

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ БАССЕЙНА РЕКИ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ*

И. Е. Полосков

Пермский государственный университет, Россия

e-mail: Igor.Poloskov@psu.ru

A problem of estimation of the characteristics of river water pollution on the basis of stochastic differential equations with multiple delays is considered. Equations for the first moments of random pollution characteristics are derived and solved. Analytical and numerical computations as well as the presentation of results are implemented using the Mathematica package.

Введение

Проблема охраны окружающей среды является одной из важнейших в науке. Интенсивное развитие промышленности и связанное с этим увеличение промышленных выбросов, загрязняющих окружающую среду, уже стали ощутимыми для экологического равновесия во многих регионах страны и мира. Индустриальные выбросы приводят к угнетению жизни растительного и животного мира (птиц, рыб, насекомых, полезных бактерий и др.) [1]. Проблемы окружающей среды, причинами которых являются рост объема загрязнений, сбрасываемых в естественные водные бассейны, разливы нефти, требуют быстрой реакции с целью предотвращения дальнейшего ухудшения качества воды и загрязнения подземных вод и водоносных слоев. В частности, актуальна проблема сохранения качества воды, особенно острая в отношении водоемов с замедленным водообменом [2]. Запасы воды ухудшаются в результате смыва химических удобрений и ядохимикатов с водосборной площади, загрязнения поверхностных вод высокотоксичными тяжелыми металлами, миграции радионуклеидов в малых концентрациях со скоростью воды, закисления озер, загрязнения поверхностных и подземных вод выщелачивающей жидкостью из-за наличия большого числа свалок, высокой физико-химической и биохимической активности и токсичности твердых отходов и т. п. Полностью исключить эти сбросы в естественные и искусственные водоемы при современном развитии техники не представляется возможным, поскольку создание новых изделий и материалов и постоянное изменение технологии опережают совершенствование и развитие методов очистки. Поэтому необходимость использования

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-96031) и Министерства образования (грант № Е02-1.0-151).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

водоемов и водостоков в качестве естественной буферной системы для разбавления, самоочищения и нейтрализации вредных отходов сохранится длительное время.

При эксплуатации водоемов [2] для приема сточных вод используется самоочищающая способность водоемов, включающая физическую (перенос, перемешивание и разбавление), химическую (нейтрализация) и биологическую переработку сбрасываемых сточных и возвратных вод. Неблагоприятное воздействие сбросов сточных вод усугубляется тем, что водоем в целом представляет единую гидродинамическую и экологическую систему, отдельные части и районы которой тесно связаны между собой. Эти связи, достаточно сложные для любого крупного водоема, еще более сложны для каскадов водоемов.

В настоящее время при рассмотрении таких сложных процессов, как течение рек, принято выделять детерминированную и вероятностную составляющие [2]. Детерминированная составляющая полностью определяется гидродинамическими законами и гидрологией водоемов; вероятностная составляющая является результатом наложения случайных факторов и может быть оценена лишь путем статистической обработки массового материала наблюдений. При этом стохастические модели уже давно являются рабочим инструментом в задачах гидрологии [2–7].

При стационарном протекании транзитного потока струя сточной жидкости, поступая в него, распространяется по течению, постоянно перемешиваясь и разбавляясь в результате турбулентной диффузии [2]. Характерная особенность турбулентных движений — наличие пульсации гидродинамических величин потока, беспорядочных по своей природе [1]. Важной задачей является оценка вероятностных характеристик [8, 9] потока, которая может быть получена при использовании различных моделей переноса загрязнений, в том числе с учетом запаздывания.

1. Стохастические дифференциальные уравнения с кратными запаздываниями

Рассматривается система стохастических дифференциально-разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) = & \vec{f}_\nu(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - \nu\tau), t) + \\ & + G_\nu(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - \nu\tau), t) \vec{\xi}(t), \quad t > t_\nu = t_0 + \nu\tau. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь τ — постоянное запаздывание; $\nu > 0$ — целое; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор; $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых гауссовых шумов с единичными интенсивностями; $f_\nu(\cdot, \cdot) = \{f_{\nu i}(\cdot, \cdot)\}^T : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — детерминированная вектор-функция; $G_\nu(\cdot, \cdot) = \{g_{\nu ij}(\cdot, \cdot)\} : \mathbb{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ — детерминированная матрица-функция; T — символ транспонирования.

Предположим, что на полуинтервалах $(t_0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, ..., $(t_{\nu-1}, t_\nu]$ фазовый вектор $\vec{x}(t)$, характеризуемый одноточечной плотностью вероятности $p(\vec{x}, t)$, удовлетворяет системам

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}_0(\vec{x}(t), t) + G_0(\vec{x}(t), t) \vec{\xi}(t); \quad (1.2_0)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}_1(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), t) + G_1(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), t) \vec{\xi}(t); \quad (1.2_1)$$

...

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}_{\nu-1}(\vec{x}(t), \vec{x}(t - \tau), \vec{x}(t - 2\tau), \dots, \vec{x}(t - (\nu - 1)\tau), t) +$$

$$+G_{\nu-1}(\vec{x}(t), \vec{x}(t-\tau), \vec{x}(t-2\tau), \dots, \vec{x}(t-(\nu-1)\tau), t) \vec{\xi}(t), \quad (1.2_{\nu-1})$$

$$\vec{f}_q = \{f_{qi}\}^T, \quad G_q = \{g_{qij}\}, \quad q = 1, 2, \dots, \nu - 1$$

стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Предположим, что при $t = t_0$ плотность вероятности \vec{x} равна $p(\vec{x}, t_0) = \bar{p}^0(\vec{x})$.

