

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ А. Н. КРАЙКО

Ю. В. НИКОЛАЕВ

*Уральский государственный университет путей сообщения,
Екатеринбург, Россия*

e-mail: YNikolaev@math.usart.ru

The problem, suggested by A.N. Kraiko in the series of articles [1–5], is investigated. In these articles the process of a strong compression of a one-dimensional gas layer “from quiescent to the quiescent state” without formation of shock waves is considered. Other authors investigate similar problems on a compression of a quiescent gas into a moving uniform flow. In this case the energy of external compressing power is spent both on the compression and acceleration of gas. The way of compression, suggested by A.N. Kraiko, is optimal from the viewpoint of energy losses: quiescent gas is compressed to the quiescent one, therefore energy is spent on compression only.

1. Постановка задачи

В работе численно исследуется задача, предложенная А.Н. Крайко в серии статей [1–5]. В пространстве физических переменных t, r будем рассматривать одномерные изоэнтропические течения, возникающие в политропном газе с уравнением состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$. Рассматриваемые течения являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{(\gamma - 1)}{2} c(u_r + \frac{\nu u}{r}) = 0, \\ u_t + \frac{2}{(\gamma - 1)} cc_r + uu_r = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

для скорости газа u и скорости звука $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$. Здесь t — время; $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{\nu+1} x_i^2} \geq 0$ — пространственная переменная; γ — показатель адиабаты; p — давление; ν — параметр геометрии: $\nu = 0$ в случае плоских течений, $\nu = 1$ — цилиндрических, $\nu = 2$ — сферических.

Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ газ является покоящейся ($u = 0$) однородной средой с плотностью $\rho = 1$. Это состояние газа назовем *состоянием 1*. Состояние газа в момент времени $t = t_* > t_0$ такое: газ однороден, его плотность $\rho = \rho_* > 1$, при этом газ покоится. Это состояние газа назовем *состоянием 2*.

Тогда задача Крайко формулируется следующим образом: требуется найти течения газа, возникающие при безударном переходе одномерного газового слоя из состояния 1 в состояние 2. Другими словами, требуется безударным способом сжать покоящийся однородный газовый слой с плотностью $\rho = 1$ в покоящийся однородный газовый слой с плотностью $\rho = \rho_* > 1$. В таком виде задача Крайко сформулирована С.П. Баутиным [6].

В [7] для плоскосимметричного случая приведен пример составного течения газа, в котором с помощью двух центрированных волн и постоянного потока осуществляется переход из однородного состояния покоя газа (состояние 1) в другое состояние покоя (состояние 2). Указанное течение вызвано движением двух непроницаемых поршней. В [7. С. 216] доказано, что решений такого типа не существует в том случае, когда один из поршней остается в покое. В [8] для случаев $\nu = 1, 2$ доказано существование ненулевой массы газа, которую можно безударно сжать, используя начальную стадию конфигурации из [7]. А в [9, 10] приведено численное решение такой задачи при $\nu \neq 0$.

В [11] рассмотрена задача об оптимальном движении непроницаемого поршня, совершающего максимальную работу при заданных ограничениях на перемещение и время перемещения. Для плоскосимметричного случая приведены результаты численных расчетов и построена аналогия между этим оптимальным движением поршня и известным движением в двумерном сверхзвуковом сопле максимальной тяги [12].

В [1–5] построены и используются, в том числе для описания неограниченной кумуляции газа, составные плоско-, цилиндрически- и сферически-симметричные нестационарные течения газа, описывающие изоэнтропический переход идеального газа из состояния 1 в состояние 2 с большим или меньшим значением плотности ρ (волна сжатия или разрежения соответственно). Эти течения отличаются от конфигурации, представленной в [7]. В [2, 4] рассмотрены течения, когда сжимающий поршень приходит в точку, из которой распространяется центрированная волна сжатия. Тогда в состоянии 2 плотность постоянна и скорость газа равна нулю. В [1–5] для раскрытия особенностей в решении приведены приближенные формулы, а построение течения “в целом” сведено к численному решению системы уравнений газовой динамики методом характеристик.

В [6, 13, 14] доказано существование решения задачи Крайко в случае, когда газ сжимается двумя поршнями, один из которых покоится в точке с $r = r_0 > 0$, а второй сжимает газ снаружи, т. е. координата второго поршня все время больше r_0 . Там же показано, что поскольку $r = r_0$ (координата неподвижного поршня) строго положительна, то факт существования решения задачи Крайко имеет место и при сжатии газового слоя изнутри.

Однако доказанные теоремы имеют локальный характер и не указывают конкретных размеров области существования решения, что не позволяет установить количественные значения массы газа, для которых возможно существование решения задачи Крайко. Цель данной работы — решив задачу Крайко численно, указать значения массы газа, сжимаемого безударным способом.

2. Начально-краевые задачи

Система уравнений газовой динамики инвариантна относительно сдвига по времени t , а также инвариантна при одновременной смене знака у скорости газа и у времени. Это свойство позволяет вместо задачи о сжатии газа исследовать задачу о разрежении газа. Поэтому без нарушения общности далее рассматривается случай волны разрежения. Полученная волна разрежения при рассмотрении в обратном направлении изменения времени является искомой волной сжатия газа.

