad - \sum_{\nu=1}^{l_1} \int_0^T Q^\nu(t) dt \geq Q^{\text{пл}}, \quad \sum_{\nu=l_1+1}^{l_1+l_2} \int_0^T Q^\nu(t) dt \leq Q^{\text{доп}}; \quad (3)$$

$$\rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos(\alpha_i - \alpha_j) \geq D^2, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, L. \quad (4)$$

Здесь D — минимально допустимое расстояние между двумя любыми скважинами; $Q^{\text{пл}}$, $Q^{\text{доп}}$ — заданные величины. Обозначим через $(\bar{\rho}, \bar{\alpha}) = (\rho_{l_{11}+1}, \alpha_{l_{11}+1}, \dots, \rho_{l_1}, \alpha_{l_1}, \rho_{l_1+l_{21}+1}, \alpha_{l_1+l_{21}+1}, \dots, \rho_{l_L}, \alpha_{l_L})$ $2l$ -мерный вектор неизвестных координат размещения скважин, где $l = l_{12} + l_{22}$. Задача оптимизации размещения скважин и управления ими заключается в определении значений $2l$ -мерного вектора $(\bar{\rho}, \bar{\alpha})$ и L -мерной вектор-функции $Q(t) = (Q^1(t), \dots, Q^L(t))$, оптимизирующих какой-либо выбранный критерий качества планирования.

Как видно из (2), при решении задачи размещения новых скважин необходимо учитывать и оптимизировать режимы работающих скважин, хотя может случиться, что дебиты некоторых работающих скважин заданы и менять их не рекомендуется по технологическим или техническим причинам.

Отметим, что в процессе эксплуатации пласта и изменения положения ВНК некоторые, например одна, из добывающих скважин в какой-то момент времени могут оказаться за контуром ВНК (вне нефтяной зоны), т. е. в водяной зоне. Тогда эта скважина может быть переведена на работу в режиме закачки воды. В процессе решения задачи с этого момента времени l_{11} (число размещаемых добывающих скважин) уменьшится на единицу, а l_{21} (число размещенных нагнетательных скважин) увеличится на единицу. Для этих скважин, начиная со времени перевода вида функционирования, соответственно изменятся технологические ограничения на режимы (3).

В качестве критериев размещения скважин и назначения режимов добычи сырья по скважинам могут быть приняты максимизация средневзвешенной остаточной энергии пласта, максимизация добычи, “правильность” формы водонефтяного контакта и др. В данной работе критерием управления выбраны топологические свойства формы ВНК в конечный момент времени, а именно близость фронта ВНК к эллипсу, площадь которого определяется остаточным объемом сырья, а координаты центра и коэффициент сжатия этого эллипса оптимизируются.

Остаточный объем в пласте, занимаемый нефтью в конечный момент времени, определяется начальным состоянием контура и количеством добытого сырья:

$$V^{\text{ост}} = \frac{H}{2} \int_0^{2\pi} (f^0(\theta))^2 d\theta + \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^{l_1} \int_0^T Q^\nu(t) dt.$$

(Здесь учтено, что $Q^\nu(t) \leq 0$, $\nu = 1, \dots, l_1$, жидкость несжимаема, а пространственный объем, занимаемый нефтью, обратно пропорционален величине пористости породы.)

Площадь эллипса при заданных полуосях R_x, R_y определяется формулой

$$S^{\text{эл}} = \pi R_x R_y.$$

Обозначим через $\chi = R_x/R_y$ коэффициент сжатия эллипса, тогда

$$S^{\text{эл}} = \pi\chi R_y^2.$$

Учитывая, что $V^{\text{ост}} = S^{\text{эл}}H$, получим $S^{\text{эл}} = V^{\text{ост}}/H$. Отсюда $\pi\chi R_y^2 = V^{\text{ост}}/H$. Следовательно, $R_y = \sqrt{V^{\text{ост}}/(\pi\chi H)}$, $R_x = \sqrt{V^{\text{ост}}\chi/(\pi H)}$.

