Вычислительные технологии **Том 2, № 4, 1997**

РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НЕЗАВИСИМОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ СМЕЩЕНИЙ

Г. В. Иванов, В. Д. Кургузов
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
Новосибирск, Россия

A plane static problem of elasticity theory is considered for the case when the domain where solution is sought can be partitioned into arbitrary quadrangular elements. An approximation is constructed with the deformations constant within the element. When the domain is partitioned in quadrangular elements this is possible when two approximating functions are used for the shifts. The euations of the element rigidity are formulated on the basis of the quadratic approximation, the conditions are gi- ven when both rigidity variants coincide. The problem solution for the assumed approximation is reduced to the solution of the system of algebraic equations. The solvability of the equation of elements unification (join) is proved as well as the extremal property of the solution of the elements unification equation and, the solution convergence to the exact solution.

Метод конечных элементов (МКЭ) является универсальным методом сведения краевых задач для дифференциальных уравнений к системам алгебраических уравнений и в настоящее время широко используется для решения задач механики сплошной среды в приложении к широкому классу научных и инженерных проблем. МКЭ составляет алгоритмическую основу многих пакетов прикладных программ, используемых в различных сферах человеческой деятельности. Теоретическим основам этого метода, технике его реализации и решению прикладных задач посвящено большое количество монографий и научных статей.

Наиболее распространенным типом конечных элементов являются элементы, сопряжение которых между собой производится в отдельных узлах [1, 2]. Использование таких элементов для решения задач с сингулярными особенностями в напряжениях приводит к значительным трудностям. В узлах, попадающих на особые точки, приходится применять дополнительную технику. Получить решение таких задач на равномерных сетках практически невозможно. Одним из способов повышения точности численного решения является сгущение сетки, что ведет к резкому увеличению объема вычислений и снижению скорости сходимости. Возможно применение и специальных вариационных методов и аппроксимаций, позволяющих учесть аналитическую природу особенностей [3, 4], что, однако, также усложняет технику численной реализации решения.

В задачах с сингулярными особенностями в напряженных состояниях применение конечных элементов, условия сопряжения которых формулируются в виде условий непрерывности усилий и моментов на их гранях, оказывается намного эффективнее, чем использование традиционных конечных элементов [5, 6]. Эти элементы не содержат сингулярных точек, поскольку в них входят только величины, осредненные по граням. Такие элементы являются естественными регуляризаторами в задачах с особенностями. В работах [5, 6] проведено их сравнение с традиционными конечными элементами на примерах решения ряда конкретных задач. Наиболее эффективны такие элементы для областей, составленных из параллелепипедов в трехмерных задачах и прямоугольников в двумерных задачах.

Процедура нескольких аппроксимаций напряжений и смещений позволяет строить четырехугольный конечный элемент, для которого условия сопряжения формулируются в виде условий непрерывности усилий и смещений на его гранях. В стандартном МКЭ аппроксимация с постоянными в пределах элемента деформациями строится лишь в случае разбиения области на треугольные элементы. Ниже показано, что аппроксимацию с постоянными в пределах элемента деформациями можно построить и при разбиении области на четырехугольные элементы, если для каждой из компонент смещения использовать не одну, как обычно, а две аппроксимации.

1. Косоугольные координаты в произвольном четырехугольном элементе

Рассмотрим произвольный четырехугольный элемент на плоскости Ox^1x^2 прямоугольных декартовых координат (рис. 1).

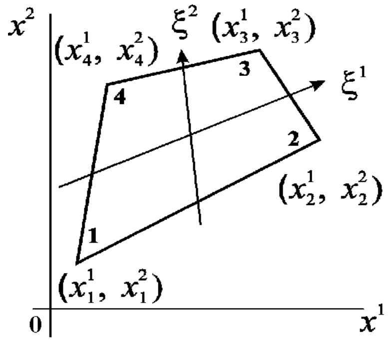

Рис. 1.

Введем в элементе косоугольную систему координат ξ^1, ξ^2, связь которых с декартовыми координатами x^1, x^2 определяется соотношениями

$$x^i = N^j x_j^i \quad (i = 1,\, 2), \tag{1}$$

где

$$N^1 = \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2), \quad N^2 = \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2),$$

$$N^3 = \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2), \quad N^4 = \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \text{ —}$$

функции формы четырехугольного элемента, $-1 \leqslant \xi^\alpha \leqslant 1$ $(\alpha = 1,\, 2)$, x_j^i $(i = 1,\, 2$, $j = 1, \ldots, 4)$ — координаты вершин четырехугольника. Используется обычное правило суммирования по повторяющимся индексам. В плоскости ξ^1, ξ^2 четырехугольнику соответствует квадрат (рис. 2).

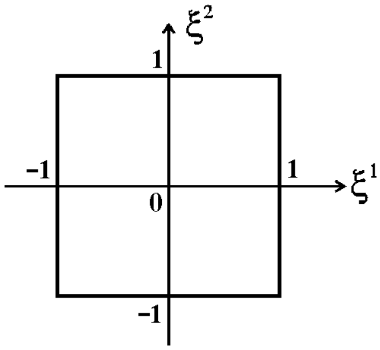

Рис. 2.

