

# РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ СРЕД С НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ\*

А. С. ЛЕБЕДЕВ, М. П. ФЕДУК, О. В. ШТЫРИНА

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: [sasa@ict.nsc.ru](mailto:sasa@ict.nsc.ru), [mife@ict.nsc.ru](mailto:mife@ict.nsc.ru)

A numerical method to solve time-dependent Maxwell's equations is suggested. The method uses the finite volume approach on unstructured triangular grids. Numerical examples are given demonstrating the second order of accuracy for both homogeneous and inhomogeneous media.

## Введение

Уравнения Максвелла являются фундаментальными уравнениями математической физики и имеют широкий спектр практических приложений. Конечно-разностные методы для численного решения нестационарных уравнений Максвелла начали интенсивно развиваться после выхода в свет пионерной работы [1], в которой был предложен метод второго порядка точности по временной и пространственным переменным, основанный на введении смещенных сеток.

К настоящему времени эти методы получили значительное развитие. Обзор конечно-разностных алгоритмов и примеры их применения для многочисленных практических приложений можно найти, например, в [2–5]. Однако данные алгоритмы применимы для численного моделирования в областях относительно простой формы, в которых можно ввести ортогональную систему координат: декартову, цилиндрическую или сферическую. Вместе с тем потребности фундаментальной науки и прикладных исследований привели к необходимости использовать уравнения Максвелла для моделирования электромагнитных полей в областях со сложной геометрией границ. В этих случаях границы расчетной области не совпадают с координатными линиями, что для конечно-разностных методов приводит к потере точности при постановке граничных условий и, как следствие, к потере точности получаемых численных решений. Использование преобразования координат и решение соответствующим образом преобразованных уравнений уже не в исходной физической области, а в расчетной логической области простой формы является лишь частичным выходом из положения. Кроме того, моделируемые объекты могут обладать

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант № НШ-2314.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № NWO-РФФИ 047.016.003, № 02-01-001029).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

сложной внутренней структурой, например содержать области с различными значениями диэлектрической проницаемости, имеющие нетривиальную форму границ. Очевидно, что подобные объекты не могут быть описаны разностными сетками простой структуры.

Наиболее универсальные алгоритмы решения подобных задач получаются введением в моделируемой области неструктурированной сетки и применением метода конечных объемов или метода конечных элементов для численной дискретизации исходных уравнений Максвелла. Отметим, что к настоящему времени в литературе описаны алгоритмы для решения данной системы уравнений, основанные как на методе конечных элементов [6–8], так и методе конечных объемов [9, 10].

В настоящей работе для расчета эволюции электромагнитных полей в средах с разрывными значениями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  развит алгоритм второго порядка точности по временной и пространственным переменным, основанный на методе конечных объемов на неструктурированной треугольной сетке. Результаты тестовых расчетов подтверждают второй порядок сходимости предложенного алгоритма.

## 1. Численный алгоритм

Система уравнений Максвелла в отсутствие зарядов и токов имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - c \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей соответственно;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции;  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $\mu$  — магнитная проницаемость среды;  $c$  — скорость света.

Уравнения (1) и (2) покомпонентно в декартовой системе координат записываются следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial D_1}{\partial t} - c \left( \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} \right) = 0, \\ \frac{\partial D_2}{\partial t} - c \left( \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial D_3}{\partial t} - c \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} + c \left( \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} \right) = 0, \\ \frac{\partial B_2}{\partial t} + c \left( \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right) = 0, \\ \frac{\partial B_3}{\partial t} + c \left( \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (5)$$

Далее везде полагаем  $\mu = 1$ , т. е.  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ .

Для простоты изложения описание алгоритма дадим для двумерных уравнений в декартовой системе координат, хотя алгоритм без труда переносится на случай трех пространственных переменных. Рассмотрим временную эволюцию электромагнитных полей в

плоскости пространственных переменных  $(x_1, x_2)$ . Запишем систему уравнений Максвелла (5) в консервативной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{A}_1 \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{A}_2 \mathbf{V}) = 0 \quad (6)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{F}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{F}_2 = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{U}$  — вектор консервативных переменных;  $\mathbf{F}_1 = \tilde{A}_1 \mathbf{V}$  и  $\mathbf{F}_2 = \tilde{A}_2 \mathbf{V}$  — векторы потоков. В уравнениях (6) и (7) векторы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  связаны матрицей перехода  $\Theta = \Theta(\varepsilon)$ :  $\mathbf{V} = \Theta \mathbf{U}$ . Конкретный вид матриц  $A_1, A_2, \Theta$  и векторов  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  приводится далее при описании тестовых расчетов.

Будем считать, что в расчетной области построена сетка с треугольными ячейками  $\Delta_i$  таким образом, что если две различные ячейки пересекаются, то они имеют общую вершину или общее ребро (рис. 1).

Интегрируя уравнение (7) по треугольному элементу  $\Delta$ , получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Gamma} (n_1 \mathbf{F}_1 + n_2 \mathbf{F}_2) d\Gamma = 0, \quad (8)$$

где  $\Gamma$  — граница ячейки;  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  — внешняя нормаль.

Определим вектор  $\mathbf{U}^n$  в барицентре  $\mathbf{X}^B$  треугольного элемента, т. е. в точке пересечения медиан в момент времени  $t_n = n\tau$ , где  $\tau$  — шаг по времени. Аппроксимируя в уравнении (8) производную по времени конечной разностью, для  $i$ -й ячейки получаем уравнение

$$S_{\Delta_i} \frac{\mathbf{U}_i^{n+1} - \mathbf{U}_i^n}{\tau} + \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_k} (n_1 \mathbf{F}_1 + n_2 \mathbf{F}_2) d\Gamma = 0, \quad (9)$$

где  $S_{\Delta_i}$  — площадь ячейки.