Уравнение эллипса $\rho = \rho(\theta)$ с полуосями R_x и R_y , центром в точке $(\rho_{\text{ц}}, \alpha_{\text{ц}})$, с одной из осей, повернутой на угол φ , в полярной системе координат имеет вид

$$(\rho \cos(\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \cos(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 + \chi^2(\rho \sin(\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \sin(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 - R_x^2 = 0.$$

Из практических соображений ясно, что коэффициент сжатия эллипса при проведении оптимизации его формы должен удовлетворять определенным ограничениям:

$$\underline{\chi} \leq \chi \leq \bar{\chi}, \quad (5)$$

где $\underline{\chi}$ и $\bar{\chi}$ — заданные положительные постоянные, характеризующие требования к форме остаточной области нефтяного пласта.

В качестве критерия оптимальности размещения скважин и дебитов добычи нефти по ним $J = J(\bar{\rho}, \bar{\alpha}, Q, \rho_{\text{ц}}, \alpha_{\text{ц}}, \chi, \varphi, f)$ примем величину отклонения контура ВНК в конечный момент времени $\rho = f(\theta, T)$ от формы эллипса:

$$\begin{aligned} J = \int_0^{2\pi} & [(f(\theta, T) \cos(\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \cos(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 + \chi^2(f(\theta, T) \sin(\theta - \varphi) - \\ & - \rho_{\text{ц}} \sin(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{ост}}/(\pi H)]^2 d\theta + \\ & + \varepsilon_1 \sum_{\nu=1}^L \int_0^T [Q^\nu(t)]^2 dt + \varepsilon_2 \left(\sum_{\nu=1}^l \bar{\rho}_\nu^2 + \rho_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_3 \left(\sum_{\nu=1}^l \bar{\alpha}_\nu^2 + \alpha_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_4(\chi - 1)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь последние четыре слагаемых введены для регуляризации функционала; $\varepsilon_j > 0$, $j = \overline{1, 4}$, — параметры регуляризации.

Замечание. Вместо критерия (6) можно использовать функционал

$$\begin{aligned} J = \int_0^T \int_0^{2\pi} & [(f(\theta, t) \cos(\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \cos(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 + \chi^2(f(\theta, t) \sin(\theta - \varphi) - \\ & - \rho_{\text{ц}} \sin(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{ост}}/(\pi H)]^2 d\theta dt + \\ & + \varepsilon_1 \sum_{\nu=1}^L \int_0^T [Q^\nu(t)]^2 dt + \varepsilon_2 \left(\sum_{\nu=1}^l \bar{\rho}_\nu^2 + \rho_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_3 \left(\sum_{\nu=1}^l \bar{\alpha}_\nu^2 + \alpha_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_4(\chi - 1)^2, \end{aligned} \quad (7)$$

отличающийся от критерия (6) требованием близости контура ВНК к форме эллипса не только в конечный момент времени, а на протяжении всей разработки.

Задача (1)–(5), (6) или (7) является задачей оптимального управления распределенной системой, описываемой нелинейным интегродифференциальным уравнением (1), в которой оптимизируемыми являются L -мерная вектор-функция времени $Q(t)$, 2^*l -мерный

вектор $(\bar{\rho}, \bar{\alpha})$, координаты центра $(\rho_{ц}, \alpha_{ц})$, коэффициент сжатия χ и угол поворота φ одной из осей эллипса — основания цилиндра, в котором мог бы разместиться остаток сырья в пласте. Проведение теоретических исследований и получение необходимых и достаточных условий оптимальности для нелинейных задач оптимального управления системами с распределенными параметрами представляют известные трудности [4], поэтому в данной работе предлагаются численное исследование и решение поставленной задачи.