Очевидно,

$$x^1_{,1} = \alpha_1 + \gamma_1 \xi^2, \quad x^1_{,2} = \beta_1 + \gamma_1 \xi^1,$$
$$x^2_{,1} = \alpha_2 + \gamma_2 \xi^2, \quad x^2_{,2} = \beta_2 + \gamma_2 \xi^1, \tag{2}$$

где

$$\alpha_i = \frac{1}{4}(x^i_2 - x^i_1 + x^i_3 - x^i_4), \quad \beta_i = \frac{1}{4}(x^i_3 - x^i_1 + x^i_4 - x^i_2),$$

$$\gamma_i = \frac{1}{4}(x^i_1 + x^i_3 - x^i_2 - x^i_4), \quad x^i_{,k} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \quad (i,\, k = 1,\, 2).$$

Используя связь между дифференциалами

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} dx^k, \quad dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha,$$

находим, что

$$d\xi^1 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \xi^2} d\xi^2,$$

и, следовательно,

$$0 = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}, \quad 1 = \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \xi^1}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} = \frac{x^2_{,2}}{\sqrt{g}}, \qquad \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = -\frac{x^1_{,2}}{\sqrt{g}}, \tag{3}$$

где

$$\sqrt{g} = x^1_{,1} x^2_{,2} - x^1_{,2} x^2_{,1}. \tag{4}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \frac{x^1_{,1}}{\sqrt{g}}, \qquad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} = -\frac{x^2_{,1}}{\sqrt{g}}. \tag{5}$$

2. Базис из нормалей и касательных к координатным линиям ξ^1, ξ^2

Обозначим

$$\mathbf{h}^1 = \frac{\mathbf{Э}^1}{|\mathbf{Э}^1|}, \qquad \mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{Э}_2}{|\mathbf{Э}_2|}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{Э}^1 = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^k}\mathbf{e}^k, \qquad \mathbf{Э}_2 = \frac{\partial x^k}{\partial \xi^2}\mathbf{e}^k.$$

Векторы $\mathbf{h}^1$, $\mathbf{h}_2$ — единичные векторы нормали и касательной к координатным линиям ξ^2 (рис. 3), $\mathbf{e}^k = \mathbf{e}_k$ — базисные векторы декартовой системы координат. Аналогично векторы

$$\mathbf{h}^2 = \frac{\mathbf{Э}^2}{|\mathbf{Э}^2|}, \qquad \mathbf{h}_1 = \frac{\mathbf{Э}_1}{|\mathbf{Э}_1|} \text{ —} \tag{7}$$

единичные векторы нормали и касательной к координатным линиям ξ^1 (рис. 4).

Очевидно,

$$\mathbf{Э}^1 = \frac{x^2_{,2}\mathbf{e}_1 - x^1_{,2}\mathbf{e}_2}{\sqrt{g}}, \qquad |\mathbf{Э}^1|\sqrt{g} = |\mathbf{Э}_2|,$$

$$\frac{\partial \mathbf{Э}^1}{\partial \xi^1} = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(x^2_{,21}\mathbf{e_1} - \mathbf{x^1_{,21}}\mathbf{e_2} - \mathbf{Э^1}\frac{\partial\sqrt{\mathbf{g}}}{\partial \xi^{\mathbf{1}}}\Big),$$

$$\mathbf{Э}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{Э}^1}{\partial \xi^1} = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(x^2_{,21}x^1_{,2} - x^1_{,21}x^2_{,2}\Big) = \frac{1}{\sqrt{g}}(\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2),$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}^1}{\partial \xi^1} = \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left(\frac{\mathbf{Э}^1}{|\mathbf{Э}^1|}\right) = \frac{1}{|\mathbf{Э}^1|}\left(\frac{\partial \mathbf{Э}^1}{\partial \xi^1} - \frac{\mathbf{Э}^1}{|\mathbf{Э}^1|}\frac{\partial |\mathbf{Э}^1|}{\partial \xi^1}\right),$$

и поэтому

$$\mathbf{h}^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}^1}{\partial \xi^1} = 0, \quad \mathbf{h}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}^1}{\partial \xi^1} = \frac{x^1_{,2}x^2_{,21} - x^2_{,2}x^1_{,21}}{(x^2_{,2})^2 + (x^1_{,2})^2} = \frac{\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2}{(x^2_{,2})^2 + (x^1_{,2})^2}.$$

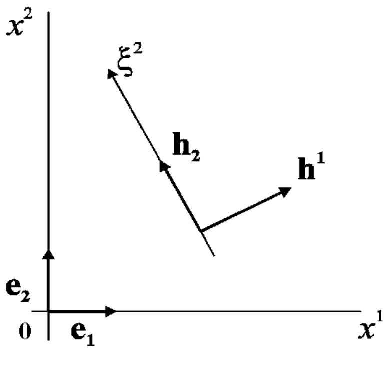

Рис. 3.