Для систем уравнений (1.1) и (1.2_q) мы определяем их специальные случаи как линейные системы:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}(t) &= P_0(t)\vec{x}(t) + \vec{c}_0(t) + R_0(t)\vec{\xi}(t), \\ \dot{\vec{x}}(t) &= P_1(t)\vec{x}(t) + Q_{11}(t)\vec{x}(t-\tau) + \vec{c}_1(t) + R_1(t)\vec{\xi}(t), \\ &\dots \\ \dot{\vec{x}}(t) &= P_\nu(t)\vec{x}(t) + Q_{\nu 1}(t)\vec{x}(t-\tau) + Q_{\nu 2}(t)\vec{x}(t-2\tau) + \dots + \\ &\quad + Q_{\nu\nu}(t)\vec{x}(t-\nu\tau) + \vec{c}_\nu(t) + R_\nu(t)\vec{\xi}(t), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $P_q(t)$, $Q_{qr}(t)$, $R_q(t)$, $\vec{c}_q(t)$ ($q = 0, 1, 2, \dots, \nu$, $r = 1, 2, \dots, q$) — любые заданные матрицы-функции и вектор-функции.

Если посмотреть на уравнения (1.1)–(1.3) с точки зрения общей теории случайных процессов, можно сделать вывод о том, что вследствие запаздывания случайные векторы \vec{x} — решения этих уравнений — не являются марковскими векторными случайными процессами, а следовательно, для получения статистических характеристик векторов \vec{x} (математических ожиданий, ковариаций и др.) не может быть применен хорошо известный аналитический аппарат теории марковских процессов [9], основанный на использовании уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК-уравнения) для (переходной) плотности вероятности распределения фазового вектора нелинейной динамической системы.

С другой стороны, естественными выглядят попытки построения на основе уравнений (1.1)–(1.3) иных математических моделей явлений, описываемых данными уравнениями, моделей, более удобных для дальнейших исследований.

Путь, выбранный в настоящей работе, состоит в следующем. Для того чтобы изучить случайное изменение вектора $\vec{x}(t)$ при значениях времени $t > t_0$ посредством преобразования немарковского векторного процесса в марковский, мы расширяем фазовое пространство системы. В процессе реализации этой процедуры вводим обозначения

$$\begin{aligned} s \in [0, \tau], \quad t_q = t_0 + q \cdot \tau, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \quad \vec{x}_q(s) = \vec{x}(s + t_q), \\ \vec{\xi}_q(s) = \vec{\xi}(s + t_q), \quad p_q(\vec{x}_q, s) = p(\vec{x}_q, s + t_q), \quad p_0(\vec{x}_0, 0) = \bar{p}^0(\vec{x}_0), \\ \Delta_q = [t_{q-1}, t_q], \quad \vec{z}_0 = \vec{x}_0, \quad \vec{z}_1 = \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1), \quad \vec{z}_2 = \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2), \dots, \\ \vec{y}_q \equiv \vec{x}_q(0) = \vec{x}_{q-1}(\tau), \quad \vec{\xi}_q(0) = \vec{\xi}_{q-1}(\tau), \quad p_q(\vec{x}_q, 0) = p_{q-1}(\vec{x}_q, \tau), \\ \text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots) = \{x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots\}^T \end{aligned} \quad (1.4)$$

и рассматриваем последовательность отрезков Δ_q .

1. Начнем с Δ_0 . Определенный на отрезке Δ_0 случайный вектор $\vec{x}_0(s)$ удовлетворяет системе СДУ (точкой здесь и далее обозначена производная по переменной s)

$$\dot{\vec{x}}_0(s) = \vec{f}_0(\vec{x}_0(s), s + t_0) + G_0(\vec{x}_0(s), s + t_0)\vec{\xi}_0(s)$$

или

$$\dot{\vec{x}}_0(s) = P_0(s + t_0)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_0(s + t_0) + R_0(s + t_0)\vec{\xi}_0(s).$$

2. Проанализируем поведение системы на отрезках Δ_0 и Δ_1 . Стохастические дифференциальные уравнения для вычисления вектора $\text{col}(\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_0(s) &= \vec{f}_0(\vec{x}_0(s), s + t_0) + G_0(\vec{x}_0(s), s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\ \dot{\vec{x}}_1(s) &= \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1) + G(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1)\vec{\xi}_1(s)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_0(s) &= P_0(s + t_0)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_0(s + t_0) + R_0(s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\ \dot{\vec{x}}_1(s) &= P_1(s + t_1)\vec{x}_1(s) + Q_{11}(s + t_1)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_1(s + t_1) + R_1(s + t_1)\vec{\xi}_1(s).\end{aligned}$$

...

3. Рассмотрим временные отрезки $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_\nu$. Построим систему СДУ для вектора \vec{z}_ν в виде