Отметим, что в связи с существенной нелинейностью поставленной задачи исследовать вопросы единственности оптимального решения для нее не представляется возможным. Тем более, не сложно построить частный пример, когда заведомо оптимальное решение не единственно (например, если начальный контур ВНК является окружностью и ограничения на дебиты скважин одинаковы, тогда ясно, что любое равномерное размещение скважин на окружности “оптимального” радиуса оптимально). Ценность рассматриваемой задачи для практики заключается в том, что ее решение позволяет уточнять варианты эксплуатации месторождения, предлагаемые специалистами-проектировщиками. Важным частным случаем рассматриваемой задачи является рассмотрение кусочно-постоянных дебитов

$$Q^{\nu}(t) = q_j^{\nu} = \text{const}, t \in [\tau_{j-1}, \tau_j], j = 1, \dots, M, \tau_0 = 0, \tau_M = T,$$

где $\tau_j, j = 1, \dots, M - 1$ — времена переключения режимов, которые могут быть заданы или оптимизированы. В обоих случаях изменения в полученных выше формулах несущественны и их несложно получить. С одной стороны, численное решение в этой постановке упрощается в связи с уменьшением размерности, с другой — упрощается реализация таких управляющих воздействий.

2. Конечномерная аппроксимация задачи

Для численного решения задачи оптимизации и оптимального управления распределенной системой (1)–(6) предлагается применить следующую схему. Используя какую-либо конечно-разностную аппроксимацию всей задачи, получим конечномерную задачу математического программирования с ограничениями типа равенств со специальной структурой (6), (7), для решения которой используются методы первого порядка, точнее, комбинация методов внешнего штрафного функционала для учета ограничений (4) и проекции градиента штрафного функционала для учета линейных ограничений (3), (5) [8].

Введем равномерную сеточную область $i = 0, \dots, N_{\theta}, j = 0, \dots, N_t, h_{\theta} = 2\pi/N_{\theta}, h_t = T/N_t$ и обозначения для сеточных функций

$$f_{ij} = f(\theta_i, t_j), f_{i0} = f^0(\theta_i), Q_j^{\nu} = Q^{\nu}(t_j), i = 0, \dots, N_{\theta}, j = 0, \dots, N_t,$$

$$f = (f_{00}, \dots, f_{0N_{\theta}}, \dots, f_{N_{\theta}N_t}), Q = (Q_0^1, \dots, Q_{N_t}^1, \dots, Q_{N_t}^L).$$

Для конечномерной аппроксимации краевой задачи (1), (2) используем следующую двухслойную неявную схему:

$$\frac{f_{ij}^2 - f_{ij-1}^2}{h_t} = \frac{\lambda h_{\theta}}{\pi h_t} \sum_{\mu=1}^{N_{\theta}} (f_{\mu j}^2 - f_{\mu j-1}^2) K_{i\mu j-1} + \frac{1}{2\pi m H} \sum_{\nu=1}^L \lambda_{\nu} Q_{j-1}^{\nu} K_{j-1}^{\nu},$$

$$K_{i\mu j-1} = K_{i\mu j-1}(f_{\mu j-1}, f_{i-1j-1}, f_{ij-1}, f_{i+1j-1}) = [f_{ij-1}^2 - f_{ij-1} f_{\mu j-1} \cos(i - \mu)h_{\theta} + (f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1}) f_{\mu j-1} \sin(i - \mu)h_{\theta} / (2h_{\theta})] / [f_{ij-1}^2 - 2f_{ij-1} f_{\mu j-1} \cos(i - \mu)h_{\theta} + f_{\mu j-1}^2],$$

$$K_{ij-1}^\nu = K_{ij-1}^\nu(f_{i-1j-1}, f_{ij-1}, f_{i+1j-1}, \bar{\rho}, \bar{\alpha}) = [f_{ij-1}^2 - f_{ij-1}\rho_\nu \cos(ih_\theta - \alpha_\nu) + (f_{i+1j-1} - f_{i-1j-1})\rho_\nu \sin(ih_\theta - \alpha_\nu)/(2h_\theta)]/[f_{ij-1}^2 - 2f_{ij-1}\rho_\nu \cos(ih_\theta - \alpha_\nu) + \rho_\nu^2].$$