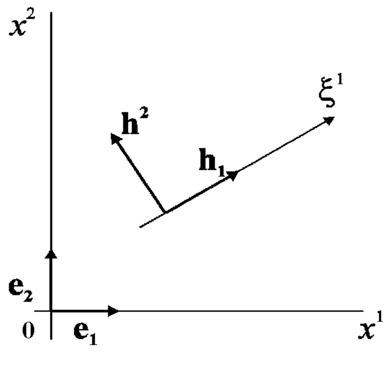

Рис. 4.

Аналогично получаем

$$\mathbf{h}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \xi^1} = 0, \quad \mathbf{h}^1 \cdot \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \xi^1} = \frac{x^2_{,2}x^1_{,21} - x^1_{,2}x^2_{,21}}{(x^1_{,2})^2 + (x^2_{,2})^2} = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{(x^1_{,2})^2 + (x^2_{,2})^2}.$$

Заметим, что согласно (2) и (6) векторы $\mathbf{h}^1$, $\mathbf{h}_2$ не зависят от ξ^2.

Таким образом,

$$\frac{\partial \mathbf{h}^1}{\partial \xi^1} = A\mathbf{h}_2, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}^1}{\partial \xi^2} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \xi^1} = -A\mathbf{h}^1, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_2}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$A = \frac{x^1_{,2}x^2_{,21} - x^2_{,2}x^1_{,21}}{(x^2_{,2})^2 + (x^1_{,2})^2} = \frac{\gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2}{(x^2_{,2})^2 + (x^1_{,2})^2}. \tag{8}$$

Заменяя в (8) индексы 1 на 2 и 2 на 1, находим

$$\frac{\partial \mathbf{h}^2}{\partial \xi^2} = B\mathbf{h}_1, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}^2}{\partial \xi^1} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \xi^2} = -B\mathbf{h}^2 \qquad \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \xi^1} = 0,$$

$$B = \frac{x^2_{,1}x^1_{,12} - x^1_{,1}x^2_{,12}}{(x^1_{,1})^2 + (x^2_{,1})^2} = \frac{\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1}{(x^1_{,1})^2 + (x^2_{,1})^2}. \tag{9}$$

3. Уравнения равновесия

Пусть σ^{ij} — декартовы компоненты тензора напряжений. Одна из форм уравнений равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^j} + f_i = 0, \tag{10}$$

где f_i — декартовы компоненты вектора массовых сил.

Пусть $\dot{\varepsilon}_{ij}$ — декартовы компоненты тензора скоростей деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x^i}\right), \tag{11}$$

где $\dot{u}_i$ — декартовы компоненты скоростей частиц.

Для записи уравнений в иных чем (10) формах удобно использовать принцип виртуальных скоростей [7]:

$$\int\limits_{\Omega} \sigma^{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij}d\Omega = \int\limits_{\Omega} f_i\dot{u}^*_i d\Omega + \int\limits_{S_\sigma} p^0_i\dot{u}^*_i dS_\sigma, \quad \dot{\varepsilon}^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}^*_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{u}^*_j}{\partial x^i}\right), \tag{12}$$

где $\dot{u}^*_i$ — произвольные компоненты вектора скорости, равные нулю на той части границы S_u области Ω, где заданы смещения.

Если $\dot{u}^*_i$ рассматривать как функции переменных ξ^α, то

$$\dot{\varepsilon}^*_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}^*_i}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{u}^*_j}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\right). \tag{13}$$

Заметим, что

$$d\Omega = |\text{Э}_1 \times \text{Э}_2| d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2. \tag{14}$$

Используя (12) – (14), можно записать принцип виртуальных скоростей в виде

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sigma^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\right)\frac{\partial \dot{u}^*_i}{\partial \xi^\alpha} d\xi^1 d\xi^2 = \int\limits_{\Omega} f_i\dot{u}^*_i\sqrt{g}\, d\xi^1 d\xi^2 + \int\limits_{S_\sigma} p^0_i\dot{u}^*_i dS_\sigma. \tag{15}$$

Из (15) следует, что уравнения равновесия можно записать как

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\sigma^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\right) + \sqrt{g} f_i = 0. \tag{16}$$

Используя обозначения

$$\mathbf{p}^\alpha = \sigma^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{f} = f_i \mathbf{e}^i, \tag{17}$$

уравнения (16) можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g}\mathbf{f} = 0; \tag{18}$$

здесь $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$ — векторы усилий на площадках с нормалями $\mathbf{h}^1$, $\mathbf{h}^2$ (рис. 5).

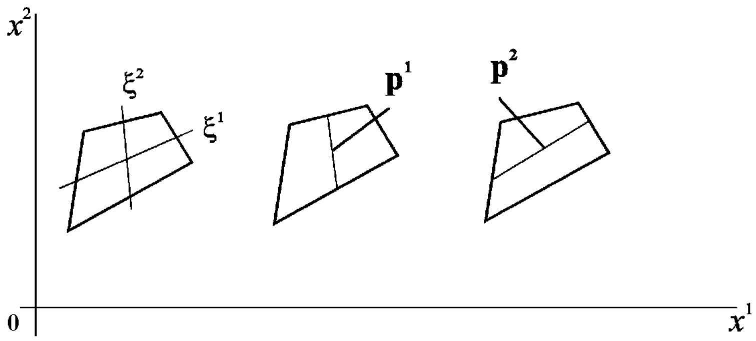

Рис. 5.