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_0(s) &= \vec{f}_0(\vec{x}_0(s), s + t_0) + G_0(\vec{x}_0(s), s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\ \dot{\vec{x}}_1(s) &= \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1) + G_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1)\vec{\xi}_1(s),\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_{\nu-1}(s) &= \vec{f}_{\nu-1}(\vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_{\nu-1}) + \\ &+ G_{\nu-1}(\vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_{\nu-1})\vec{\xi}_{\nu-1}(s), \\ \dot{\vec{x}}_\nu(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_\nu) + G_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_\nu)\vec{\xi}_\nu(s)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_0(s) &= P_0(s + t_0)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_0(s + t_0) + R_0(s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\ \dot{\vec{x}}_1(s) &= P_1(s + t_1)\vec{x}_1(s) + Q_{11}(s + t_1)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_1(s + t_1) + R_1(s + t_1)\vec{\xi}_1(s), \\ &\dots \\ \dot{\vec{x}}_{\nu-1}(s) &= P_{\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_{\nu-1}(s) + Q_{\nu-1,1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_{\nu-2}(s) + \dots + Q_{\nu-1,\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_0(s) + \\ &+ \vec{c}_{\nu-1}(s + t_{\nu-1}) + R_{\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{\xi}_{\nu-1}(s), \\ \dot{\vec{x}}_\nu(s) &= P_\nu(s + t_\nu)\vec{x}_\nu(s) + Q_{\nu 1}(s + t_\nu)\vec{x}_{\nu-1}(s) + \dots + Q_{\nu\nu}(s + t_\nu)\vec{x}_0(s) + \\ &+ \vec{c}_\nu(s + t_\nu) + R_\nu(s + t_\nu)\vec{\xi}_\nu(s).\end{aligned}$$

...

4. Рассмотрим временные отрезки $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_N$. Построим систему СДУ для вектора \vec{z}_N в виде

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_0(s) &= \vec{f}_0(\vec{x}_0(s), s + t_0) + G_0(\vec{x}_0(s), s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\ \dot{\vec{x}}_1(s) &= \vec{f}_1(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1) + G(\vec{x}_1(s), \vec{x}_0(s), s + t_1)\vec{\xi}_1(s),\end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_{\nu-1}(s) &= \vec{f}_{\nu-1}(\vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_{\nu-1}) + \\ &+ G_{\nu-1}(\vec{x}_{\nu-1}(s), \vec{x}_{\nu-2}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_{\nu-1})\vec{\xi}_{\nu-1}(s), \\ \dot{\vec{x}}_\nu(s) &= \vec{f}_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_\nu) + G_\nu(\vec{x}_\nu(s), \vec{x}_{\nu-1}(s), \dots, \vec{x}_0(s), s + t_\nu)\vec{\xi}_\nu(s), \\ \dot{\vec{x}}_{\nu+1}(s) &= \vec{f}_{\nu+1}(\vec{x}_{\nu+1}(s), \vec{x}_\nu(s), \dots, \vec{x}_1(s), s + t_{\nu+1}) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+G_\nu(\vec{x}_{\nu+1}(s), \vec{x}_\nu(s), \dots, \vec{x}_1(s), s + t_{\nu+1})\vec{\xi}_{\nu+1}(s), \\
 &\quad \dots \\
 &\dot{\vec{x}}_{N-1}(s) = \vec{f}_\nu(\vec{x}_{N-1}(s), \vec{x}_{N-2}(s), \dots, \vec{x}_{N-\nu-1}, s + t_{N-1})+ \\
 &+G_\nu(\vec{x}_{N-1}(s), \vec{x}_{N-2}(s), \dots, \vec{x}_{N-\nu-1}(s), s + t_{N-1})\vec{\xi}_{N-1}(s), \\
 &\dot{\vec{x}}_N(s) = \vec{f}_\nu(\vec{x}_N(s), \vec{x}_{N-1}(s), \dots, \vec{x}_{N-\nu}(s), s + t_N)+ \\
 &+G(\vec{x}_N(s), \vec{x}_{N-1}(s), \dots, \vec{x}_{N-\nu}(s), s + t_N)\vec{\xi}_N(s)
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{x}}_0(s) &= P_0(s + t_0)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_0(s + t_0) + R_0(s + t_0)\vec{\xi}_0(s), \\
 \dot{\vec{x}}_1(s) &= P_1(s + t_1)\vec{x}_1(s) + Q_{11}(s + t_1)\vec{x}_0(s) + \vec{c}_1(s + t_1) + R_1(s + t_1)\vec{\xi}_1(s), \\
 &\quad \dots \\
 \dot{\vec{x}}_{\nu-1}(s) &= P_{\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_{\nu-1}(s) + Q_{\nu-1,1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_{\nu-2}(s) + \dots + Q_{\nu-1,\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{x}_0(s) + \\
 &\quad + \vec{c}_{\nu-1}(s + t_{\nu-1}) + R_{\nu-1}(s + t_{\nu-1})\vec{\xi}_{\nu-1}(s), \\
 \dot{\vec{x}}_\nu(s) &= P_\nu(s + t_\nu)\vec{x}_\nu(s) + Q_{\nu 1}(s + t_\nu)\vec{x}_{\nu-1}(s) + \dots + Q_{\nu\nu}(s + t_\nu)\vec{x}_0(s) + \\
 &\quad + \vec{c}_\nu(s + t_\nu) + R_\nu(s + t_\nu)\vec{\xi}_\nu(s), \\
 \dot{\vec{x}}_{\nu+1}(s) &= P_\nu(s + t_{\nu+1})\vec{x}_{\nu+1}(s) + Q_{\nu 1}(s + t_{\nu+1})\vec{x}_\nu(s) + \dots + Q_{\nu\nu}(s + t_{\nu+1})\vec{x}_1(s) + \\
 &\quad + \vec{c}_\nu(s + t_{\nu+1}) + R_\nu(s + t_{\nu+1})\vec{\xi}_{\nu+1}(s), \\
 &\quad \dots \\
 \dot{\vec{x}}_N(s) &= P_\nu(s + t_N)\vec{x}_N(s) + Q_{\nu 1}(s + t_N)\vec{x}_{N-1}(s) + \dots + Q_{\nu\nu}(s + t_N)\vec{x}_{N-\nu}(s) + \\
 &\quad + \vec{c}_\nu(s + t_N) + R_\nu(s + t_N)\vec{\xi}_N(s).
 \end{aligned}$$

На основе этой схемы можно построить цепочку ФПК-уравнений для плотностей вероятности векторов $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \vec{z}_2, \dots, \vec{z}_N, \dots$, которые принадлежат семейству вложенных фазовых пространств $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{R}^{3n} \subset \dots \subset \mathbb{R}^{n(N+1)} \subset \dots$, как это было сделано в работе [10], где рассматривались СДУ с одним запаздыванием.