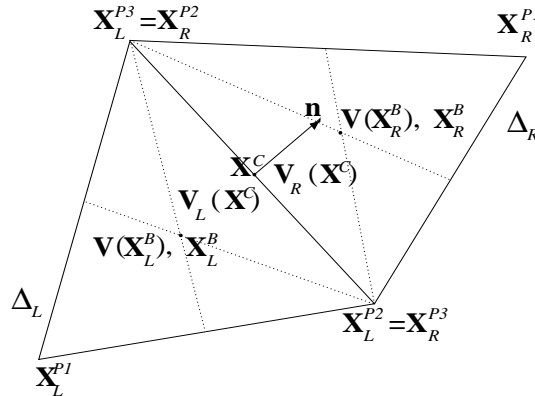


Рис. 1. Две соседние ячейки треугольной сетки  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  с барицентрами  $\mathbf{X}_L^B$  и  $\mathbf{X}_R^B$  соответственно и общей стороной, середина которой находится в точке  $\mathbf{X}^C$ , в плоской геометрии ( $\mathbf{X} = \{x_i, i = 1, 2\}$ ).

Чтобы из (9) найти  $U_i^{n+1}$ , надо вычислить интегралы по ребрам  $\Gamma_k$  треугольника  $\Delta_i$ . Эти интегралы представляют собой потоки искомых величин через ребра. Предположим, что в треугольном элементе искомые функции изменяются линейно. Тогда по значениям этих функций в барицентре треугольника и по известным (предварительно найденным) градиентам этих функций можно найти значения функций в центре ребра со стороны  $i$ -го треугольника. Аналогичным образом находим значения функций в центре ребра со стороны треугольника, находящегося по другую сторону ребра. Далее, используя значения функций по разные стороны ребра, находим потоки в центре ребра. Тогда интегралы в (9) приближенно вычисляем по формуле средних прямоугольников.

Таким образом, для решения уравнения (9) надо определить градиенты искомых функций в треугольнике и соответствующие потоки через ребра.

### 1.1. Нахождение градиентов функций в ячейке

Рассмотрим задачу нахождения градиентов компонент электромагнитных полей. Пусть  $f(\mathbf{X}^B) = f^B$  — значение функции в барицентре ячейки сетки, тогда  $f(\mathbf{X}_j^B) = f(x_1^{B_j}, x_2^{B_j}) = f_j^B$  — значение  $f$  в барицентре  $j$ -го треугольника.

Уравнение плоскости, которая проходит через точку  $(\mathbf{X}_0^B, f_0^B)$  и имеет наклон, задаваемый значениями функции  $f_j^B$ ,  $j = 1, 2, 3$  в трех не лежащих на одной прямой точках  $\mathbf{X}_j^B$ ,  $j = 1, 2, 3$ , записывается следующим образом:

$$f(\mathbf{X}) = f(x_1, x_2) = f_0^B + \alpha(x_1 - x_1^{B_0}) + \beta(x_2 - x_2^{B_0}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= -\Delta_{31}(x_2^{B_2} - x_2^{B_1}) + \Delta_{21}(x_2^{B_3} - x_2^{B_1}), \\ \beta &= \Delta_{31}(x_1^{B_2} - x_1^{B_1}) - \Delta_{21}(x_1^{B_3} - x_1^{B_1}), \\ \Delta_{21} &= \frac{f_2^B - f_1^B}{\Delta}, \quad \Delta_{31} = \frac{f_3^B - f_1^B}{\Delta}, \quad \Delta = \det \begin{pmatrix} (x_1^{B_2} - x_1^{B_1}) & (x_2^{B_2} - x_2^{B_1}) \\ (x_1^{B_3} - x_1^{B_1}) & (x_2^{B_3} - x_2^{B_1}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Предварительное вычисление коэффициентов  $\alpha, \beta$  для треугольной ячейки с координатами барицентра  $\mathbf{X}_0^B = \{x_i^{B_0}, i = 1, 2\}$  зависит от того, сколько соседей имеет эта ячейка:

1) **ячейка имеет трех соседей** (не является граничной), тогда  $\alpha, \beta$  находятся по значениям функции в барицентрах этих соседей;

2) **ячейка имеет двух соседей**, тогда  $\alpha, \beta$  находятся по значениям функции в барицентрах этих соседей и самой ячейки. В этом случае система уравнений для нахождения  $\alpha, \beta$  может оказаться вырожденной, что на практике соответствует выполнению при некотором малом  $\delta$  неравенства

$$\frac{\Delta}{\rho(\mathbf{X}_2^B - \mathbf{X}_1^B)\rho(\mathbf{X}_3^B - \mathbf{X}_1^B)} < \delta,$$

где  $\rho(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ;

3) **имеет одного соседа**, тогда в качестве  $\alpha, \beta$  берутся значения  $\alpha, \beta$  для этого соседа. Для каждого  $j$ -го треугольника по найденным  $\alpha, \beta$  вычисляются значения  $f_j(\mathbf{X}^P) = f_j^P$  в узлах сетки  $\mathbf{X}^P = \{x_i^P\}$ . В одном узле  $\mathbf{X}^P$  получаются столько значений  $f_j(\mathbf{X}^P)$ , сколько треугольников имеют данный узел в качестве одной из своих вершин. Затем величина  $f(\mathbf{X}^P)$  находится как среднее арифметическое всех этих значений.