4. Уравнения связи векторов усилий со смещениями

Пусть ε_{ij} — декартовы компоненты тензора деформаций, $\mathbf{u}$ — вектор смещения. Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i}\cdot \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j}\cdot \mathbf{e}_i\right).$$

Если рассматривать $\mathbf{u}$ как функцию переменных ξ^α, то

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\,\mathbf{e}_i\right). \tag{19}$$

Полагаем, что σ^{ij} связаны с ε_{ij} законом Гука

$$\sigma^{ij} = a^{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{20}$$

где a^{ijkl} — модули упругости частиц элемента. Из (17), (19) и (20) следует

$$\mathbf{p}^\alpha = a^{ijkl}\sqrt{g}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta}\cdot \mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_i. \tag{21}$$

5. Уравнения жесткости элемента на основе линейной аппроксимации векторов усилий и смещений

Полагаем, что

$$\mathbf{p}^\alpha = \mathbf{p}^\alpha_{(0)} + \mathbf{p}^\alpha_{(1)}\xi^\alpha, \quad \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}^\alpha_{(0)} + \mathbf{u}^\alpha_{(1)}\xi^\alpha,$$
$$\mathbf{u}^\alpha_{(0)} - \mathbf{u}_{(0)} = \frac{1}{\sigma_0}\Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \quad (\alpha = 1,\, 2), \tag{22}$$

где Λ_α — заданная положительно определенная матрица; σ_0 — характерное напряжение; $\mathbf{p}^\alpha_{(k)}$, $\mathbf{u}^\alpha_{(k)}$ $(k = 0,\, 1)$, $\mathbf{u}_{(0)}$ — искомые, постоянные в пределах элемента, векторы. Из (22) и уравнений

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g}\mathbf{f}\right)d\xi^1 d\xi^2 = 0,$$
$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\mathbf{p}^\alpha - a^{ijkl}\sqrt{g}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}\left(\mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta}\right)\mathbf{e}_i\right]d\xi^1 d\xi^2 = 0 \tag{23}$$

следует связь векторов $\mathbf{p}^\alpha_\pm = \mathbf{p}^\alpha\big|_{\xi^\alpha=\pm 1}$ с векторами $\mathbf{u}^\alpha_\pm = \mathbf{u}^\alpha\big|_{\xi^\alpha=\pm 1}$. Эту связь принято называть уравнениями жесткости элемента.

6. Разрешимость уравнений объединения элементов

Уравнения жесткости элементов, условия непрерывности векторов усилий и смещений на общих гранях соседних элементов и граничные условия для векторов усилий и смещений на границе объединения элементов образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно компонент векторов усилий на гранях элементов и смещений граней.

Из (22) и (23) находим

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{u}_{(0)} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \sqrt{g}\mathbf{f}\right)d\xi^1 d\xi^2 = 0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\mathbf{u}_{(0)} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\, d\xi^1 d\xi^2 = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\mathbf{u}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\right]d\xi^1 d\xi^2,$$
$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\mathbf{p}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} - \sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{e}_i\right)\right]d\xi^1 d\xi^2 = 0,$$

и, следовательно,

$$\sum_\omega \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}\left(\mathbf{p}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha\right) + \sqrt{g}\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}_{(0)}\right]d\xi^1 d\xi^2 =$$
$$= \sum_\omega \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{e}_i\right) + \right.$$

$$+\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\Bigg] d\xi^1 d\xi^2 = 0, \tag{24}$$

где $\sum\limits_{\omega}$ означает сумму по всем входящим в объединение элементам.

Для доказательства разрешимости уравнений объединения элементов достаточно показать, что нулевое решение этих уравнений при равенстве нулю левой части (24) единственно.

Из равенства нулю левой части (24) и положительной определенности потенциальной энергии и матрицы Λ^α следует

$$\frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\,\mathbf{e}_j + \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\cdot\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\,\mathbf{e}_i\right) = 0, \quad \mathbf{p}^\alpha_{(0)} = 0. \tag{25}$$

Заметим, что компоненты $\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta}$ тензора деформаций в косоугольной системе координат ξ^1, ξ^2 связаны с ε_{ij} формулами

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta}$$

и, следовательно, могут быть записаны в виде

$$\hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha}\cdot \boldsymbol{\ni}_\beta + \frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta}\cdot \boldsymbol{\ni}_\alpha\right). \tag{26}$$

Из (25), (26) и (22) находим

$$\mathbf{u}^1_{(0)} = \mathbf{u}^2_{(0)} = \mathbf{u}_{(0)}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1}\cdot \boldsymbol{\ni}_1 = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2}\cdot \boldsymbol{\ni}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \xi^1}\cdot \boldsymbol{\ni}_2 + \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \xi^2}\cdot \boldsymbol{\ni}_1 = 0. \tag{27}$$