Но в случае линейных СДУ нет необходимости использования данного пути, так как имеется возможность построить уравнения для первых моментов фазовых векторов \vec{z}_q прямо из исходных СДУ. Так, используя введенные обозначения, определим следующий алгоритм, являющийся стохастическим аналогом классического метода шагов [11].

Рассмотрим линейную систему (1.3) с гауссовой начальной плотностью

$$\vec{p}^0(\vec{x}) = \mathcal{N}(\vec{x}; \vec{m}^0, \mathcal{D}^0) \equiv \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s |\mathcal{D}^0|}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{m}^0)^T (\mathcal{D}^0)^{-1} (\vec{x} - \vec{m}^0) \right].$$

Известно, что при таких условиях все плотности p_k распределения векторов $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_N, \dots$ и $\vec{z}_0^+ = \text{col}(\vec{z}_0, \vec{y}_0)$, $\vec{z}_1^+ = \text{col}(\vec{z}_1, \vec{y}_0)$, \dots , $\vec{z}_N^+ = \text{col}(\vec{z}_N, \vec{y}_0)$, \dots при любом s будут нормальными гауссовыми и будут полностью определяться векторами математических ожиданий

$$\vec{m}_k(s) = \mathbf{M}[\vec{z}_k] = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \vec{z}_k p_k(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, s) d\vec{z}_k \equiv \text{col}(\vec{m}_{x_0}, \vec{m}_{x_1}, \dots, \vec{m}_{x_k}),$$

$$\vec{m}_k^+(s) = \mathbf{M}[\vec{z}_k^+] = \text{col}(\vec{m}_k(s), \vec{m}^0)$$

и матрицами ковариаций

$$\mathcal{D}_k(s) = \mathbf{M}\left[(\vec{z}_k - \vec{m}_k)(\vec{z}_k - \vec{m}_k)^T\right] = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{x_0x_0} & \mathcal{D}_{x_0x_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_0x_k} \\ \mathcal{D}_{x_1x_0} & \mathcal{D}_{x_1x_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_1x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x_kx_0} & \mathcal{D}_{x_kx_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_kx_k} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{D}_k^+(s) = \mathbf{M}\left[(\vec{z}_k^+ - \vec{m}_k^+)(\vec{z}_k^+ - \vec{m}_k^+)^T\right] = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{x_0x_0} & \mathcal{D}_{x_0x_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_0x_k} & \mathcal{D}_{x_0y_0} \\ \mathcal{D}_{x_1x_0} & \mathcal{D}_{x_1x_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_1x_k} & \mathcal{D}_{x_1y_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x_kx_0} & \mathcal{D}_{x_kx_1} & \dots & \mathcal{D}_{x_kx_k} & \mathcal{D}_{x_ky_0} \\ \mathcal{D}_{y_0x_0} & \mathcal{D}_{y_0x_1} & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_k} & \mathcal{D}_{y_0y_0} \end{bmatrix},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, N, \dots$

В связи с тем, что вектор $\vec{m}_k(s)$ и матрица $\mathcal{D}_k(s)$ являются блоками вектора $\vec{m}_k^+(s)$ и матрицы $\mathcal{D}_k^+(s)$ соответственно, достаточно вычислить только последние, а затем выбрать их необходимые элементы.

Шаг 0. Числовые характеристики вектора \vec{z}_0^+ удовлетворяют следующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{m}}_0^+(s) = P_0^{*+} \vec{m}_0^+(s) + \vec{c}_0^{*+},$$

$$\dot{\mathcal{D}}_0^+(s) = P_0^{*+} \mathcal{D}_0^+(s) + [P_0^{*+} \mathcal{D}_0^+(s)]^T + R_0^{*+} R_0^{*+T},$$

$$\vec{m}_0^+(0) = \begin{bmatrix} \vec{m}^0 \\ \vec{m}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_0^+(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$P_0^{*+} = \begin{bmatrix} P_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_0^{*+} = \begin{bmatrix} \vec{c}_0^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_0^{*+} = \begin{bmatrix} R_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_0^*(s) = P_0(s + t_0), \quad \vec{c}_0^*(s) = \vec{c}_0(s + t_0), \quad R_0^*(s) = R_0(s + t_0).$$

Шаг 1. Вектор средних и матрица дисперсий вектора \vec{z}_1^+ являются решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\vec{m}}_1^+(s) = P_1^{*+} \vec{m}_1^+(s) + \vec{c}_1^{*+},$$

$$\dot{\mathcal{D}}_1^+(s) = P_1^{*+} \mathcal{D}_1^+(s) + [P_1^{*+} \mathcal{D}_1^+(s)]^T + R_1^{*+} R_1^{*+T},$$

$$\vec{m}_1^+(0) = \begin{bmatrix} \vec{m}^0 \\ \vec{m}_{x_0}(\tau) \\ \vec{m}^0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_1^+(0) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$P_1^{*+} = \begin{bmatrix} P_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_1^{*+} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_1^{*+} = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1^*(s) = \begin{bmatrix} P_0(s + t_0) & 0 \\ Q_{11}(s + t_1) & P_1(s + t_1) \end{bmatrix}, \quad \vec{c}_1^*(s) = \begin{bmatrix} \vec{c}_0(s + t_0) \\ \vec{c}_1(s + t_1) \end{bmatrix},$$

$$R_1^*(s) = \begin{bmatrix} R_0(s+t_0) & 0 \\ 0 & R_1(s+t_1) \end{bmatrix}.$$

...