Для окончательного определения градиентов в  $j$ -м треугольнике используется аналогичный алгоритм нахождения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  для плоскости, проходящей через  $(\mathbf{X}_j^{P^k}, f_j^{P^k})$ ,  $k = 1, 2, 3$ , где  $\mathbf{X}_j^{P^k} = \{x_i^{P^k}\}$  — вершины  $j$ -го треугольника,  $k$  — номер вершины.

## 1.2. Нахождение компонент электромагнитных полей в центре ребра

Введем в рассмотрение матрицы  $A_1 = \Theta \tilde{A}_1$  и  $A_2 = \Theta \tilde{A}_2$ . Тогда система уравнений (6) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V} = 0.$$

Обозначим через  $\mathbf{X}^B$  барицентр треугольного элемента, а через  $\mathbf{X}^C$  — центр его ребра. Тогда величину  $\mathbf{V}(\mathbf{X}^C)$  можно вычислить по следующей формуле со вторым порядком точности по времени и пространству:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}^C) = \mathbf{V}(\mathbf{X}^B) + S \cdot (\mathbf{X}^C - \mathbf{X}^B) - \frac{\tau}{2} \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V}(\mathbf{X}^B) + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V}(\mathbf{X}^B) \right),$$

где  $S = \{s_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^B} \right\}$  — матрица градиентов компонент электромагнитных полей в барицентре ячейки.

Два значения (слева и справа) электромагнитного поля в центре ребра ячейки находятся из примыкающих к этому ребру треугольников. В предложенных обозначениях они выражаются следующим образом:

$$\mathbf{V}_L(\mathbf{X}^C) = \mathbf{V}(\mathbf{X}_L^B) + S_L \cdot (\mathbf{X}^C - \mathbf{X}_L^B) - \frac{\tau}{2} \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V}(\mathbf{X}_L^B) + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V}(\mathbf{X}_L^B) \right),$$

$$\mathbf{V}_R(\mathbf{X}^C) = \mathbf{V}(\mathbf{X}_R^B) + S_R \cdot (\mathbf{X}^C - \mathbf{X}_R^B) - \frac{\tau}{2} \left( A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V}(\mathbf{X}_R^B) + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V}(\mathbf{X}_R^B) \right).$$

## 1.3. Вычисление потоков через границу ячейки

Запишем уравнение (6) в ортогональной системе координат  $(n, s)$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = n_1 \frac{\partial}{\partial n} - n_2 \frac{\partial}{\partial s},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = n_2 \frac{\partial}{\partial n} + n_1 \frac{\partial}{\partial s},$$

где  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  — вектор единичной нормали к общему ребру треугольников  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$ , направленный от треугольника  $\Delta_L$  к треугольнику  $\Delta_R$ ;  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по нормали,  $\frac{\partial}{\partial s}$  — производная по касательной.

Тогда получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \left( \tilde{A}_1 n_1 + \tilde{A}_2 n_2 \right) \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} + \left( -\tilde{A}_1 n_2 + \tilde{A}_2 n_1 \right) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{V} = 0.$$

Рассмотрим одномерную задачу Римана для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + A \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0, \quad (11)$$

где  $A = \tilde{A}_1 n_1 + \tilde{A}_2 n_2$ , и через ее решение вычислим поток сквозь границу ячейки.

Пусть  $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_L \varepsilon_R}$ . Уравнение (11) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + B \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{U} = 0, \quad B = A \Theta(\tilde{\varepsilon}).$$

Пусть  $R$  — матрица, столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $B$ . Тогда  $D = R^{-1} B R$ ,  $D = D^- + D^+$ , где  $D$  — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы  $B$ ,  $D^\pm$  — диагональные матрицы, полученные из  $D$  заменой всех отрицательных (положительных) собственных чисел нулями. Имеем

$$B = R D R^{-1} = \underbrace{R D^+ R^{-1}}_{B^+} + \underbrace{R D^- R^{-1}}_{B^-} = B^+ + B^-.$$

Для нахождения потоков будем решать систему уравнений

$$\Theta^{-1}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (B^+ + B^-) \Theta^{-1}(\tilde{\varepsilon}) \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0$$

или, вводя обозначения  $C^\pm = B^\pm \Theta^{-1}(\tilde{\varepsilon})$ ,

$$\Theta^{-1}(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + (C^+ + C^-) \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0.$$

Таким образом, поток вектора  $\mathbf{U}$  через общее ребро треугольников  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$  (см. рис. 1) равен  $\mathbf{F}_L = C^+ \mathbf{V}_L(\mathbf{X}^C) + C^- \mathbf{V}_R(\mathbf{X}^C)$ .

Из уравнения (9) получаем

$$\mathbf{U}_L^{n+1} = \mathbf{U}_L^n - \frac{\tau}{S_{\Delta_L}} \sum_{k=1}^3 l_{\Delta_L}^k \mathbf{F}_L^k,$$

$$\mathbf{U}_R^{n+1} = \mathbf{U}_R^n + \frac{\tau}{S_{\Delta_R}} \sum_{k=1}^3 l_{\Delta_R}^k \mathbf{F}_R^k$$

или

$$\mathbf{V}_L^{n+1} = \mathbf{V}_L^n - \frac{\tau}{S_{\Delta_L}} \Theta(\varepsilon_L) \sum_{k=1}^3 l_{\Delta_L}^k \mathbf{F}_L^k,$$

$$\mathbf{V}_R^{n+1} = \mathbf{V}_R^n + \frac{\tau}{S_{\Delta_R}} \Theta(\varepsilon_R) \sum_{k=1}^3 l_{\Delta_R}^k \mathbf{F}_R^k,$$

где  $S_{\Delta_L}$  и  $S_{\Delta_R}$  — площади треугольников  $\Delta_L$  и  $\Delta_R$  соответственно;  $\tau$  — шаг по времени;  $l_{\Delta_L}^k$  и  $l_{\Delta_R}^k$  — длины ребер с номером  $k$  (локальная нумерация по  $k$  независимая);  $\mathbf{F}_L^k$  и  $\mathbf{F}_R^k$  — потоки через ребра с номером  $k$ .