Обозначим

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_{(0)} + (a^{11}\boldsymbol{\ni}_1 + a^{12}\boldsymbol{\ni}^2)\xi^1, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_{(0)} + (a^{21}\boldsymbol{\ni}^1 + a^{22}\boldsymbol{\ni}_2)\xi^2.$$

Согласно (27),

$$a^{11} = 0, \quad a^{22} = 0, \quad a^{12} + a^{21} = 0,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}_{(0)} + a^{12}\boldsymbol{\ni}^2\xi^1, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_{(0)} + a^{21}\boldsymbol{\ni}^1\xi^2. \tag{28}$$

Можно показать, что когда две соседние грани, входящие в состав границы, закреплены (рис. 6), смещения вида (28) невозможны, т. е. $\mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{0}$, $a^{21} = a^{12} = 0$ во всех элементах.

Таким образом, нулевое решение системы однородных уравнений объединения элементов единственно и, следовательно, система разрешима при любых правых частях уравнений.

7. Экстремальное свойство решения уравнений объединения элементов

Пусть $\mathbf{u}^\alpha,\ \mathbf{u}_{(0)}$ — смещения, соответствующие решению уравнений объединения элементов; $\mathbf{u}^\alpha+\delta\mathbf{u}^\alpha,\ \mathbf{u}_{(0)}+\delta\mathbf{u}_{(0)}$ — какие-либо смещения, удовлетворяющие граничным условиям для смещений на границе объединения элементов, причем

$$\delta\mathbf{u}^\alpha=\delta\mathbf{u}^\alpha_{(0)}+\delta\mathbf{u}^\alpha_{(1)}\xi^\alpha,\quad \delta\mathbf{p}^\alpha=\delta\mathbf{p}^\alpha_{(0)}+\delta\mathbf{p}^\alpha_{(1)}\xi^\alpha,$$

$$\delta\mathbf{u}^\alpha_{(0)}-\delta\mathbf{u}_{(0)}=\frac{1}{\sigma_0}\Lambda^\alpha\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\delta\mathbf{p}^\alpha.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\sqrt{g}\mathbf{f}\right)\cdot\delta\mathbf{u}_{(0)}d\xi^1d\xi^2=0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\cdot\delta\mathbf{u}^\alpha-\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\delta\mathbf{p}^\alpha+\sqrt{g}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{u}_{(0)}\right]d\xi^1d\xi^2=0,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\mathbf{p}^\alpha\cdot\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\delta\mathbf{u}^\alpha-\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\delta\mathbf{u}^\alpha\cdot\mathbf{e}_i\right)\right]d\xi^1d\xi^2=0,$$

и, следовательно,

$$\delta\Psi=\delta\Bigg\{\frac{1}{2}\sum_\omega\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\left[\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}-2\sqrt{g}\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}_{(0)}\right]d\xi^1d\xi^2\Bigg\}-\sum_\sigma\int\limits_{\Gamma_\sigma}\mathbf{p}^\alpha_{(0)}\cdot\delta\mathbf{u}^\alpha d\Gamma_\sigma=0. \tag{29}$$

В (29) предполагается, что $\dfrac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}$ выражены через $\mathbf{u}^\alpha_{(0)},\ \mathbf{u}_{(0)}$; $\sum\limits_\sigma$ — сумма тех граней, составляющих границу объединения элементов, на которых заданы усилия.

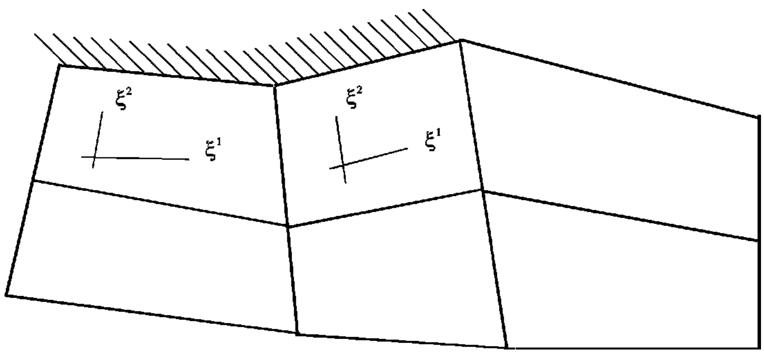

Рис. 6.

Из (29) следует, что при смещениях $\mathbf{u}^{\alpha}_{(0)}$, $\mathbf{u}_{(0)}$, соответствующих решению уравнений объединения элементов, функционал Ψ имеет экстремальное значение в классе смещений $\mathbf{u}^{\alpha}_{(0)}$, $\mathbf{u}_{(0)}$, удовлетворяющих граничным условиям. Нетрудно показать, что этот экстремум — максимум.