Рассмотрим плоский, цилиндрический или сферический слой однородного газа ($\rho = \rho_*$), который в момент $t = 0$ покоится между двумя непроницаемыми стенками, расположенными в точках $O_1(r = r_0)$ и $A(r = r_*)$ (рис. 1). Точка O_1 находится левее точки A : $r_0 < r_*$. При $\nu = 1$ или $\nu = 2$ точка O_1 — строго правее оси или центра симметрии соответственно: $r_0 > 0$.

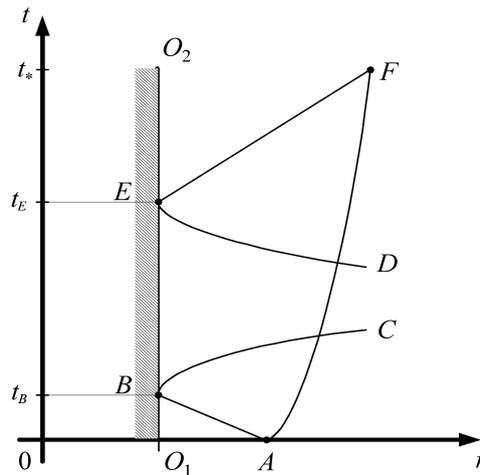


Рис. 1.

Для системы (1.1) сформулируем три начально-краевые задачи, последовательное решение которых и даст решение задачи Крайко.

Задача 1 (о выдвигании поршня). Пусть при $t \geq 0$ из точки A выдвигается поршень (см. рис. 1). Его траектория (линия AF) задается уравнением $r = r_p(t)$. В зависимости от способа выдвигания поршня возможны три случая: первый случай — поршень выдвигается с нулевой скоростью; второй — поршень выдвигается резко, но не быстрее скорости истечения газа в вакуум (именно эта ситуация приведена на рис. 1), третий — поршень выдвигается резко, со скоростью, большей скорости истечения газа в вакуум. В [6] показано существование единственного решения задачи 1 для указанных трех случаев. В данной работе рассмотрен случай, когда поршень выдвигается резко, но скорость выдвигания меньше, чем скорость истечения газа в вакуум:

$$0 < r'_p(0) < 2c_*/(\gamma - 1).$$

Здесь $c_* = \rho_*^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука в области AO_1B . При аналитичности закона выдвигания поршня решение такой задачи существует в некоторой окрестности точки A , оно единственно в классе кусочно-аналитических функций и состоит из трех течений, разделенных звуковыми характеристиками. Первое из течений, расположенное в области AO_1B , соответствует однородному состоянию покоя. Второе при $\nu = 0$ является центрированной волной Римана, а при $\nu = 1, 2$ — ее обобщением [8] и имеет конкретную особенность в начальный момент времени (область ABC). Третье течение фактически представляет собой решение задачи о плавном выдвигании поршня из заданного течения (в рассматриваемом случае — из обобщения центрированной волны Римана) и не имеет особенностей в некоторой окрестности точки A (область правее линии AF).

Итак, в физическом пространстве решение, соответствующее волне разрежения, определяется однозначно, через звуковую характеристику AB непрерывно склеивается с решением, соответствующим состоянию исходного однородного покоя, и в некоторой окрестности точки $B(t_B, r_0)$ задается аналитическими функциями, за исключением точки A . В точке A особенность течения известна (см. [2, 6]) и подобна особенности в центрированной волне.

Задача 2 (об отражении волны разрежения от жесткой стенки). В решении задачи 1 скорость газа при $r = r_0$, $t > t_B$ строго больше нуля, поэтому для него условие

непротекания на стенке O_1O_2 выполняться не будет. Следовательно, в результате взаимодействия течения из задачи 1 и стенки O_1O_2 возникнет новое течение, отделенное от первого звуковой характеристикой BC из семейства C^+ -характеристик (см. рис. 1). Новое течение расположено в области CBO_2 . Функция $r = \varphi(t)$, задающая характеристику BC , и значения параметров газа на ней

$$c|_{r = \varphi(t)} = c_1(t), \quad u|_{r = \varphi(t)} = u_1(t) \quad (2.1)$$

однозначно определяются решением задачи 1 и в некоторой окрестности точки $t = t_B$ являются аналитическими функциями. При этом $\dot{\varphi}(t) = u_1(t) + c_1(t)$, $\varphi(t_B) = r_0$. Новое течение из области CBO_2 на характеристике BC должно удовлетворять условиям (2.1) непрерывного примыкания к решению задачи 1. На стенке O_1O_2 для этого течения должно выполняться условие непротекания

$$u|_{r = r_0} = 0. \quad (2.2)$$

Задача (1.1), (2.1), (2.2) является задачей 2. Справедлива следующая теорема (доказательство приведено в [6]):

Теорема 2. *Задача 2 в некоторой окрестности точки $(t = t_B, r = r_0)$ имеет единственное аналитическое решение.*

Задача 3. На стенке O_1O_2 выбирается какая-либо точка E с координатами (t_E, r_0) , $t_E > t_B$ (см. рис. 1), лежащая в области определения решения задачи 2. В выбранной точке E однозначно определяется значение скорости звука газа c_0 из решения задачи 2: $c(t_E, r_0) = c_0$, а следовательно, и значение плотности газа ρ_0 в этой точке E : $\rho_0 = c_0^{2/(\gamma-1)}$. Значение $\rho = \rho_0$ является вторым произвольным элементом, который в совокупности со значением $r_* - r_0$ (первый произвольный элемент) однозначно определяет решение задачи Крайко в случае волны разрежения. Таким образом, расчетами будет искомый ответ на вопрос: какой ширины слой газа можно сжать в задаче Крайко и во сколько раз.