Шаг ν . Числовые характеристики вектора \vec{z}_ν^+ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\vec{m}}_\nu^+(s) = P_\nu^{*+} \vec{m}_\nu^+(s) + \vec{c}_\nu^{*+},$$

$$\dot{\mathcal{D}}_\nu^+(s) = P_\nu^{*+} \mathcal{D}_\nu^+(s) + [P_\nu^{*+} \mathcal{D}_\nu^+(s)]^T + R_\nu^{*+} R_\nu^{*+T},$$

$$\vec{m}_\nu^+(0) = \text{col}(\vec{m}^0, \vec{m}_{x_0}(\tau), \vec{m}_{x_1}(\tau), \dots, \vec{m}_{x_{\nu-1}}(\tau), \vec{m}^0),$$

$$\mathcal{D}_\nu^+(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_{\nu-1}}(\tau) & \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_0x_{\nu-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_1x_{\nu-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x_{\nu-1}y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{\nu-1}x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{\nu-1}x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_{\nu-1}x_{\nu-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{\nu-1}y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_{\nu-1}}(\tau) & \mathcal{D}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$P_\nu^{*+} = \begin{bmatrix} P_\nu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{c}_\nu^{*+} = \begin{bmatrix} \vec{c}_\nu^* \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_\nu^{*+} = \begin{bmatrix} R_\nu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_\nu^*(s) = \begin{bmatrix} P_0(s+t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{11}(s+t_1) & P_1(s+t_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{22}(s+t_2) & Q_{21}(s+t_2) & P_2(s+t_2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{\nu\nu}(s+t_\nu) & Q_{\nu,\nu-1}(s+t_\nu) & Q_{\nu,\nu-2}(s+t_\nu) & \dots & Q_{\nu 1}(s+t_\nu) & P_\nu(s+t_\nu) \end{bmatrix};$$

$$\vec{c}_\nu^*(s) = \text{col}(\vec{c}_0(s+t_0), \vec{c}_1(s+t_1), \vec{c}_2(s+t_2), \dots, \vec{c}_\nu(s+t_\nu));$$

$$R_\nu^*(s) = \text{diag}(R_0(s+t_0), R_1(s+t_1), \dots, R_\nu(s+t_\nu)).$$

Шаг $\nu+1$. Числовые характеристики вектора $\vec{z}_{\nu+1}^+$ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\vec{m}}_{\nu+1}^+(s) = P_{\nu+1}^{*+} \vec{m}_{\nu+1}^+(s) + \vec{c}_{\nu+1}^{*+},$$

$$\dot{\mathcal{D}}_{\nu+1}^+(s) = P_{\nu+1}^{*+} \mathcal{D}_{\nu+1}^+(s) + [P_{\nu+1}^{*+} \mathcal{D}_{\nu+1}^+(s)]^T + R_{\nu+1}^{*+} R_{\nu+1}^{*+T},$$

$$\vec{m}_{\nu+1}^+(0) = \text{col}(\vec{m}^0, \vec{m}_{x_0}(\tau), \vec{m}_{x_1}(\tau), \dots, \vec{m}_{x_\nu}(\tau), \vec{m}^0),$$

$$\mathcal{D}_{\nu+1}^+(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_\nu}(\tau) & \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_0x_\nu}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_1x_\nu}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x_\nu y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_\nu x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_\nu x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_\nu x_\nu}(\tau) & \mathcal{D}_{x_\nu y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_\nu}(\tau) & \mathcal{D}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$P_{\nu+1}^{*+} = \begin{bmatrix} P_{\nu+1}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{c}_{\nu+1}^{*+} = \begin{bmatrix} \vec{c}_{\nu+1}^* \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_{\nu+1}^{*+} = \begin{bmatrix} R_{\nu+1}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_{\nu+1}^*(s) = \begin{bmatrix} P_0(s+t_0) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ Q_{11}(s+t_1) & P_1(s+t_1) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ Q_{22}(s+t_2) & Q_{21}(s+t_2) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{\nu\nu}(s+t_\nu) & Q_{\nu,\nu-1}(s+t_\nu) & \dots & Q_{\nu\nu}(s+t_\nu) & P_\nu(s+t_\nu) & 0 \\ 0 & Q_{\nu\nu}(s+t_{\nu+1}) & \dots & Q_{\nu 2}(s+t_{\nu+1}) & Q_{\nu 1}(s+t_{\nu+1}) & P_\nu(s+t_{\nu+1}) \end{bmatrix};$$

$$\vec{c}_{\nu+1}^*(s) = \text{col}(\vec{c}_0(s+t_0), \vec{c}_1(s+t_1), \vec{c}_2(s+t_2), \dots, \vec{c}_\nu(s+t_\nu), \vec{c}_\nu(s+t_{\nu+1}));$$

$$R_{\nu+1}^*(s) = \text{diag}(R_0(s+t_0), R_1(s+t_1), \dots, R_\nu(s+t_\nu), R_\nu(s+t_{\nu+1})).$$

...