8. Сходимость решений

Пусть $\mathbf{p}^{\alpha}_{*}$, $\mathbf{u}_{*}$ — точное решение задачи теории упругости в области, занятой объединением элементов. Полагаем, что граничные условия на границе объединения элементов удовлетворяют условию

$$\sum_{\omega}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial}{\partial\xi^{\alpha}}\Big[\big(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha}\big)\big(\mathbf{u}_{*}-\mathbf{u}^{\alpha}\big)\Big]d\xi^{1}d\xi^{2}=0. \tag{30}$$

Обозначим

$$\mathbf{f}_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{f}\sqrt{g}d\xi^{1}d\xi^{2},\quad A^{\alpha\beta li}=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{k}}\sqrt{g}d\xi^{1}d\xi^{2}.$$

Согласно (22), (23),

$$\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}+\mathbf{f}_0=\mathbf{0},\quad \mathbf{p}^{\alpha}_{(0)}-A^{\alpha\beta li}\left(\frac{\partial\mathbf{u}^{\beta}}{\partial\xi^{\beta}}\cdot\mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_i=0. \tag{31}$$

Из (30), (31) и уравнений

$$\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}+\sqrt{g}\mathbf{f}_0=\mathbf{0},\quad \mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{k}}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_{*}}{\partial\xi^{\beta}}\cdot\mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_i=\mathbf{0}$$

следует

$$\frac{\partial(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha})}{\partial\xi^{\alpha}}+\sqrt{g}\mathbf{f}-\mathbf{f}_0=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Bigg[\big(\mathbf{u}_{*}-\mathbf{u}^{\alpha}\big)\cdot\frac{\partial\big(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha}\big)}{\partial\xi^{\alpha}}+\big(\mathbf{u}^{\alpha}-\mathbf{u}_{(0)}\big)\cdot\frac{\partial\big(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha}\big)}{\partial\xi^{\alpha}}+$$

$$+\big(\sqrt{g}\mathbf{f}-\mathbf{f}_0\big)\cdot\mathbf{u}_{*}\Bigg]d\xi^{1}d\xi^{2}=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(\mathbf{u}^{\alpha}-\mathbf{u}_{(0)}\big)\cdot\frac{\partial\big(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha}\big)}{\partial\xi^{\alpha}}d\xi^{1}d\xi^{2}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Bigg[\big(\mathbf{u}^{\alpha}-\mathbf{u}^{\alpha}_{(0)}\big)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}+\big(\mathbf{u}^{\alpha}_{(0)}-\mathbf{u}_{(0)}\big)\cdot\frac{\partial\big(\mathbf{p}^{\alpha}_{*}-\mathbf{p}^{\alpha}\big)}{\partial\xi^{\alpha}}\Bigg]d\xi^{1}d\xi^{2}=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\Bigg[\big(\mathbf{u}^{\alpha}-\mathbf{u}^{\alpha}_{(0)}\big)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}+\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}-\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\Bigg]d\xi^{1}d\xi^{2}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\mathbf{u}_*^\alpha-\mathbf{u}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{p}_*^\alpha-\mathbf{p}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}+\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_*^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right]d\xi^1d\xi^2=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\left(\mathbf{u}_{(0)}^\alpha-\mathbf{u}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_*^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^\alpha\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}+\left(\mathbf{f}_0-\sqrt{g}\mathbf{f}\right)\mathbf{u}_*\right]d\xi^1d\xi^2. \tag{32}$$

Из (31) следует

$$\mathbf{p}_*^\alpha-\mathbf{p}_{(0)}^\alpha=\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\left(\frac{\partial\mathbf{u}_*}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_i-A^{\alpha\beta li}\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\mathbf{e}_i,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\mathbf{p}_*^\alpha-\mathbf{p}_{(0)}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}\,d\xi^1d\xi^2=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\beta\right)}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right]\left[\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}-A^{\alpha\beta li}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\left[\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right]\right\}d\xi^1d\xi^2. \tag{33}$$

Так как

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\mathbf{p}^\alpha-\mathbf{p}_{(0)}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\,d\xi^1d\xi^2=0,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}-A^{\alpha\beta li}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\alpha}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right)d\xi^1d\xi^2=0,$$

то равенство (33) можно записать в виде

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\mathbf{p}_*^\alpha-\mathbf{p}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}\,d\xi^1d\xi^2=$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\left[\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\beta\right)}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right]\left[\frac{\partial\left(\mathbf{u}_*-\mathbf{u}^\alpha\right)}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right]d\xi^1d\xi^2+\right.$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}-A^{\alpha\beta li}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^\beta}{\partial\xi^\beta}\cdot\mathbf{e}_l\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}_*}{\partial\xi^\alpha}\cdot\mathbf{e}_i\right)d\xi^1d\xi^2+$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\mathbf{p}_{(0)}^\alpha-\mathbf{p}^\alpha\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_*}{\partial\xi^\alpha}d\xi^1d\xi^2=0. \tag{34}$$