Выбор точки E также единственным образом определяет аналитические функции $r = \varphi^-(t)$ и $r = \varphi^+(t) \equiv r_0 + c_0(t - t_E)$. Эти функции задают траектории звуковых характеристик. Линия ED — характеристика $r = \varphi^-(t)$ семейства C^- -характеристик решения задачи 2, определенного в области EBC . Прямая EF есть характеристика семейства C^+ , отделяющая однородный покоящийся газ с плотностью ρ_0 и расположенный в области O_2EF (см. рис. 1) от течения в области DEF , являющегося решением задачи 3. Далее единственным образом определяются аналитические функции

$$c|_{r = \varphi^-(t)} = c_0^-(t), c_0^-(t_E) = c_0, u|_{r = \varphi^-(t)} = u_0^-(t), u_0^-(t_E) = 0; \quad (2.3)$$

$$c|_{r = \varphi^+(t)} = c_0^+(t) \equiv c_0, u|_{r = \varphi^+(t)} = u_0^+(t) \equiv 0, \quad (2.4)$$

которые задают соответственно значения параметров состояния газа на характеристике ED уравнения (2.3) и на характеристике EF уравнения (2.4). При этом $\dot{\varphi}^\pm(t) = u_0^\pm \pm c_0^\pm(t)$, $\varphi^\pm(t_E) = r_0$.

Итак, задача 3 (1.1), (2.3), (2.4) сводится к решению задачи Гурса (задача с данными на двух пересекающихся характеристиках ED и EF) в области DEF (см. рис. 1). Для доказательства существования решения задачи 3 последняя сводится к задаче о распаде слабого разрыва (см. [6]), для которой в классе кусочно-аналитических функций доказаны соответствующие теоремы.

Таким образом, получены решения трех задач. Последовательная состыковка полученных решений даст решение задачи о разрежении, описывающее течения, возникающие в газе, при переходе из однородного покоя в однородный покой с меньшим значением плотности. Построенное решение задачи о разрежении при рассмотрении в обратном направлении изменения времени является решением задачи Крайко о безударном переходе “из покоя в покой” с большим значением итоговой плотности.

Найденное решение задачи Крайко имеет особенность: в точке A (на рис. 1 область решения задачи 1) в газовых течениях будет скачок плотности. Установлено [6], что в некоторой окрестности точки A течение задается обобщением волны Римана, а в самой точке — формулами простой волны Римана.

Доказанные теоремы являются локальными. Другими словами,

Для расчета следующих слоев берутся n значений скорости звука c , распределенных равномерно от $c_* = \rho_*^{(\gamma-1)/2}$ до 0, по формуле

$$c_j = c_* - j \frac{c_*}{n},$$

для $j = 1, \dots, n$. Для каждого значения c_j рассчитывается значение скорости газа u из формулы (3.1), верной для всех трех случаев $\nu = 0, 1, 2$. Таким образом, получается n пар значений (c_j, u_j) .

Для каждой пары (c_j, u_j) вычисляется угол наклона характеристики C_j^+ , выходящей из точки (t_*, r_*) , по формуле

$$\xi_j^+ = u_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Таким образом раскрывается особенность течения в точке $(t = t_*, r = r_*)$ и рассчитывается пучок характеристик, выходящих из точки A , необходимых для дальнейших расчетов.

Построение первого слоя происходит следующим образом (рис. 2, а): из точки (t_1^0, r_1^0) на характеристике C_c^+ выпускается характеристика C_1^- . Затем по формулам метода характеристик находится точка пересечения C_1^+ -характеристики с C_1^- -характеристикой и значения скорости и плотности газа в найденной точке. Из точки (t_2^0, r_2^0) на характеристике C_c^+ выпускается характеристика C_2^- . Характеристика C_1^+ продолжается до ее пересечения с характеристикой C_2^- . В найденной точке пересечения этих двух характеристик по формулам метода характеристик рассчитываются значения параметров газа. И так далее: продолжаем C_1^+ -характеристику до пересечения с C_m^- -характеристикой, выходящей из m -й точки на характеристике C_c^+ , и в этой точке определяем параметры газа. Завершает построение первого слоя нахождение точки пересечения C_1^+ -характеристики с вертикальной прямой $r = 1$. Учитывая, что скорость газа u на неподвижной стенке O_1O_2 равна нулю, то легко получить

$$L = 2u - R = -R. \quad (3.2)$$

Таким образом, для расчета параметров газа в последней точке слоя достаточно найти изменение инварианта R вдоль C^+ -характеристики.