Принимая, что $K_{ij} = 1$ для всех $i = 0, \dots, N_\theta$, $j = 0, \dots, N_t$, получим

$$f_{ij}^2 = F_{ij}(f_{1j-1}, \dots, f_{N_\theta j-1}, f_{1j}, \dots, f_{i-1j}, f_{i+1j}, \dots, f_{N_\theta j-1}, Q_{j-1}^1, \dots, Q_{j-1}^L, \bar{\rho}, \bar{\alpha}), \quad (8)$$

$$F_{ij} = f_{ij-1}^2 + \frac{\lambda h_\theta}{\pi - \lambda h_\theta} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^{N_\theta} (f_{\mu j}^2 - f_{\mu j-1}^2) K_{i\mu j-1} + \frac{h_t}{mH(\pi - \lambda h_\theta)} \sum_{\nu=1}^L \lambda_\nu Q_{j-1}^\nu K_{ij-1}^\nu, \quad i = 1, \dots, N_\theta, \quad j = 0, \dots, N_t; \quad (9)$$

$$f_{i0} = f_i^0, \quad f_{0j} = f_{N_\theta j}, \quad i = 1, \dots, N_\theta, \quad j = 0, \dots, N_t. \quad (10)$$

При заданных значениях Q_j^ν , $j = 0, \dots, N_t - 1$, $\nu = 1, \dots, L$ и вектора $(\bar{\rho}, \bar{\alpha})$ из (8)–(10) однозначно определяются f_{ij} , $i = 1, \dots, N_\theta$, $j = 0, \dots, N_t$, для чего при каждом j , начиная с $j = 2$, решается система N_θ линейных уравнений относительно f_{ij}^2 , $i = 1, \dots, N_\theta$.

Ограничения (3) аппроксимируются очевидным образом:

$$\underline{Q}^\nu \leq Q_j^\nu \leq \overline{Q}^\nu, \quad \nu = 1, \dots, L, \quad -h_t \sum_{\nu=0}^{\ell_1} \sum_{j=0}^{N_t-1} Q_j^\nu \geq Q^{\text{пл}}, \quad h_t \sum_{\nu=l_1+1}^{\ell_2} \sum_{j=0}^{N_t-1} Q_j^\nu \leq Q^{\text{доп}}. \quad (11)$$

Целевую функцию (6) аппроксимируем с использованием какой-либо квадратурной формулы, в частности метода прямоугольников:

$$I = h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \cos(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \sin(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{ост}}/(\pi H)]^2 + \varepsilon_1 h_t \sum_{i=1}^L \sum_{j=0}^{N_t-1} (Q_j^i)^2 + \varepsilon_2 \left(\sum_{i=1}^l \bar{\rho}_i^2 + \rho_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_3 \left(\sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i^2 + \alpha_{\text{ц}}^2 \right) + \varepsilon_4 (\chi - 1)^2, \quad (12)$$

$$V^{\text{ост}} = H \frac{h_\theta}{2} \sum_{i=1}^{N_\theta} (f_i^0)^2 + \frac{h_t}{m} \sum_{\nu=1}^{l_1} \sum_{j=0}^{N_t-1} Q_j^\nu.$$

Таким образом, непрерывная задача оптимального управления (1)–(6) аппроксимирована конечномерной задачей математического программирования (4), (5), (8)–(12) общей размерности оптимизируемых параметров, равной $(N_\theta N_t + LN_t + 2l + 4)$. Размерность этой задачи по числу оптимизируемых параметров, ограничений достаточно велика, и ее решение какими-либо общими методами без учета специфики структуры ограничений практически невозможно. Специфика редуцированной задачи заключена в структуре ограничений (8)–(10), имеющих большую размерность порядка $N_\theta N_t$ и слабо заполненный якобиан.

3. Получение формулы градиента целевого функционала редуцированной задачи

Получим формулы компонент градиента целевой функции (12) по оптимизируемым параметрам:

$$\nabla I = \left(\frac{dI}{d\bar{\rho}}, \frac{dI}{d\bar{\alpha}}, \frac{dI}{dQ}, \frac{dI}{d\rho_{\text{ц}}}, \frac{dI}{d\alpha_{\text{ц}}}, \frac{dI}{d\chi}, \frac{dI}{d\varphi} \right)^T,$$

что позволит для численного решения задачи (4), (5), (8)–(12) использовать эффективные методы оптимизации и оптимального управления первого порядка [6–8].