## 2. Результаты тестовых расчетов

Приведем результаты тестовых расчетов, выполненных с помощью описанного выше численного алгоритма.

**Тест 1.** Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в плоскости  $(x_1, x_2)$  по однородной среде со значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon = 1$  и  $E_3 = H_1 = H_2 = 0$  (так называемая  $TE$ -волна). В этом случае исходная система уравнений (5) в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial t} - \frac{\partial H_3}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\partial H_3}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial H_3}{\partial t} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Система (12) принимает консервативный вид для вектора

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица перехода

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перепишем систему (12) в матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V} = 0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одномерную задачу Римана для нахождения потоков будем решать для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_2 \\ 0 & 0 & n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы

$$C^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_2^2 & -n_1 n_2 & -n_2 \\ -n_1 n_2 & n_1^2 & n_1 \\ -n_2 & n_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -n_2^2 & n_1 n_2 & -n_2 \\ n_1 n_2 & -n_1^2 & n_1 \\ -n_2 & n_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда поток из  $L$ -треугольника в  $R$ -треугольник равен

$$\mathbf{F}_L = C^+ \mathbf{V}_L(\mathbf{X}^C) + C^- \mathbf{V}_R(\mathbf{X}^C).$$

Система уравнений (12) имеет аналитическое решение:

$$E_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha x_2) \cos(\beta x_1 - \omega t); \quad (13)$$

$$E_2 = \cos(\alpha x_2) \sin(\beta x_1 - \omega t); \quad (14)$$

$$H_3 = \frac{\omega}{\beta} \cos(\alpha x_2) \sin(\beta x_1 - \omega t), \quad (15)$$

где  $\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2$ ,  $\alpha = \beta = \pi$ .

Тестовые расчеты проводились в областях различной формы: квадрате, круге, пятиугольнике, а также в многосвязной области (квадрате с вырезом внутри). Примеры сеток, построенных в единичном квадрате, показаны на рис. 2. Треугольная сетка на рис. 2, *a*, которую мы далее будем называть регулярной, строится в области прямоугольной формы

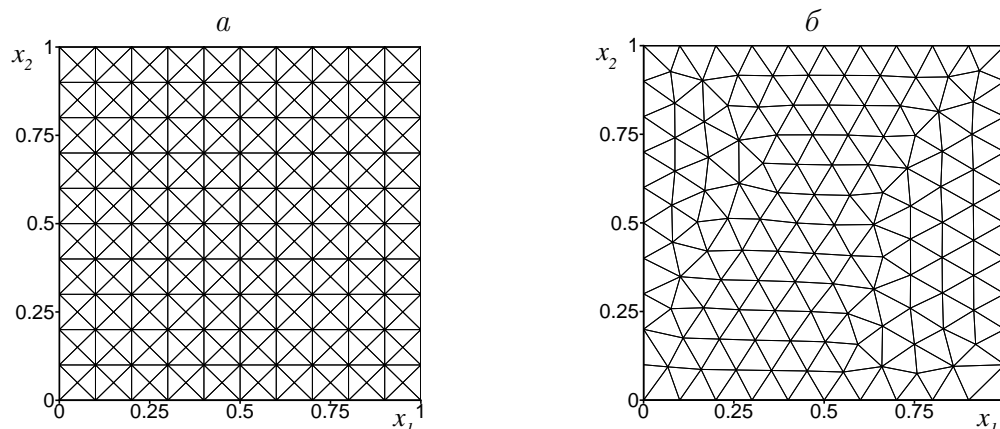


Рис. 2. Расчетная область покрыта регулярной (*a*) и нерегулярной (*б*) треугольными сетками с 10 ячейками вдоль одного ребра единичного квадрата.

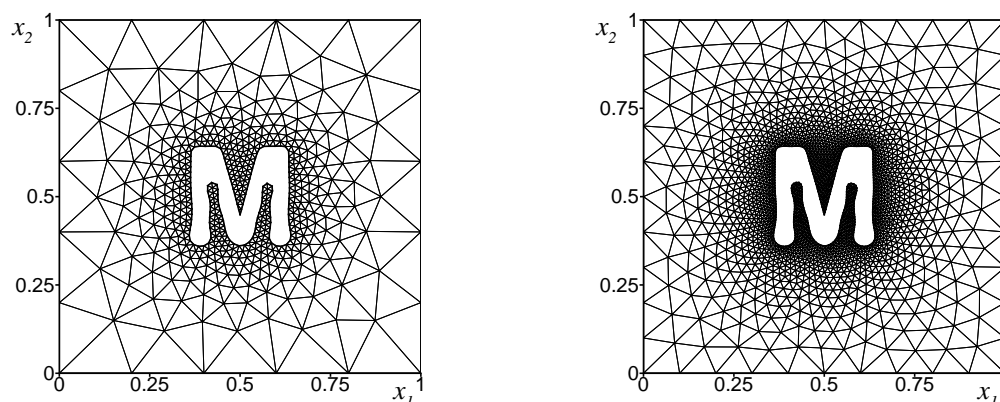


Рис. 3. Сетка в многосвязной области с 5 ребрами вдоль каждой стороны единичного квадрата (934 ячейки во всей области).