Найденные точки пересечения вместе со значениями инвариантов Римана в них образуют слой с номером 1.

Слой с номером 2 строится по точкам слоя 1 аналогично. Для его построения из точки A выпускается характеристика C_2^+ (с угловым коэффициентом, вычисленным по известным значениям (c_2, u_2)) до пересечения с характеристикой C_1^- . Затем характеристика C_2^+ продолжается до пересечения с характеристикой C_2^- и т. д. Заканчивается построение слоя с номером 2 нахождением точки пересечения характеристики C_2^+ и вертикальной прямой $r = 1$.

Подобным образом рассчитываются следующие слои характеристической сетки. Значение плотности в последней точке слоя уменьшается с увеличением номера слоя. Таким образом, построение каждого нового слоя заканчивается достижением меньшего значения плотности на стенке O_1O_2 . Слои строятся до тех пор, пока не будет достигнуто заданное значение плотности $\rho_0 = 1$.

Пусть точка $(t_E, r_0 = 1)$ — последняя рассчитанная точка на линии $r = 1$ и в ней достигнуто требуемое значение плотности ρ_0 , а N — номер последнего построенного слоя. Из точки $(t_E, r_0 = 1)$ (точка E на рис. 2, б) выпускаем C_n^- -характеристику (индекс “н”

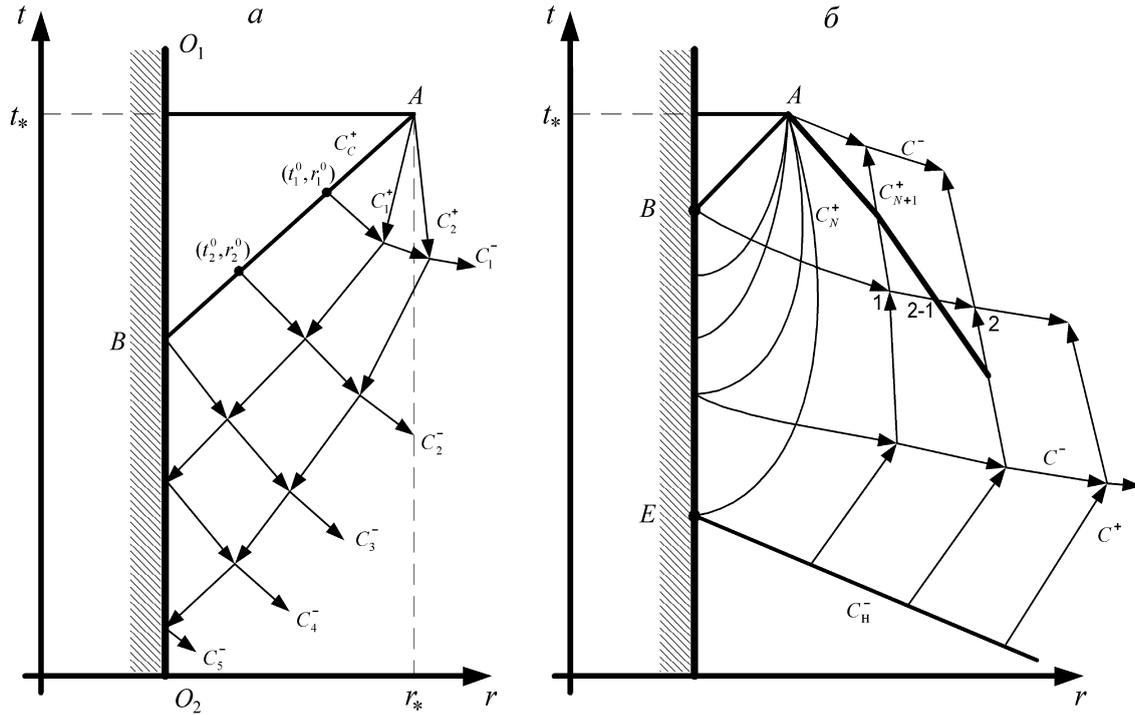


Рис. 2.

означает, что характеристика отделяет рассчитываемое течение от несжатого покоящегося газа), заданную следующим уравнением:

$$r = r_0 + (t_E - t).$$

На этом первый этап расчета характеристической сетки завершен.

На втором этапе построение характеристической сетки сопровождается одновременным расчетом траектории движения сжимающего поршня. Построение этой траектории происходит в обратном направлении изменения времени, при $t \leq t_*$. Из точки $(t = t_*, r = r_*)$ выпускаем траекторию поршня (см. рис. 2, б), определяемую из следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{R(t_0^N, r_0^N) + L(t_0^N, r_0^N)}{2}, \\ r|_{t=t_*} = r_*. \end{cases}$$

Затем на C_H^- -характеристике с шагом по времени Δt_2 расставляются точки, координаты которых вычисляются по следующим формулам:

$$t_k = t_E - k\Delta t_2, \quad r_k = r_0 - c_0 k\Delta t_2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Из найденных точек выпускаются C^+ -характеристики. При этом значения плотности газа и скорости на C_H^- -характеристике известны, поэтому значения инвариантов Римана на ней тоже известны.