Введем вспомогательные переменные импульсов:

$$\Psi_{ij} = \frac{dI(\bar{\rho}, \bar{\alpha}, Q, \rho_{\text{ц}}, \alpha_{\text{ц}}, \chi, \varphi, f)}{df_{ij}}, \quad i = 1, \dots, N_{\theta}, \quad j = 0, \dots, N_t.$$

Здесь производные понимаются как полные, учитывающие, что изменение значения фазовой переменной f_{ij} в свою очередь согласно зависимостям (8)–(10) приводит к изменениям состояния фазовой переменной при других значениях индексов. Тогда непосредственно из (8), (10) несложно видеть, что:

$$\Psi_{ij} = \frac{\partial I}{\partial f_{ij}} + \sum_{s=1}^{N_{\theta}} \frac{\partial f_{sj+1}}{\partial f_{ij}} \Psi_{sj+1} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{N_{\theta}} \frac{\partial f_{sj}}{\partial f_{ij}} \Psi_{sj}, \quad i = 1, \dots, N_{\theta}, \quad j = 0, \dots, N_t - 1; \quad (13)$$

$$\Psi_{iN_t} = \frac{\partial I}{\partial f_{iN_t}} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{N_{\theta}} \frac{\partial f_{sN_t}}{\partial f_{iN_t}} \Psi_{sN_t}, \quad i = 1, \dots, N_{\theta}. \quad (14)$$

Производные, участвующие в правых частях (13), (14), определяются из (8) с учетом (9), (10), и после несложных вычислений и преобразований можно получить их выражения

$$\partial f_{sj} / \partial f_{ij} = \lambda h_{\theta} f_{ij} K_{sij-1} / (f_{sj}(\pi - \lambda h_{\theta})), \quad s = 1, \dots, N_{\theta}, \quad s \neq i, \quad j = 0, \dots, N_t,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{sj+1}}{\partial f_{ij}} = & \left\{ \frac{\lambda h_{\theta}}{\pi - \lambda h_{\theta}} \left[-2f_{ij} K_{sij-1} + \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq s}}^{N_{\theta}} (f_{\mu j+1}^2 - f_{\mu j}^2) \frac{\partial K_{s\mu j}}{\partial f_{ij}} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{h_t}{mH(\pi - \lambda h_{\theta})} \sum_{\nu=1}^L \lambda_{\nu} Q_{\nu}^j \frac{\partial K_{sj}^{\nu}}{\partial f_{ij}} \right\} / (2f_{sj+1}), \\ & s = i \pm 1, \quad j = 0, \dots, N_t - 1, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_{sj+1}}{\partial f_{ij}} = \left\{ 2f_{ij} + \frac{\lambda h_{\theta}}{\pi - \lambda h_{\theta}} \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^{N_{\theta}} (f_{\mu j+1}^2 - f_{\mu j}^2) \frac{\partial K_{i\mu j}}{\partial f_{ij}} + \frac{h_t}{mH(\pi - \lambda h_{\theta})} \sum_{\nu=1}^L \lambda_{\nu} Q_{\nu}^j \frac{\partial K_{ij}^{\nu}}{\partial f_{ij}} \right\} / (2f_{sj+1}),$$

$$s = i, \quad j = 0, \dots, N_t - 1,$$

$$\frac{\partial f_{sj+1}}{\partial f_{ij}} = \frac{\lambda h_{\theta}}{\pi - \lambda h_{\theta}} \left\{ -2f_{ij} K_{sij} + (f_{ij+1}^2 - f_{ij}^2) \frac{\partial K_{sij}}{\partial f_{ij}} \right\} / (2f_{sj+1}), \quad s \neq i, \quad i \pm 1, \quad j = 1, \dots, N_t - 1,$$