Рис. 4. Сетка в многосвязной области с 10 ребрами вдоль каждой стороны единичного квадрата (3784 ячейки во всей области).



путем деления этой области на прямоугольные ячейки с последующим разбиением каждой ячейки на четыре треугольных элемента.

В общем случае для областей сложной формы применялся разработанный авторами алгоритм триангуляции, итерационным образом строящий сетку внутри области по заданным на ее границе узлам. Примеры сеток с плавно изменяющимся размером ячеек для квадрата с вырезом показаны на рис. 3, 4.

Расчеты в области с вырезом проводились на последовательности из четырех сеток, содержащих 934, 3784, 14915 и 57072 ячеек. На рис. 5 показаны изолинии первой компоненты электрического поля  $E_1$  после трех периодов, полученные по схеме первого порядка на трех различных сетках, содержащих 934, 3784 и 14915 ячеек ( $a$  —  $в$  соответственно). Аналогичные результаты, полученные по схеме второго порядка, показаны на рис. 6. Из этих рисунков видно качественное превосходство схемы второго порядка.

Как следует из рис. 5, 6, данный алгоритм позволяет выполнять расчеты в областях произвольной формы, в том числе многосвязных.

Для оценки отклонения численного решения от аналитического введем величину ин-

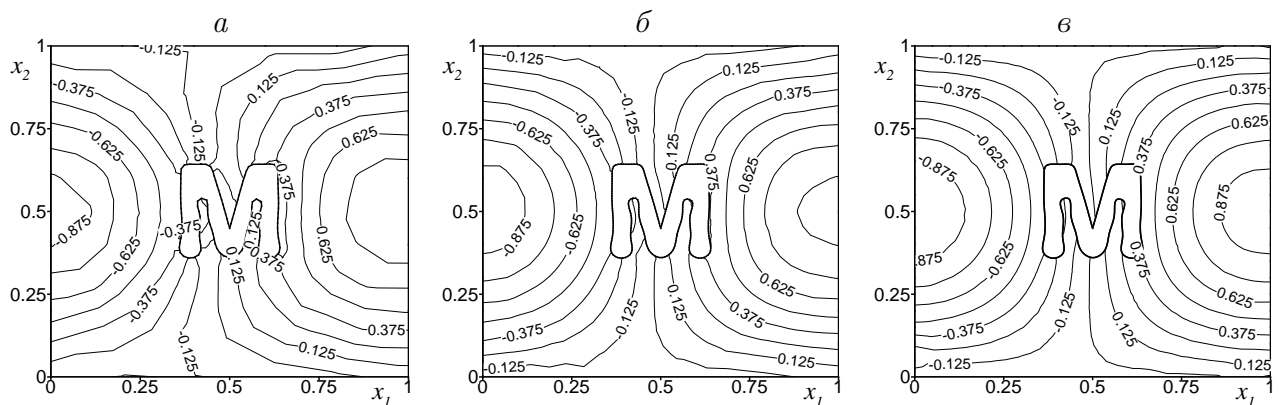


Рис. 5. Изолинии первой компоненты напряженности электрического поля  $E_1$  после трех периодов распространения, полученные по схеме первого порядка на трех различных сетках:  $a$  — 934 ячейки,  $б$  — 3784 ячейки,  $в$  — 14915 ячеек.

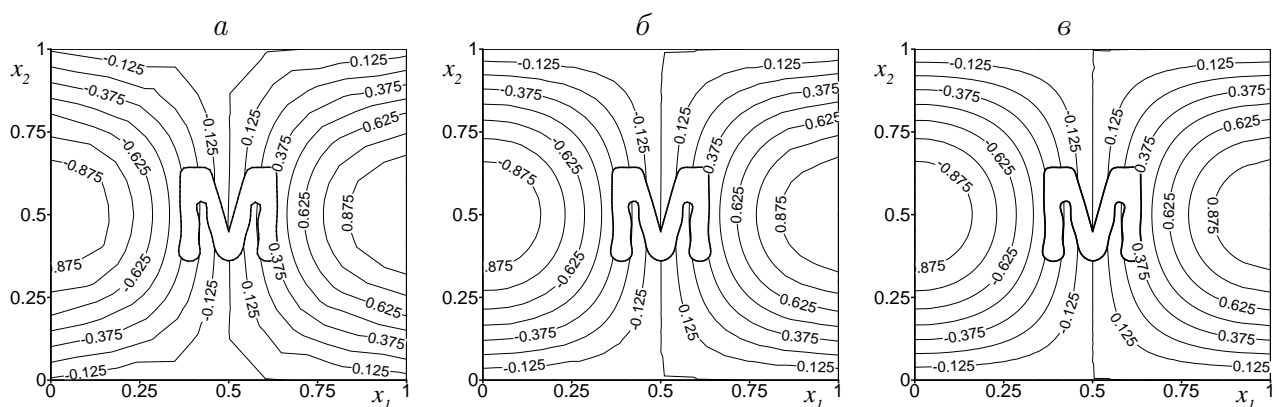


Рис. 6. Изолинии первой компоненты напряженности электрического поля  $E_1$  после трех периодов распространения, полученные по схеме второго порядка на трех различных сетках:  $a$  — 934 ячейки,  $б$  — 3784 ячейки,  $в$  — 14915 ячеек.