Используя точки слоя с номером N , рассчитывается новый слой — характеристика C_{N+1}^+ (см. рис. 2, б). Новый слой (характеристика семейства C^+) строится до пересечения с C^- -характеристикой, выходящей из точки A , значения параметров газа на указанной C^- -характеристике в точке A равны значениям параметров газа на характеристике C_N^+ .

Затем из точки A выпускается траектория сжимающего поршня (скорость поршня равна скорости газа на характеристике C_N^+ в точке A), рассчитываются точки пересечения траектории поршня с линиями характеристической сетки, пока не будет рассчитана точка пересечения траектории поршня с характеристикой C_{N+1}^+ . Затем строится новый слой — характеристика C_{N+2}^+ . Новый слой строится до ячейки, в которой лежит траектория движения поршня, траектория поршня продолжается до пересечения с характеристикой C_{N+2}^+ . Аналогично строится следующий слой — характеристика C_{N+3}^+ и т. д.

Скорость сжимающего поршня рассчитывается следующим образом. В узлах характеристической сетки скорость известна, поэтому в найденной точке пересечения характеристики с линией траектории поршня скорость газа u можно найти с помощью линейной интерполяции значений скорости. Построенная таким образом траектория движения поршня должна достичь характеристики фонового течения — C_n^- -характеристики. Тогда на этом закончатся построение траектории сжимающего поршня и решение всей задачи Крайко “в целом”, поскольку определится точка $(t = t_s, r = r_s)$. Эта точка лежит на C_n^- -характеристике, и из нее в момент времени $t = t_s$ стартует непроницаемый поршень, безударно сжимающий газ в задаче Крайко.

Заметим, что найденное значение t_s в общем случае отлично от нуля, но это легко поправить: достаточно перенести систему координат tOr параллельно оси Ot .

4. Результаты расчетов и выводы

Описанный выше алгоритм был реализован в виде программы для персонального компьютера класса IBM PC. Написанная программа хранит в памяти два массива: первый массив — один полностью рассчитанный слой характеристической сетки, другой массив — второй слой, который рассчитывается по данным слоя из первого массива. После заполнения второго массива данные из него копируются в первый массив, а затем во втором массиве рассчитывается следующий слой.

Для измерения числовых значений в физической модели поставленной задачи были введены следующие единицы измерения. За единицу расстояния берется расстояние от оси симметрии (в случае цилиндрической симметрии) или от центра симметрии (в случае сферической симметрии) до стенки O_1O_2 . Плотность несжатого газа считается равной 1, тогда значение ρ_* показывает, во сколько раз сжат газ. За единицу измерения скорости берется скорость звука в несжатом газе $c_0 = 1$. После этого масштаб измерения времени определяется однозначно.

Проверка точности расчетов. Точность выполняемых программой расчетов проверяется по значениям двух величин: относительной погрешности масс δm и по величине работы A_p , совершенной сжимающим поршнем.

Относительная погрешность массы газа: $\delta m = \frac{|m_* - m_0|}{m_*} \cdot 100\%$, где m_* — масса сжатого газа, m_0 — масса несжатого газа. Так как сжатие производится непроницаемыми поршнями, то массы газа до и после сжатия должны совпадать. Но из-за ошибок численного расчета (округление чисел компьютером, приближенные формулы метода) наблюдается различие масс газа до и после сжатия. Поэтому, чем меньше значение δm , тем точнее выполнены расчеты траектории сжимающего поршня и всего течения в целом.

Вторая величина, также характеризующая точность вычислений, — это значение работы, выполненной сжимающим поршнем. Работа по сжатию газа, при фиксированных

m_*, γ, ρ_* , для случаев, когда течения газа плоско, цилиндрически или сферически симметричные, должна быть одинаковой, так как работа тратится только на сжатие газа — в начальный и конечный момент времени рассматриваемые объемы заполнены неподвижным газом. Таким образом, количество работы по сжатию газа не зависит от вида симметрии, и можно сравнивать точность расчетов по степени совпадения работы по сжатию газа (для фиксированных m_*, γ, ρ_*) при различных видах симметрии ν .

Работа рассчитывается в соответствии с общей формулой

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dv.$$

Также точность расчетов проверяется по степени совпадения работы, выполненной поршнем A_p , и изменения внутренней энергии газа $E_f - E_s$ (так как вся работа сжимающего поршня тратится на сжатие газа, т. е. на изменение внутренней энергии), здесь E_f — внутренняя энергия газа в финальный момент времени, а E_s — внутренняя энергия газа в начальный момент времени. Изменение внутренней энергии газа рассчитывается по формуле

$$E_f - E_s = \frac{m(\rho_*^{\gamma-1} - 1)}{\gamma(\gamma - 1)}.$$

На точность результатов влияют значения параметров счета $\Delta t_1, \Delta t_2, n$. Эти параметры подбирались для каждого варианта расчетов отдельно, опытным путем, так, чтобы относительная погрешность масс δm была менее 1% и работы сжимающего поршня A_p для случаев разных симметрий также отличались не более чем на 1%.