Согласно (30), (32) и (34),

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{k}}\left[\frac{\partial\big(\mathbf{u}_{*}-\mathbf{u}^{\beta}\big)}{\partial\xi^{\beta}}\cdot\mathbf{e}_{l}\right]\left[\frac{\partial\big(\mathbf{u}_{*}-\mathbf{u}^{\alpha}\big)}{\partial\xi^{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{i}\right]d\xi^{1}d\xi^{2}+\right.$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}+\right.$$

$$+\big(\mathbf{u}^{\alpha}-\mathbf{u}_{(0)}^{\alpha}\big)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}+\big(\mathbf{p}^{\alpha}-\mathbf{p}_{(0)}^{\alpha}\big)\cdot\frac{\partial\mathbf{u}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}+\big(\sqrt{g}\mathbf{f}-\mathbf{f}_0\big)\mathbf{u}_{*}+$$

$$\left.+\left(A^{\alpha\beta li}-\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\frac{\partial\xi^{\beta}}{\partial x^{k}}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}^{\beta}}{\partial\xi^{\beta}}\cdot\mathbf{e}_{l}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{u}_{*}}{\partial\xi^{\alpha}}\cdot\mathbf{e}_{i}\right)\right\}d\xi^{1}d\xi^{2}=0. \tag{35}$$

Из (35) следует

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}\leqslant\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}+O(h).$$

Очевидно,

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma_0}\left(\Lambda^{\alpha}\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{p}_{*}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\,d\xi^{1}d\xi^{2}\right)^{1/2}. \tag{36}$$

При измельчении элементов, согласно (2), $\alpha_i,\quad \beta_i,\quad \gamma_i\to 0$. Следовательно, согласно (3)–(5), $x^i_{,k}\to 0,\quad \sqrt{g}\to 0,\quad \sqrt{g}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\to 0$ и $\mathbf{p}_{*}^{\alpha}=\sigma_{*}^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{j}}\,\mathbf{e}_i\to 0$ при ограниченных σ_{*}^{ij}. Отсюда и из (35), (36) следует сходимость.

9. Уравнения жесткости элемента на основе квадратичной аппроксимации векторов смещений

Наряду с указанным в разделе 5 вариантом уравнений жесткости элемента (22), (23) возможны и другие варианты. Один из них основан на квадратичной аппроксимации векторов смещений. Как и в разделе 5, полагаем, что усилия аппроксимируются линейными полиномами

$$\mathbf{p}^{\alpha}=\mathbf{p}_{(0)}^{\alpha}+\mathbf{p}_{(1)}^{\alpha}\xi^{\alpha}\quad(\alpha=1,\,2),$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}+\mathbf{f}_0=0,\quad \mathbf{f}_0=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{f}\sqrt{g}d\xi^{1}d\xi^{2}. \tag{37}$$

Аппроксимацию векторов смещений строим по правилу

$$\mathbf{p}^{\alpha}\sim\frac{\partial\mathbf{u}^{\alpha}}{\partial\xi^{\alpha}}\ (\alpha=1,\,2),$$

т. е.

$$\mathbf{u}^\alpha = \mathbf{u}_{(0)} + \mathbf{u}_{(1)} P^\alpha_{(1)} + \mathbf{u}_{(2)} P^\alpha_{(2)}, \quad P^\alpha_{(k)} = P_k(\xi^\alpha)\ (\alpha = 1,\, 2), \tag{38}$$

где $P_k(\xi^\alpha)$ — полином Лежандра k-й степени. В (37), (38) векторы $\mathbf{p}^\alpha_{(k)}$, $\mathbf{u}_{(k)}$ — постоянны в пределах элемента. Полагаем, что они связаны уравнениями

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left[\mathbf{p}^\alpha - \sqrt{g} a^{ijkl} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{e}_l\right) \mathbf{e}_i\right] P^\alpha_{(k)} d\xi^1 d\xi^2 = 0 \quad (k = 0,\, 1). \tag{39}$$

Векторы $\mathbf{p}^\alpha$, $\mathbf{u}^\alpha$, удовлетворяющие условиям (37) – (39), обладают энергетическим свойством

$$\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \left(\mathbf{u}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{p}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \mathbf{p}^\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} + \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{u}_{(0)}\right) d\xi^1 d\xi^2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{g} a^{ijkl} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\beta}{\partial \xi^\beta} \cdot \mathbf{e}_l\right) \left(\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \cdot \mathbf{e}_i\right) d\xi^1 d\xi^2.$$

Это свойство обеспечивает существование и единственность решения системы уравнений, состоящей из (37) – (39) и соответствующих граничных условий. В частности, (37) – (39) можно записать в виде уравнений жесткости элемента (т.е уравнений, связывающих усилия на гранях элемента со смещениями граней).

Сравним полученные уравнения с уравнениями жесткости (22), (23), сформулированными в разделе 5. Обозначим

$$\mathbf{p}^\alpha_\pm = \mathbf{p}^\alpha\big|_{\xi^\alpha = \pm 1}, \quad \mathbf{u}^\alpha_\pm = \mathbf{u}^\alpha\big|_{\xi^\alpha = \pm 1}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{u}^\alpha_{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - \mathbf{u}_{(0)}, \quad \mathbf{u}^\alpha_{(1)} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ - \mathbf{u}^\alpha_-),$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \left[\frac{3}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - 3\mathbf{u}_{(0)}\right] P^\alpha_{(1)} + \mathbf{u}^\alpha_{(1)},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = 3\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - \mathbf{u}_{(0)}\right] P^\alpha_{(1)} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ - \mathbf{u}^\alpha_-). \tag{40}$$