тегральной погрешности  $\delta$  в пространстве  $L_2$  в момент времени  $t^n = n\tau$ :

$$\delta = \frac{\|\mathbf{V}_{num}^n(\mathbf{X}^B) - \mathbf{V}_{ana}^n(\mathbf{X}^B)\|_{L_2}}{\|\mathbf{V}_{ana}^n(\mathbf{X}^B)\|_{L_2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^T \left[ (u_1^n(\mathbf{X}_i^B) - E_1^n(\mathbf{X}_i^B))^2 + (u_2^n(\mathbf{X}_i^B) - E_2^n(\mathbf{X}_i^B))^2 + (u_3^n(\mathbf{X}_i^B) - H_3^n(\mathbf{X}_i^B))^2 \right] \cdot S_{\Delta_i}}{\sum_{i=1}^T \left[ (E_1^n(\mathbf{X}_i^B))^2 + (E_2^n(\mathbf{X}_i^B))^2 + (H_3^n(\mathbf{X}_i^B))^2 \right] \cdot S_{\Delta_i}}},$$

где  $T$  — общее количество треугольных ячеек в вычислительной области;  $\mathbf{V}_{num}^n(\mathbf{X}^B)$  и  $\mathbf{V}_{ana}^n(\mathbf{X}^B)$  — вычисленные и точные (см. уравнения (13)–(15)) значения электромагнитных полей в барицентре ячейки соответственно. В табл. 1 показаны максимальные  $L_2$ -погрешности  $\delta$  для различных вычислительных схем и расчетных сеток.

На рис. 7 показана эволюция ошибки  $\delta$  по норме  $L_2$  на последовательности измельчающихся сеток в квадратной области. Видно, что схема с нулевыми градиентами дает первый порядок точности, тогда как схема с линейной аппроксимацией искомых функций из барицентров элементов обеспечивает второй порядок точности по пространственной переменной. Аналогичные данные для многосвязной области представлены на рис. 8.

**Тест 2.** В качестве второго теста рассмотрим распространение  $TM$ -волны в среде с разрывным значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \varepsilon(x_1) = \begin{cases} 4 & \text{при } |x_1| \leq 0.5, \\ 1 & \text{при } |x_1| > 0.5. \end{cases}$$

Область, в которой проводились расчеты, показана на рис. 9.

Т а б л и ц а 1

Максимальные вычислительные  $L_2$ -погрешности  $\delta$  в расчете  $TE$ -волны  
в однородной среде в декартовых координатах

Тип сетки	Тип области	Число треугольников по внешней границе	$\delta$ (нулевые градиенты)	$\delta$ (линейная аппроксимация градиентов)
Нерегулярная	Односвязная	$10 \times 4$	0.1339	0.008995
		$20 \times 4$	0.07153	0.002270
		$40 \times 4$	0.03694	0.000571
		$80 \times 4$	0.018855	0.000144
		$160 \times 4$	0.00953	0.00002038
	Многосвязная	$5 \times 4$	0.179808	0.0217624
		$10 \times 4$	0.095329	0.0052643
		$20 \times 4$	0.0498402	0.0014573
		$40 \times 4$	0.025615	0.0003555
Регулярная	Односвязная	$16 \times 4$	0.072144	0.002047
		$32 \times 4$	0.037155	0.00051
		$64 \times 4$	0.018876	0.0001274
		$128 \times 4$	0.00952	0.00003184
		$256 \times 4$	0.00478	0.00000796

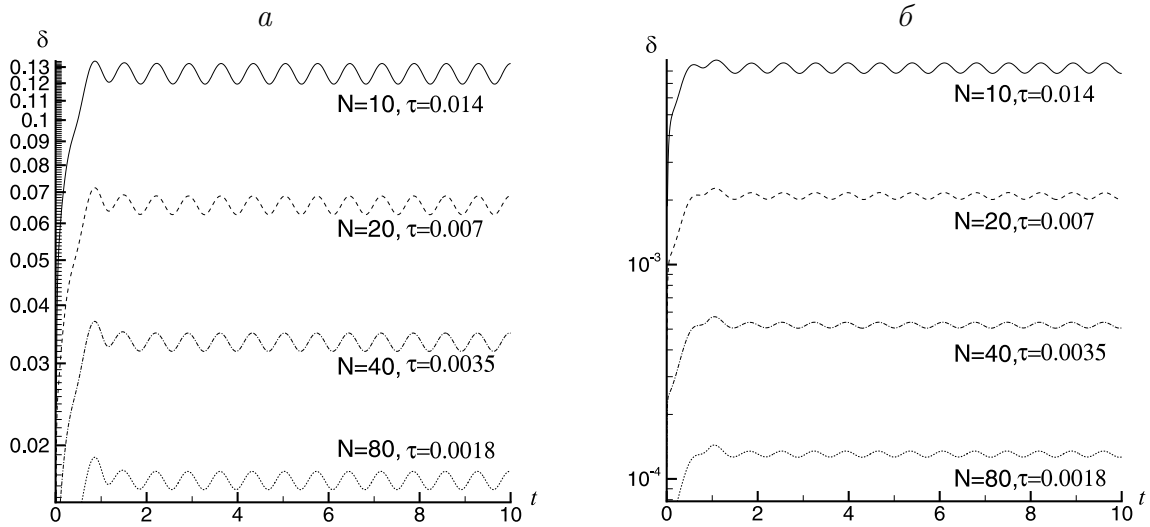


Рис. 7. Эволюция  $L_2$ -погрешности в расчете  $TE$ -волны на последовательности нерегулярных треугольных сеток:  $a$  — нулевые градиенты, квадрат;  $b$  — линейная аппроксимация градиентов, квадрат.