Данные расчетов траектории сжимающего поршня. Траектория сжимающего поршня получена расчетами в табличном виде: набор (t_i, r_i) — координат точек пространства физических переменных, в этих точках также сосчитаны плотность и скорость газа.

Полученные данные о траектории движения сжимающего поршня приведены в таблицах 1, 2. Все данные получены численными расчетами.

В табл. 1 указаны значения параметров газа, для которых проведены расчеты, и значения параметров счета $\Delta t_1, \Delta t_2, n$, при которых были сделаны расчеты. Также указаны значения величин, характеризующих точность выполненных расчетов: относительной погрешности масс δm , работы A_p сжимающего поршня по сжатию газа и изменения внутренней энергии газа $E_f - E_s$.

В табл. 2 для различных значений параметров расчетов приведены данные о модуле скорости сжимающего поршня и плотности газа в некоторых точках траектории поршня: модуль скорости u_f и плотность газа ρ_f в финальной точке траектории поршня (t_f, r_f) ; максимальное по модулю значение скорости поршня \tilde{u} , достигаемое в точке (t_u, r_u) . Также указано значение пространственной координаты r_s точки, из которой в момент времени $t_s = 0$ стартует сжимающий поршень. Во всех расчетах в момент старта модуль скорости поршня u_s равен нулю, плотность газа на поверхности поршня ρ_s равна единице.

На рис. 3 для трех различных вариантов приведены графики изменения скорости поршня, плотности газа на поршне и плотности газа на стенке $O_1 O_2$ от момента старта поршня $t = 0$ до момента финиша $t = t_f$. Первый случай (см. рис. 3, а — в) соответствует варианту № 1; второй случай (см. рис. 3, а, г, д) — варианту № 2; третий случай (см. рис. 3, а, е, ж) — варианту № 5.

В варианте 1 сжимающий поршень монотонно увеличивает скорость до некоторого значения, а затем скорость поршня постоянна до получения финального распределения

Т а б л и ц а 1

Номер	m_*	ρ_*	γ	ν	Δt_1	Δt_2	n	δm	A_p	$E_f - E_s$
1	1000	10000	1.4	0	0.00100	0.010	1000	0.11	69382	69305
2	1000	10000	1.4	1	0.00010	0.001	1000	0.73	69821	69305
3	1000	10000	1.4	2	0.00001	0.001	1000	0.30	69302	69305
4	10000	10000	1.4	0	0.01000	0.010	1000	0.04	693189	693048
5	10000	10000	1.4	1	0.00010	0.010	1000	0.55	696129	693048
6	10000	10000	1.4	2	0.00010	0.001	1000	0.15	689564	693048
7	1000	100000	1.4	0	0.01000	0.010	1000	0.34	177435	176786
8	1000	100000	1.4	1	0.01000	0.001	1000	0.28	176927	176786
9	1000	100000	1.4	2	0.01000	0.005	1000	0.19	171697	176786
10	10000	100000	1.4	0	0.10000	0.100	10000	0.14	1770384	1767857
11	10000	100000	1.4	1	0.01000	0.010	1000	0.66	1764950	1767857
12	10000	100000	1.4	2	0.01000	0.010	1000	0.61	1726041	1767857
13	1000	10000	5/3	0	0.01000	0.0100	1000	0.27	417700	416843
14	1000	10000	5/3	1	0.01000	0.0010	1000	0.03	414943	416843
15	1000	10000	5/3	2	0.01000	0.0001	1000	0.15	417279	416843
16	1000	100000	5/3	0	0.01000	0.0100	1000	0.85	1949063	1938091
17	1000	100000	5/3	1	0.01000	0.0100	1000	0.65	1877408	1938091
18	1000	100000	5/3	2	0.01000	0.0001	1000	0.30	1943278	1938091
19	1000	10000	2.0	0	0.10000	0.1000	10000	0.52	5004977	4999500
20	1000	10000	2.0	1	0.01000	0.0001	10000	0.60	5038625	4999500
21	1000	10000	2.0	2	0.00100	0.0001	1000	0.01	4984690	4999500

Т а б л и ц а 2

Номер	r_s	t_u	r_u	\tilde{u}	t_f	r_f	u_f	ρ_f
1	1002.11	1062.36	3.2853	13.28	1062.53	1.1000	13.28	652
2	17.93	19.29	1.0158	11.29	19.29	1.0158	11.29	1090
3	6.22	6.20	1.0079	11.10	6.20	1.0079	11.10	1143
4	10005.15	10616.66	23.8533	13.27	10618.30	2.0000	13.27	652
5	56.58	61.11	2.3829	9.35	61.24	1.1482	8.83	1935
6	13.37	14.41	1.5807	8.47	14.47	1.0740	8.23	2204
7	1004.39	1041.15	1.2832	22.50	1041.16	1.0100	22.50	5033
8	17.89	18.71	1.0016	20.85	18.71	1.0016	20.85	6772
9	6.21	6.11	1.0008	20.75	6.11	1.0008	20.75	7013
10	10015.01	10391.43	3.8318	22.50	10391.55	1.1000	22.50	5033
11	56.61	60.55	1.0158	18.35	60.55	1.0158	18.35	10163
12	13.39	14.25	1.0079	17.90	14.25	1.0079	17.90	10906
13	1003.72	1026.61	1.1023	30.83	1026.62	1.1000	30.83	1432
14	17.87	18.16	1.0158	28.05	18.16	1.0158	28.05	1813
15	6.22	5.75	1.0079	27.86	5.75	1.0079	27.86	1842
16	1009.46	1021.95	1.0153	68.23	1021.96	1.0100	68.23	13325
17	17.81	17.85	1.0016	66.28	17.85	1.0016	66.28	14680
18	6.22	5.63	1.0008	66.14	5.63	1.0008	66.14	14569
19	1006.21	1011.56	1.6517	99.00	1011.57	1.1000	99.00	2550
20	17.92	17.40	1.0158	94.32	17.40	1.0158	94.32	2792
21	6.21	5.47	1.0079	94.20	5.47	1.0079	94.20	2798