$$\begin{aligned} \partial I / \partial f_{ij} &= 0 \text{ при } i = 1, \dots, N_\theta, \quad j = 0, \dots, N_t - 1, \\ \partial I / \partial f_{iN_t} &= 4h_\theta [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{OCT}} / (\pi H)] [\cos(ih_0 - \varphi) (f_{iN_t} \cos(ih_0 - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi) + \chi^2 \sin(ih_0 - \varphi) (f_{iN_t} \sin(ih_0 - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))], \quad i = 1, \dots, N_\theta. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что определение значений матрицы импульсов (Ψ_{ij}) по формулам (13), (14) производится в обратном порядке по j : сначала для $j = N_t$ по формуле (14) и далее для $j = N_t - 1, \dots, 0$ по формуле (13). Здесь, как и в случае с (8)–(10), при каждом j необходимо решать систему N_θ уравнений, но, в отличие от (8)–(10), уравнения (13), (14) являются линейными системами. Искомые компоненты градиента функционала определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dQ_j^\nu} &= \frac{\partial I}{\partial Q_j^\nu} + \sum_{i=1}^{N_\theta} \frac{\partial f_{ij+1}}{\partial Q_j^\nu} \Psi_{ij+1}, \quad \nu = 1, \dots, L, \quad j = 0, \dots, N_t - 1, \\ \frac{dI}{d\bar{\rho}_\nu} &= \frac{\partial I}{\partial \bar{\rho}_\nu} + \sum_{j=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_\theta} \frac{\partial f_{ij+1}}{\partial \bar{\rho}_\nu} \Psi_{ij+1}, \quad \frac{dI}{d\bar{\alpha}_\nu} = \frac{\partial I}{\partial \bar{\alpha}_\nu} + \sum_{j=0}^{N_t-1} \sum_{i=1}^{N_\theta} \frac{\partial f_{ij+1}}{\partial \bar{\alpha}_\nu} \Psi_{ij+1}, \quad \nu = 1, \dots, l, \\ \frac{dI}{d\rho_{\text{н}}} &= 4h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{OCT}} / (\pi H)] [-\cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi) (f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi)) + \chi^2 \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi) (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))] + 2\varepsilon_2 \rho_{\text{н}}, \\ \frac{dI}{d\alpha_{\text{н}}} &= 4h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{OCT}} / (\pi H)] [\rho_{\text{н}} \sin \alpha_{\text{н}} (f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi)) - \\ &\quad - \chi^2 \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi) (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))] + 2\varepsilon_3 \alpha_{\text{н}}, \\ \frac{dI}{d\chi} &= 2h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{OCT}} / (\pi H)] [2\chi (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \\ &\quad - V^{\text{OCT}} / (\pi H)] + 2\varepsilon_4 (\chi - 1), \\ \frac{dI}{d\varphi} &= 4h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{OCT}} / (\pi H)] [(f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) + \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi)) \times \\ &\quad \times (f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) + \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi)) + \chi^2 (-f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) + \\ &\quad + \rho_{\text{н}} \cos(\alpha_{\text{н}} - \varphi)) (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) + \rho_{\text{н}} \sin(\alpha_{\text{н}} - \varphi))]. \end{aligned}$$

Непосредственным дифференцированием из (8)–(10), (12) после несложных преобразований можно получить:

$$\begin{aligned}\partial f_{ij+1}/\partial Q_j^\nu &= r_{ij+1}^\nu K_{ij}^\nu, \quad \partial V^{\text{ост}}/\partial Q_j^\nu = h_t/m, \\ \partial I/\partial Q_j^\nu &= -2h_\theta \sum_{i=1}^{N_\theta} [(f_{iN_t} \cos(ih_\theta - \varphi) - \rho_{\text{ц}} \cos(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 + \chi^2 (f_{iN_t} \sin(ih_\theta - \varphi) - \\ &\quad - \rho_{\text{ц}} \sin(\alpha_{\text{ц}} - \varphi))^2 - \chi V^{\text{ост}}/(\pi H)] \chi h_t/(m\pi H) + 2\varepsilon_1 h_t Q_j^\nu, \\ \partial f_{ij+1}/\partial \bar{\rho}^\nu &= r_{ij+1}^\nu Q_j^\nu \partial K_{ij}^\nu/\partial \bar{\rho}^\nu, \quad \partial f_{ij+1}/\partial \bar{\alpha}^\nu = r_{ij+1}^\nu Q_j^\nu \partial K_{ij}^\nu/\partial \bar{\alpha}^\nu, \\ \partial I/\partial \bar{\rho}^\nu &= 2\varepsilon_2 \bar{\rho}^\nu, \quad \partial I/\partial \bar{\alpha}^\nu = 2\varepsilon_3 \bar{\alpha}^\nu, \quad r_{ij}^\nu = \lambda_\nu h_t/[2mH(\pi - \lambda h_\theta) f_{ij}].\end{aligned}$$