Шаг N . Числовые характеристики вектора \vec{z}_N^+ найдем из следующих систем ОДУ:

$$\dot{\vec{m}}_N^+(s) = P_N^{*+} \vec{m}_N^+(s) + \vec{c}_N^{*+},$$

$$\dot{\mathcal{D}}_N^+(s) = P_N^{*+} \mathcal{D}_N^+(s) + [P_N^{*+} \mathcal{D}_N^+(s)]^T + R_N^{*+} R_N^{*+T},$$

$$\vec{m}_N^+(0) = \text{col}(\vec{m}^0, \vec{m}_{x_0}(\tau), \vec{m}_{x_1}(\tau), \dots, \vec{m}_{x_{N-1}}(\tau), \vec{m}^0),$$

$$\mathcal{D}_N^+(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_0x_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_0y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_1x_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_1y_0}(\tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{D}_{x_{N-1}y_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{N-1}x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{N-1}x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{x_{N-1}x_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}_{x_{N-1}y_0}(\tau) \\ \mathcal{D}^0 & \mathcal{D}_{y_0x_0}(\tau) & \mathcal{D}_{y_0x_1}(\tau) & \dots & \mathcal{D}_{y_0x_{N-1}}(\tau) & \mathcal{D}^0 \end{bmatrix},$$

где

$$P_N^{*+} = \begin{bmatrix} P_N^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{c}_N^{*+} = \begin{bmatrix} \vec{c}_N^* \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R_N^{*+} = \begin{bmatrix} R_N^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$P_N^*(s) = \begin{bmatrix} P_0(s+t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{11}(s+t_1) & P_1(s+t_1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ Q_{22}(s+t_2) & Q_{21}(s+t_2) & P_2(s+t_2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{\nu 1}(s+t_N) & P_\nu(s+t_N) \end{bmatrix};$$

$$\vec{c}_N^*(s) = \text{col}(\vec{c}_0(s+t_0), \vec{c}_1(s+t_1), \dots, \vec{c}_\nu(s+t_\nu), \dots, \vec{c}_\nu(s+t_N));$$

$$R_N^*(s) = \text{diag}(R_0(s+t_0), R_1(s+t_1), \dots, R_\nu(s+t_N), \dots, R_\nu(s+t_N)).$$

...

Далее рассмотренная методология демонстрируется на примере задачи математической экологии.

2. Динамика водного загрязнения

В последние годы значительный интерес проявляется к проблеме оценки и регулирования уровня загрязнения рек. При этом среди многих показателей качества водного потока можно выделить два тесно связанных:

— меру скорости поглощения кислорода водой при разложении органических материалов (BOD);

— количество растворенного в единице объема воды кислорода (DO) [12].

Правомерность выбора последнего показателя заключается в том, что если величина DO падает ниже определенного уровня, то рыба в реке гибнет.

В индустриальных странах в реки обычно сбрасывают сточные воды. Для защиты окружающей среды загрязненные воды могут обрабатываться на станциях очистки сточных вод, прежде чем они будут направлены в реки. Очистка обычно производится до некоторого уровня, который зависит от величины BOD . Сточные воды, в которых достигнут требуемый уровень BOD , считаются безопасными для водоема. Однако экологический баланс в реке часто нарушается по неизвестным причинам, которые можно считать случайными. Поэтому для того чтобы вернуть показатели качества воды в реке к требуемому значению, необходимо изменить BOD в сточных водах с помощью повышения или понижения степени обработки воды.

Рассмотрим конечную по длине часть водного пространства реки, в которую из установок для очистки сточных вод осуществляется управляемый сброс очищенных вод. Представим это пространство каскадом проточных водоемов, расположенных вдоль течения реки. Это приводит к тому, что значения BOD и DO водоема, лежащего выше по течению реки, влияют (с некоторым запаздыванием) на величины BOD и DO водоемов, расположенных ниже по течению. Качество воды в i -м водоеме будем определять уровнями BOD (r_i , мг/л) и DO (q_i , мг/л) в некоторой средней точке этого водоема, который рассматривается как реактор с идеально перемешиваемым содержимым, в результате чего параметры потока и текущие переменные имеют одни и те же значения по всему водоему, а значения r_i и q_i на выходе водоема эквивалентны аналогичным показателям внутри водоема.

Тогда из рассмотрения баланса масс следуют уравнения [12, 13], определяющие соотношение между BOD и DO в выбранной точке i -го водоема:

$$\dot{r}_i = -K_{1i}r_i + \frac{Q_{i-1}\tilde{r}_i}{V_i} - \frac{Q_i + Q_E}{V_i}r_i + \frac{\eta_i Q_E}{V_i} + \frac{\bar{m}_i Q_E}{V_i}; \quad (2.1)$$

$$\dot{q}_i = K_{2i}(q_i^s - q_i) + \frac{Q_{i-1}\tilde{q}_i}{V_i} - \frac{Q_i + Q_E}{V_i}q_i - K_{1i}r_i - \frac{\eta_i}{V_i}, \quad (2.2)$$

где V_i — объем воды в водоеме, мл; Q_E — скорость потока, поступающего в водоем, мл/сут.; K_{1i} — скорость уменьшения BOD за сутки в водоеме; K_{2i} — скорость изменения DO за сутки в водоеме путем реаэрации; Q_i — скорость прохождения воды через водоем, мл/сут.; q_i^s — уровень насыщения DO для i -го водоема, мг/л; η_i/V_i — изменение DO в связи с образованием осадков, мг/(л·сут.); \bar{m}_i — концентрация BOD в поступающем в водоем потоке, мг/л; \tilde{r}_i и \tilde{q}_i — концентрации BOD и DO , мг/л, определяемые характеристиками воды в лежащих выше по течению водоемах.