(см. рис. 3, б); похожим образом изменяется плотность газа на поверхности поршня (см. рис. 3, в). В варианте 2 скорость сжимающего поршня монотонно увеличивается до момента получения финального распределения (см. рис. 3, г); похожим образом изменяется плотность газа на поверхности поршня (см. рис. 3, д). В варианте 3 скорость сжимающего поршня монотонно увеличивается до некоторого значения, а затем монотонно убывает — поршень притормаживает (см. рис. 3, е); плотность газа на поршне изменяется, как в варианте 2: плотность монотонно увеличивается от момента старта поршня до момента финиша (см. рис. 3, ж).

Во всех случаях плотность газа на неподвижной стенке O_1O_2 сначала постоянная (отрезок O_1B на рис. 1), затем монотонно растет (отрезок EB на рис. 1) и в конце плотность принимает постоянное значение (отрезок O_2E на рис. 1). Характер изменения плотности газа на неподвижной стенке для трех рассмотренных случаев изображен на рис. 3, а.

По результатам расчетов можно сделать следующий вывод. В случае плоской симметрии ($\nu = 0$) модуль скорости сжимающего поршня будет изменяться, как показано на рис. 3, б, монотонно возрастая от нуля до некоторого значения, а затем до момента получения требуемого финального распределения поршень будет двигаться с постоянной скоростью. Расчетами установлено, что на последней стадии сжатия в случае плоской симметрии между центрированной волной Римана и поршнем находится однородный движущийся с постоянной скоростью газ.

Для случаев цилиндрической ($\nu = 1$) и сферической ($\nu = 2$) симметрии можно подобрать такое значение массы газа $m = m^0$ (для каждого вида симметрии свое значение m^0), что если сжимать газ меньшей массы, то характер изменения модуля скорости сжимающего поршня будет, как показано на рис. 3, г, т. е. монотонно увеличиваться. Если сжимать газ большей массы, то характер изменения модуля скорости сжимающего поршня будет, как показано на рис. 3, е, т. е. на финальной стадии — не монотонный. Характер изменения модуля скорости сжимающего поршня исчерпывается указанными тремя вариантами.

Расчетами установлено, что в случае, когда сжимающий поршень притормаживает перед получением финального распределения, он никогда не останавливается до скорости

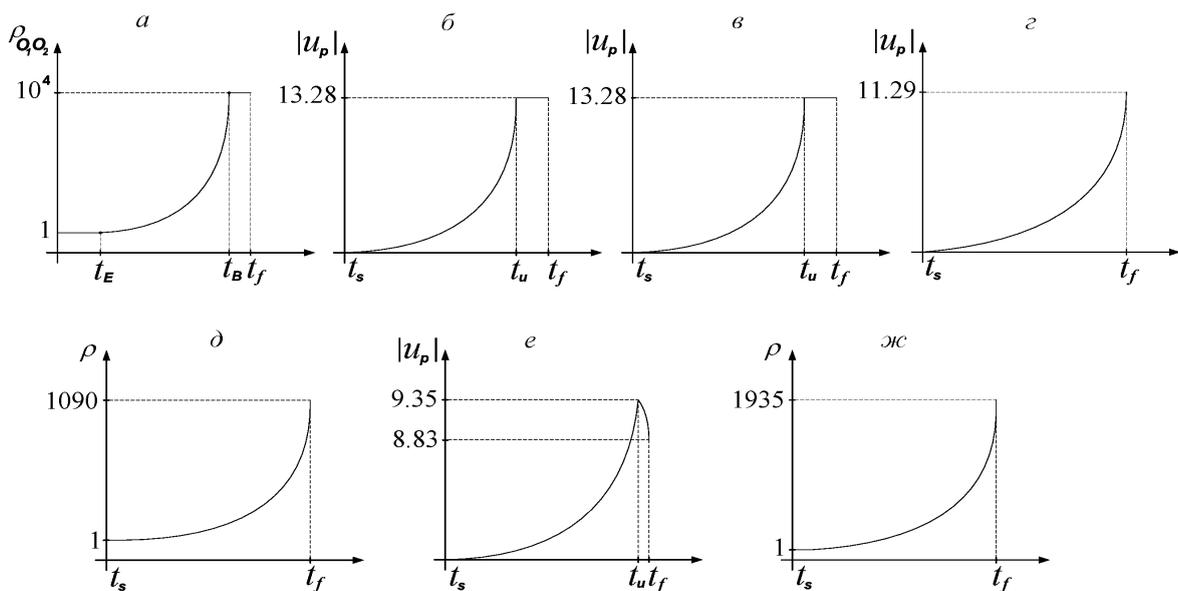


Рис. 3.