Таким образом, для численного решения поставленной задачи (1)–(6), точнее ее конечно-разностной аппроксимации (4), (5), (8)–(12) методами оптимизации первого порядка получены все необходимые формулы.

При большом числе вводимых скважин рекомендуется использовать агрегирование оптимизируемых параметров. А именно, предполагая, что вышеприведенные формулы использованы для оптимизации размещения кустов скважин (каждый из которых может включать 5–10 скважин), а полученные оптимальные дебиты являются суммарными для кустов, далее решаем задачу оптимизации расположения скважин для этих кустов. Для этого имеются специальные геологические методы и формулы, учитывающие схему кустования скважин, принятую на конкретном месторождении.

4. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты численных экспериментов относительно задач с такими данными, что их оптимальные решения ясны исходя из условий симметрии. В основном значения параметров, участвующих в постановке задачи, были следующие: $H = 5$ м, $m = 0.2$, $\lambda = 0.05$, $T = 5$ лет, $Q^{\text{пл}} = 2 \cdot 10^7$ м³, $Q^{\text{доп}} = 10^7$ м³, $D = 200$ м. Количество разбиений отрезка $[0; 2\pi]$ равно $N_\theta = 100$, а разбиений отрезка $[0; T]$ — $N_t = 180$. Во всех задачах были взяты начальные значения координат центра оптимизируемого эллипса $(\rho_{\text{ц}}; \alpha_{\text{ц}}) = (500; 1, 1)$, коэффициент сжатия и угол поворота первой оси эллипса $(\chi, \varphi) = (1; 0)$.

Для решения системы линейных уравнений относительно f_{ij} , получаемой при неявной схеме аппроксимации (8)–(10) и (13), (14) относительно ψ_{ij} , использован метод Гаусса. Для безусловной оптимизации штрафной функции использовался метод сопряженных градиентов с проекцией на линейные и позиционные ограничения.

Пусть первоначальная форма контура ВНК Γ_0 представляет собой окружность радиуса 3000 м, $l_{11} = l_{12} = 0$, т.е. на месторождении нет эксплуатируемых скважин и не планируется использование нагнетательных скважин. На рис. 1, а, б приведены результаты размещения четырех нефтяных скважин, а на рис. 1, в — шести скважин с разными начальными местами размещения, обозначенными на рисунке кружками (о), а полученные оптимальные размещения отмечены звездочками *, Γ_T — состояние контура ВНК в конечный момент времени. Оптимизация дебитов по всем скважинам в этих задачах проводилась на классе постоянных во времени функций, и для случая четырех скважин их оптимальное значение было равно 2745.3 м³/сут., для шести скважин — 1836.2 м³/сут. Как ясно из симметрии исходных данных, полученные решения близки к оптимальным, а значение функционала, например, для случая четырех скважин составило $J^* = 0.2830$.

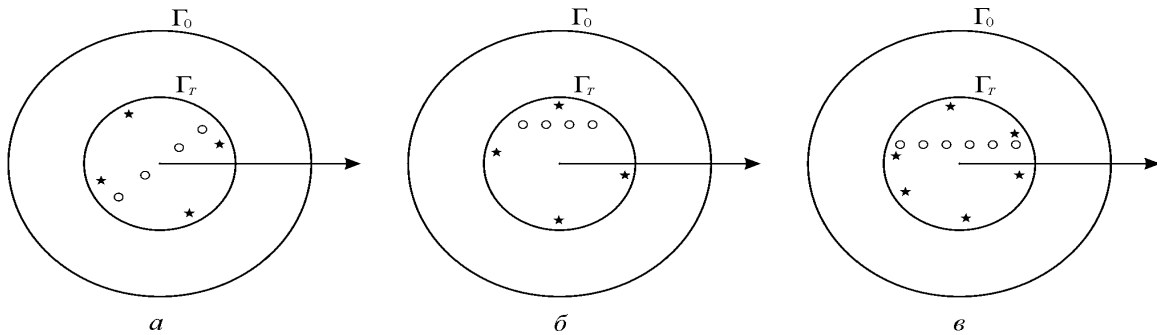


Рис. 1.