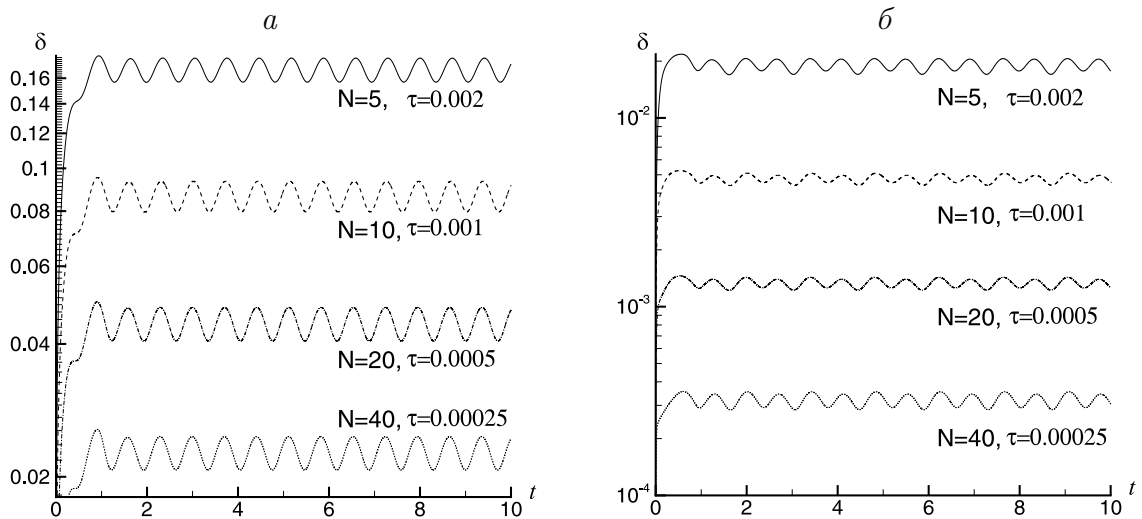


Рис. 8. Эволюция  $L_2$ -погрешности в расчете  $TE$ -волны на последовательности нерегулярных треугольных сеток:  $a$  — нулевые градиенты, квадрат с вырезом;  $b$  — линейная аппроксимация градиентов, квадрат с вырезом.

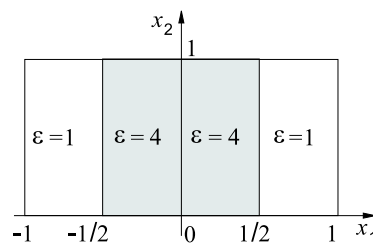


Рис. 9. Расчетная область распространения  $TM$ -волны в среде с плоским диэлектрическим слоем.

В случае  $TM$ -волны  $E_1 = E_2 = H_3 = 0$ , исходная система уравнений (6) в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial D_3}{\partial t} + \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_1} = 0, \\ \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial H_2}{\partial t} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Векторы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  и матрица перехода  $\Theta(\varepsilon)$  равны:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} D_3 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} E_3 \\ H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему (16) в матричном виде относительно вектора  $\mathbf{V}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} + A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{V} + A_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{V} = 0,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одномерную задачу Римана для нахождения потоков будем решать для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + A \frac{\partial}{\partial n} \mathbf{V} = 0$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & n_2 & -n_1 \\ n_2 & 0 & 0 \\ -n_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицы

$$C^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & n_2 & -n_1 \\ n_2 & \frac{n_2^2}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{n_1 n_2}{\sqrt{\varepsilon}} \\ -n_1 & -\frac{n_1 n_2}{\sqrt{\varepsilon}} & \frac{n_1^2}{\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}, \quad C^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{\varepsilon} & n_2 & -n_1 \\ n_2 & -\frac{n_2^2}{\sqrt{\varepsilon}} & \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\varepsilon}} \\ -n_1 & \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\varepsilon}} & -\frac{n_1^2}{\sqrt{\varepsilon}} \end{pmatrix}.$$

Поток из  $L$ -треугольника в  $R$ -треугольник равен  $\mathbf{F}_L = C^+ \mathbf{V}_L(\mathbf{X}^C) + C^- \mathbf{V}_R(\mathbf{X}^C)$ .

Система уравнений (16) имеет следующее аналитическое решение:

$$E_3 = \begin{cases} 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_1\right) \sin(K_y x_2) \cos(\omega t), & \text{где } |x_1| \leq \frac{1}{2}, x_2 \geq 0, \\ \exp\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}(1 - 2|x_1|)\right) \sin(K_y x_2) \cos(\omega t), & \text{где } |x_1| > \frac{1}{2}, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

Т а б л и ц а 2

Максимальные вычислительные  $L_2$ -погрешности  $\delta$  в расчете  $TM$ -волны в среде с плоским диэлектрическим слоем в декартовых координатах