М.Б. Бек [13] определил, что для одного из участков р. Кем около г. Кембридж в Англии допустимы следующие значения коэффициентов в уравнениях (2.1), (2.2):

$$K_{1i} = 0.32, \quad K_{2i} = 0.29, \quad \frac{\eta_i}{V_i} = 1.0, \quad \frac{\eta_i Q_E}{V_i} = 4.19,$$

$$q_i^s = 10, \quad \frac{Q_E}{V_i} = 0.1, \quad \frac{Q_i}{V_i} = 0.9.$$

Таким образом, для i -го водоема уравнения (2.1), (2.2) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} r_i(t) \\ q_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 \\ -0.32 & -1.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i(t) \\ q_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{m}_i(t) + \begin{bmatrix} 0.9\tilde{r}_i(t) + 4.19 \\ 0.9\tilde{q}_i(t) + 1.9 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Данная модель описывает лишь один водоем р. Кем и предусматривает только одну точку слива очищенных вод. Если таких мест на реке много, а необходимых дополнительных данных нет, то можно считать, что в каскаде многих водоемов каждый из них обладает свойствами модели М.Б. Бека. Именно такую схему моделирования динамики изменения BOD и DO предложил Х. Тамура [14]. Он учел влияние распределения источников загрязнений по реке введением в выражения для \tilde{r}_i и \tilde{q}_i членов с задержками. Согласно модели Х. Тамуры, части a_j ($j = 1, 2, \dots, s$) уровней BOD и DO , характеризующих в момент $t - \tau_j$ времени $(i - 1)$ -й водоем, появляются в i -м водоеме в момент времени t , т. е. транспортные задержки распределены во времени между τ_1 и τ_s . Таким образом, для $\tilde{r}_i(t)$, $\tilde{q}_i(t)$ можно записать

$$\tilde{r}_i(t) = \sum_{j=1}^s a_j r_{i-1}(t - \tau_j); \quad (2.4)$$

$$\tilde{q}_i(t) = \sum_{j=1}^s a_j q_{i-1}(t - \tau_j), \quad (2.5)$$

причем

$$\sum_{j=1}^s a_j = 1, \quad \tau_j > 0, \quad \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_s.$$

Анализируя эмпирические данные, Х. Тамура для каждой из распределенных задержек нашел следующие значения переменных: $s = 3$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0.5$ сут., $\tau_3 = 1$ сут., $r_0 = 0$, $q_0 = 10$, $a_1 = 0.15$, $a_2 = 0.70$, $a_3 = 0.15$, которые можно использовать в рассматриваемой модели.

Итак, если ограничиться наличием в каскаде только трех водоемов с распределенными задержками и учесть влияние случайных возмущений соответствующими членами, можно записать следующую систему стохастических дифференциально-разностных уравнений с кратными запаздываниями, описывающих состояние исследуемой системы:

$$\dot{r}_1(t) = -1.32r_1(t) + 0.1\bar{m}_1(t) + 0.9r_0(t) + 4.19 + g_1\xi_1(t),$$

$$\dot{q}_1(t) = -0.32r_1(t) - 1.29q_1(t) + 0.9q_0(t) + 1.9,$$

$$\dot{r}_2(t) = 0.9 \sum_{j=1}^s a_j r_1(t - \tau_j) - 1.32r_2(t) + 0.1\bar{m}_2(t) + 4.19 + g_2\xi_2(t),$$

$$\dot{q}_2(t) = 0.9 \sum_{j=1}^s a_j q_1(t - \tau_j) - 0.32r_2(t) - 1.29q_2(t) + 1.9,$$

$$\dot{r}_3(t) = 0.9 \sum_{j=1}^s a_j r_2(t - \tau_j) - 1.32r_3(t) + 0.1\bar{m}_3(t) + 4.19 + g_3\xi_3(t),$$

$$\dot{q}_3(t) = 0.9 \sum_{j=1}^s a_j q_2(t - \tau_j) - 0.32r_3(t) - 1.29q_3(t) + 1.9$$

($g_i = \text{const}$), причем фазовый вектор системы имеет вид

$$\vec{x} = \text{col}(r_1(t), q_1(t), r_2(t), q_2(t), r_3(t), q_3(t)) = [x_i(t)]^T, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Для вычисления первых моментов случайных функций $x_i(t)$ был разработан многошаговый численно-аналитический алгоритм, реализованный с помощью пакета Mathematica [15] и состоящий из следующих основных блоков:

- расширение фазового вектора;
- формирование списка новых первых моментов;
- символьное построение системы ОДУ для вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций;
- подготовка начальных условий;
- численное интегрирование построенной системы ОДУ;
- сохранение результатов вычислений в конце каждого шага длиной τ для дальнейших вычислений и для визуализации результатов.

Расчеты производились со следующими значениями параметров:

$$\vec{m}^0 = \text{col}(10.0, 7.00, 5.94, 6.0, 5.237, 4.69), \quad \mathcal{D}^0 = \text{diag}(0), \quad g_1 = g_2 = g_3 = 0.5,$$

$$\vec{m}(t) = \text{col}(28.9, 12.9, 10.4), \quad \tau = 0.5, \quad \nu = 2, \quad N = 14.$$

Результаты этих расчетов приведены на рис. 1 (математические ожидания $m_i(t)$ функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), на рис. 2 (дисперсии $\mathcal{D}_{11}(t)$, $\mathcal{D}_{33}(t)$ и $\mathcal{D}_{55}(t)$) и на рис. 3 ($\mathcal{D}_{22}(t)$, $\mathcal{D}_{44}(t)$ и $\mathcal{D}_{66}(t)$).