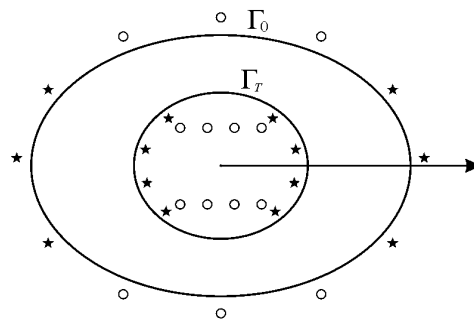


Рис. 2.

На рис. 2 приведены результаты решения задачи, когда первоначальная форма ВНК представляет собой эллипс с полуосями R_x , R_y , равными соответственно 3600 и 2500 м. Количество размещаемых добывающих скважин $l_{12} = 8$, нагнетательных $l_{22} = 6$, эксплуатируемых добывающих и нагнетательных скважин нет ($l_{11} = l_{21} = 0$).

Следует обратить внимание на то, как в результате решения задачи переместились расположения нагнетательных скважин. Если коэффициент сжатия начального контура был равен $\chi = 1.44$, то к концу временного интервала его значение было равно $\chi^* = 1.15$. Причем все ограничения (плановые, технологические) выполнены, а минимальное значение функционала при полученных оптимальных значениях параметров равно $J^* = 0.902$.

Отметим, что рассматривались также задачи, в которых скважины нефтяной зоны в процессе эксплуатации пласта в результате изменения состояния ВНК оказывались в водяной зоне, в дальнейшем режим работы этих скважин переходит в нагнетательный. Каких-либо особенностей в этих задачах при численных расчетах не наблюдалось.

Заключение

Приведенные в статье расчетные формулы при решении конкретных задач могут претерпеть некоторые изменения за счет выбора другого какого-либо критерия оптимальности, учета дополнительных технологических и технико-экономических ограничений или если вместо (9) будет использована другая схема аппроксимации задачи (1), (2). Но в целом предложенная в работе схема решения задачи размещения скважин и оптимального управления добычей сырья не изменится. Отметим, что если задача размещения сква-

жин, кустов скважин и выбора их режимов возникает при первичном проектировании и допроектировании месторождения, то необходимость решения задачи выбора оптимальных режимов возникает как при оперативном (диспетчерском) управлении, так и при планировании производства.

Список литературы

- [1] Данилов В.Л. Интегродифференциальные уравнения движения границы раздела жидкостей в пористой среде // Изв. Казан. филиала АН СССР. 1957. Вып. 11.
- [2] АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУЛИБАНОВ В.Н. К проблеме оптимального управления разработкой нефтяных месторождений // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 5–13.
- [3] АХМЕТЗЯНОВ А.В., КУЛИБАНОВ В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 50–58.
- [4] БУТКОВСКИЙ А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
- [5] АБДУЛЛАЕВ Ф.М., АЙДА-ЗАДЕ К.Р., КАЛАУШИН М.А. Система управления Ямбургским промыслом // Приборы и системы управления. 1990. № 2.
- [6] АЙДА-ЗАДЕ К.Р. Исследование нелинейных оптимизационных задач сетевой структуры // Автоматика и телемеханика. 1989. № 4. С. 63–71.
- [7] АЙДА-ЗАДЕ К.Р. Исследование и численное решение конечно-разностных аппроксимаций задач управления распределенными системами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1989. № 3. С. 122–130.
- [8] ЕВТУШЕНКО Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 27 августа 2004 г.