Тип сетки	Число треугольников по внешней границе	$\delta$ (нулевые градиенты)	$\delta$ (линейная аппроксимация градиентов)
Нерегулярная	$16 \times 6$	0.21503	0.0145
	$32 \times 6$	0.1171	0.00374
	$64 \times 6$	0.06084	0.000943
	$128 \times 6$	0.0313	0.000256
Регулярная	$16 \times 6$	0.185	0.00791
	$32 \times 6$	0.0989	0.00200
	$64 \times 6$	0.0512439	0.000502
	$128 \times 6$	0.0262	0.000126

$$H_1 = \begin{cases} -\frac{2K_y}{\omega} \cos\left(\frac{2\pi}{3}x_1\right) \cos(K_y x_2) \sin(\omega t), & \text{где } |x_1| \leq \frac{1}{2}, x_2 \geq 0, \\ -\frac{K_y}{\omega} \exp\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}(1-2|x_1|)\right) \cos(K_y x_2) \sin(\omega t), & \text{где } |x_1| > \frac{1}{2}, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$H_2 = \begin{cases} -\frac{4\pi}{3\omega} \sin\left(\frac{2\pi}{3}x_1\right) \sin(K_y x_2) \sin(\omega t), & \text{где } |x_1| \leq \frac{1}{2}, x_2 \geq 0, \\ -\frac{2\sqrt{3}\pi}{3\omega} \frac{d|x_1|}{dx_1} \exp\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{3}(1-2|x_1|)\right) \sin(K_y x_2) \sin(\omega t), & \text{где } |x_1| > \frac{1}{2}, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Здесь  $K_y = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{13}{3}}$ ,  $\omega = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ .

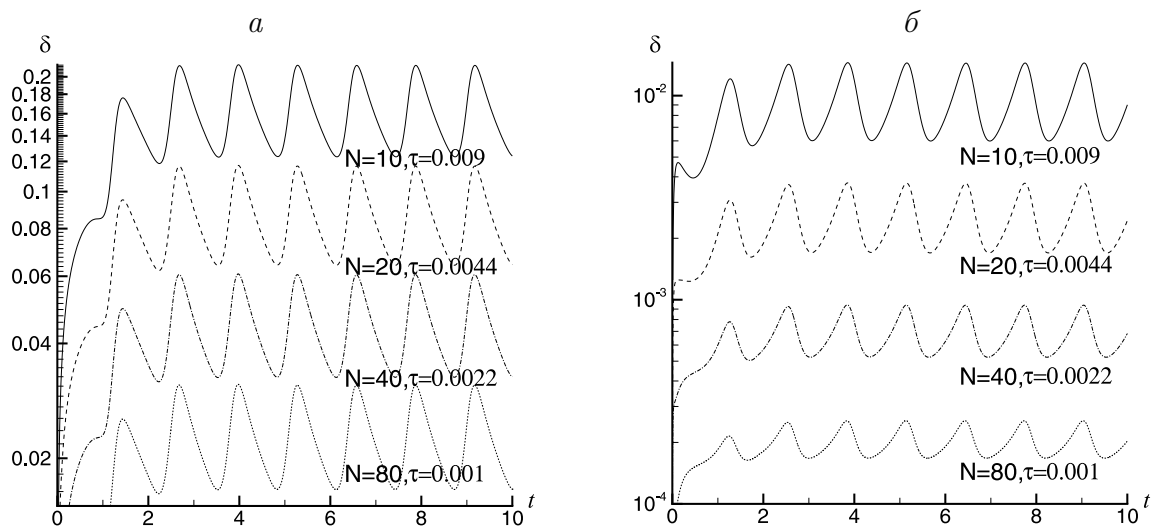


Рис. 10. Эволюция  $L_2$ -погрешности в расчете  $TM$ -волны на последовательности нерегулярных треугольных сеток:  $a$  — нулевые градиенты;  $b$  — линейная аппроксимация градиентов.

В табл. 2 показаны максимальные  $L_2$ -погрешности  $\delta$ , полученные для алгоритмов первого и второго порядков и различных расчетных сеток.

Эволюция ошибки  $\delta$  по норме  $L_2$  для различных сеток показана на рис. 10. Видно, что, как и в предыдущем случае, линейная аппроксимация функций из барицентров треугольных элементов дает алгоритм второго порядка точности.

## Заключение

В статье развит алгоритм численного решения уравнений Максвелла в средах с разрывным значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ , основанный на методе конечных объемов на неструктурированной сетке. Результаты тестовых расчетов по распространению  $TE$ - и  $TM$ -волн подтверждают второй порядок сходимости предложенного алгоритма. Данный подход допускает относительно простое обобщение на осесимметричный и трехмерный случаи.

## Список литературы

- [1] YEE K.S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // IEEE Trans. Antennas and Propagat. 1966. Vol. 17. P. 585–589.
- [2] TAFLOVE A. Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method. Boston: Artech House, 1995.
- [3] ADVANCES in Computational Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method / A. Taflove (Ed.). Boston: Artech House, 1998.
- [4] COMPUTATIONAL Electrodynamics. The Finite-Difference Time-Domain Method / A. Taflove, S.C. Hagness (Eds.). Boston: Artech House, 2000.
- [5] SULLIVAN D.M. Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method. N. Y.: IEEE Press, 2000.
- [6] ASSOUS F., DEGOND P., SEGRE J. Numerical approximation of the Maxwell equations in inhomogeneous media by p1 conforming finite element method // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 128. P. 363–380.
- [7] HIPTMAIR R. Finite elements in computational electromagnetism // Acta Numerica. 2002. P. 237–330.
- [8] ZIMING CHEN, QIANG DU, JUN ZOU. Finite element methods with matching and nonmatching meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients // SIAM J. Numer. Anal. 2000. Vol. 37. P. 1542–1570.
- [9] HERMELINE F. Two coupled particle-finite volume methods using Delaunay — Voronoi meshes for the approximation of Vlasov — Poisson and Vlasov — Maxwell equations // J. Comput. Phys. 1993. Vol. 106. P. 1–18.
- [10] CIONI J.-P., FEZOU L., ISSAUTIER D. High order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations // La Recherche Aérospatiale. 1994. N 5. P. 319–328.

*Поступила в редакцию 26 августа 2004 г.,  
в переработанном виде — 16 ноября 2004 г.*