$u = 0$. То есть в момент времени $t = t_f$ поршень входит в однородный покоящийся сжатый газ с ненулевой скоростью, это получено во всех рассчитанных вариантах.

Также расчетами установлено, что плотность на сжимающем поршне растет монотонно от 1 до ρ_f при увеличении t , при этом ρ_f всегда меньше ρ_* . Таким образом плотность газа на поршне всегда меньше плотности сжатого газа (аналогичное утверждение справедливо для давления).

Параметры газа на неподвижной стенке. По условиям поставленной задачи скорость газа на неподвижной стенке $u = 0$. На рис. 3, а показано поведение плотности газа на стенке $r_0 = 1$ в зависимости от времени для вариантов 1, 2, 5. По данным, полученным численными расчетами, можно утверждать, что характер распределения плотности на неподвижной стенке для других вариантов аналогичен: плотность на стенке увеличивается монотонно от 1 до ρ_* , значение плотности максимально в области покоящегося однородного с плотностью $\rho = \rho_*$ газа (состояние 2). Вместе с плотностью монотонно увеличивается давление на стенку.

Обсуждение результатов

В основу метода расчета положен проверенный метод характеристик, позволяющий с достаточной степенью точности восстанавливать течения в газе. В частности, для проведенных расчетов относительная погрешность масс газа δm до сжатия и после сжатия получилась меньше 1 %.

Для раскрытия особенности в течении использовано свойство решения, полученное строго математически: особенность описывается сходящимся рядом, первые слагаемые которого известны. Расчеты ведутся в обратном направлении изменения времени, течения рассчитываются в следующей последовательности: сначала рассчитываются течения в точке с особенностью, затем методом характеристик делается расчет в области, содержащей траекторию сжимающего поршня, где особенностей не возникает. Предложенная методика расчета была использована в [9, 10], полученные в этих работах результаты подтверждают надежность используемой методики расчетов. Все сказанное указывает на достоверность полученных результатов.

Численно построены течения, возникающие в газе при переходе из состояния 1 в состояние 2. В качестве одного из искомым элементов исследуемой задачи рассчитана траектория сжимающего поршня. Анализ рассчитанных течений показал, что полученное численное решение описывает процесс безударного сжатия одномерного слоя газа из покоя в покой, т. е. в случае конфигурации Крайко.

Самое главное: удалось получить конкретное значение массы газа, которую можно сжать безударно до плотности ρ_* , в 10^4 – 10^5 раз превышающей исходную. Тем самым дан ответ на вопрос о возможности безударного сжатия газа в случае конфигурации Крайко достаточно больших масс газа до больших плотностей.

Выражаю благодарность своему руководителю, профессору С.П. Баутину за ценные замечания по данной статье, а также за его научное руководство в целом.

Список литературы

- [1] Крайко А.Н. О свободном нестационарном расширении идеального газа // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1993. Т. 4. С. 155–163.

- [2] КРАЙКО А.Н. Вариационная задача об одномерном изоэнтропическом сжатии идеального газа // Прикл. математика и механика. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 35–51.
- [3] КРАЙКО А.Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 70–80.
- [4] КРАЙКО А.Н. О неограниченной кумуляции при одномерном нестационарном сжатии идеального газа // Там же. 1996. Т. 60, вып. 6. С. 1000–1007.
- [5] КРАЙКО А.Н., ТИЛЛЯЕВА Н.И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, № 1. С. 120–128.
- [6] БАУТИН С.П. О существовании решений задачи А.Н. Крайко // Прикл. механика и техническая физика. 2000. Т. 41, № 3. С. 48–55.
- [7] МИЗЕС Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
- [8] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [9] БАУТИН С.П., НИКОЛАЕВ Ю.В. Об одном методе расчета безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 4. С. 3–12.
- [10] НИКОЛАЕВ Ю.В. О численном решении задачи безударного сильного сжатия одномерных слоев газа // Там же. 2001. Т. 6, № 2. С. 104–109.
- [11] РЫЛОВ А.И. Вариационная задача одномерной нестационарной газовой динамики // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 4. С. 171–175.
- [12] КРАЙКО А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979.
- [13] БАУТИН С.П. О возможности изоэнтропического перехода от однородного покоя в другое однородное покоящееся состояние идеального газа // Докл. РАН. 1998. Т. 362, № 5. С. 621–624.
- [14] БАУТИН С.П. Математическое исследование безударного сжатия газа // Успехи механики. 2002. Т. 1, № 2. С. 3–36.
- [15] ЖУКОВ А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // М.: Изд-во АН СССР, 1960. (Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова; Т. 58).
- [16] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б.Л., ЯНЕНКО Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

*Поступила в редакцию 25 ноября 2003 г.,
в переработанном виде — 20 января 2004 г.*