Заметим, что на последнем шаге численно интегрировалась система 4656 линейных ОДУ с разреженной матрицей. Общее время вычислений составило около 2 ч на персональном компьютере, имеющем центральный процессор с частотой 1400 МГц. После этих расчетов была предпринята попытка сокращения времени вычислений с помощью генерирования соответствующих Fortran-программ и дальнейшего численного интегрирования ОДУ в среде Compaq Fortran (шаг 5 алгоритма). Время расчетов при этом уменьшилось на 40 %, что важно при многократном использовании созданных программ. Наряду с этим

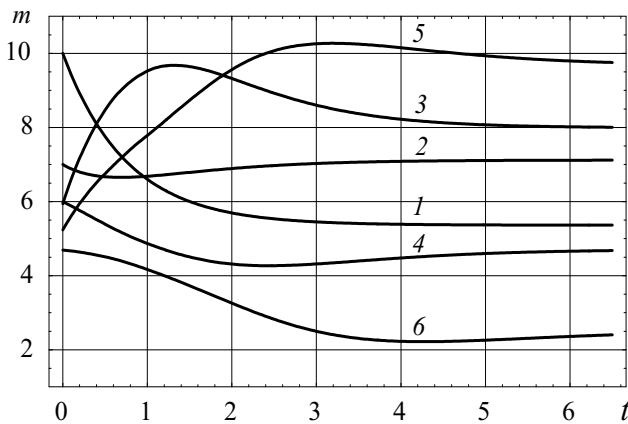


Рис. 1.

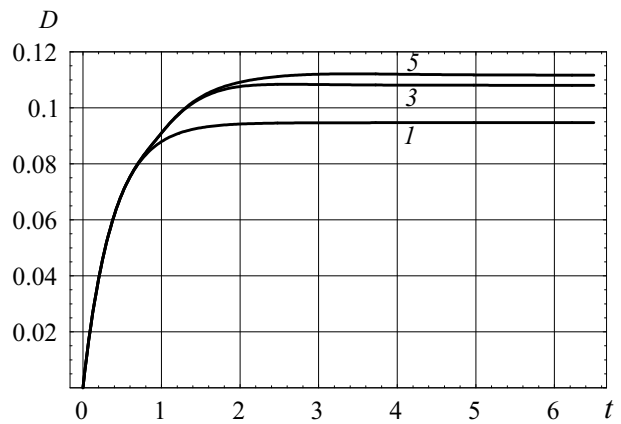


Рис. 2.

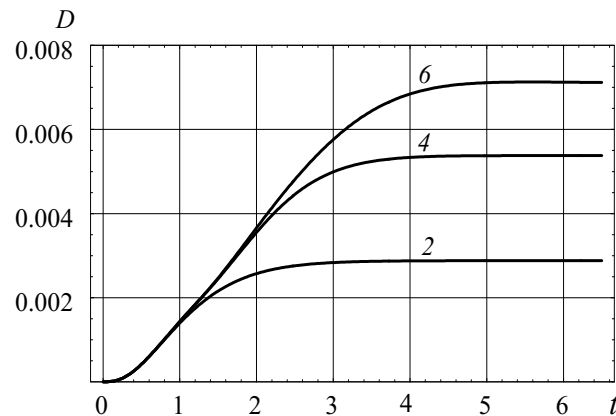


Рис. 3.

отметим и тот факт, что все действия по подготовке и проведению численных расчетов (генерирование Fortran-программ, компилирование, редактирование, запуск exe-модуля, считывание из текстового файла результатов расчетов) проводились в автоматическом режиме без вмешательства человека.

Список литературы

- [1] МАРЧУК Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.
- [2] ЗНАМЕНСКИЙ В.А. Гидрологические процессы и их роль в формировании качества воды. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
- [3] ГРИНВАЛЬД Д.И. Турбулентность русловых потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1974.
- [4] КАРТВЕШВИЛИ Н.А. Стохастическая гидрология. Л.: Гидрометеиздат, 1975.
- [5] ГИЛЯРОВ Н.П. Моделирование речных потоков. Л.: Гидрометеиздат, 1973.
- [6] НАЙДЕНОВ В.И., ШВЕЙКИНА В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока // Водные ресурсы. 2002. Т. 29, № 1. С. 62–67.
- [7] НАЙДЕНОВ В.И., КРУТОВА Н.М. Исследование многолетних колебаний уровня Каспийского моря на основе теории стохастических дифференциальных уравнений // Там же. 2002. Т. 29, № 3. С. 299–310.
- [8] ДИМЕНТБЕРГ М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980.
- [9] МАЛАНИН В.В., ПОЛОСКОВ И.Е. Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
- [10] ПОЛОСКОВ И.Е. Расширение фазового пространства в задачах анализа дифференциально-разностных систем со случайным входом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 9. С. 58–73.
- [11] ЭЛЬСГОЛЬЦ Л.Э., НОРКИН С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющим аргументом. М.: Наука, 1971.
- [12] СИСТЕМЫ: декомпозиция, оптимизация и управление / Сост. М. Сингх, А. Титли. М.: Машиностроение, 1986.
- [13] ВЕСК М.В. The application of control and systems theory to problems of river pollution control / Ph.D. Thesis. Cambridge University, 1974.

- [14] TAMURA H. A discrete dynamical model with distributed transport delays and its hierarchical optimization to preserve stream quality // IEEE Trans. SMC. 1974. N 4. P. 424–429.
- [15] WOLFRAM S. The Mathematica Book. 4th ed. Cambridge: University Press, 1999.

*Поступила в редакцию 25 декабря 2003 г.,
в переработанном виде — 16 июня 2004 г.*