Заметим, что по уравнениям (22)

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ - \mathbf{u}^\alpha_-).$$

Если при вычислении интегралов в (39) величины

$$\sqrt{g} a^{ijkl} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}$$

в пределах элемента считать постоянными и равными, например, их средним значениям

$$\left(\sqrt{g} a^{ijkl} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k}\right)_{(0)} = \frac{1}{4}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{g} a^{ijkl} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^k} d\xi^1 d\xi^2,$$

то, согласно (39), (40),

$$\mathbf{p}^\alpha_{(1)} = \mathbf{A}^\alpha \left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - \mathbf{u}_{(0)}\right],$$

$$\mathbf{A}^\alpha = 3\left(\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}\right)_{(0)}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_l. \tag{41}$$

Из (41) следует

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - \mathbf{u}_{(0)} = \mathbf{B}^\alpha\mathbf{p}^\alpha_{(1)}, \tag{42}$$

причем ввиду положительной определенности потенциальной энергии компоненты тензоров $\mathbf{B}^\alpha$ будут удовлетворять условию положительной определенности квадратичной формы

$$\big(\mathbf{B}^\alpha\mathbf{p}^\alpha_{(1)}\big)\mathbf{p}^\alpha_{(1)}.$$

По соотношениям раздела 5 имеем

$$\frac{1}{2}(\mathbf{u}^\alpha_+ + \mathbf{u}^\alpha_-) - \mathbf{u}_{(0)} = \frac{1}{\sigma_0}\mathbf{\Lambda}^\alpha\mathbf{p}^\alpha_{(1)}. \tag{43}$$

Сравнивая (42) и (43), находим, что эти уравнения совпадают, если в качестве тензоров $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ принять тензоры $\sigma_0\mathbf{B}^\alpha$.

В случае, когда при вычислении интегралов в (23), (39) величины

$$\sqrt{g}a^{ijkl}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^k}$$

считаются постоянными, уравнения жесткости (37), (39) могут отличаться от уравнений жесткости (22), (23) лишь в силу отличия (42) от (43) и, следовательно, совпадают, если в качестве тензоров $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ принимаются тензоры $\sigma_0\mathbf{B}^\alpha$.

10. Уравнения жесткости прямоугольного элемента

В прямоугольном элементе со сторонами, параллельными осям декартовой системы координат,

$$x^1_1 = x^1_4, \quad x^1_2 = x^1_3, \quad x^2_4 = x^2_3, \quad x^2_1 = x^2_2,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}h_1, \quad \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}h_2,$$

$$h_1 = x^1_2 - x^1_1, \quad h_2 = x^2_4 - x^2_1, \quad \sqrt{g} = \frac{1}{4}h_1h_2,$$

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x^1} = \frac{2}{h_1}, \quad \frac{\partial\xi^2}{\partial x^2} = \frac{2}{h_2}, \quad \frac{\partial\xi^1}{\partial x^2} = \frac{\partial\xi^2}{\partial x^1} = 0,$$

$$\mathbf{p}^\alpha = \frac{1}{2}(p_{1\alpha}\mathbf{e}_1 + p_{2\alpha}\mathbf{e}_2), \quad p_{1\alpha} = h_2\sigma_{\alpha 1}, \quad p_{2\alpha} = h_1\sigma_{\alpha 2}, \quad (\alpha = 1,\, 2).$$

Соответствующие соотношениям (37) – (39) уравнения жесткости элемента с индексами $n + 1/2,\ m + 1/2$ в случае закона Гука

$$\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = b\varepsilon_{11} + a\varepsilon_{22}, \quad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}$$

можно записать в виде

$$(p^0_{ij} - \tilde{u}^0_{ij})_{n+1/2,\, m+1/2} = 0, \quad (p^1_{ij} - \tilde{u}^1_{ij} - c_{ij})_{n+1/2,\, m+1/2} = 0, \tag{44}$$

где

$$\tilde{u}^0_{11} = \frac{h_2}{h_1} a u^1_{11} + b u^1_{22}, \quad \tilde{u}^0_{12} = \mu\left(\frac{h_1}{h_2} u^1_{12} + u^1_{21}\right),$$

$$\tilde{u}^0_{22} = \frac{h_1}{h_2} a u^1_{22} + b u^1_{11}, \quad \tilde{u}^0_{21} = \mu\left(\frac{h_2}{h_1} u^1_{21} + u^1_{12}\right),$$

$$\tilde{u}^1_{11} = 4\lambda_{11}(u^0_{11} - u^0_{12}), \quad \tilde{u}^1_{22} = 4\lambda_{22}(u^0_{22} - u^0_{21}),$$

$$\tilde{u}^1_{12} = 4\lambda_{12}(u^0_{12} - u^0_{11}), \quad \tilde{u}^1_{21} = 4\lambda_{21}(u^0_{21} - u^0_{22}),$$

$$p^1_{i1,\, n+1/2,\, m+1/2} = p_{i1,\, n+1,\, m+1/2} - p_{i1,\, n,\, m+1/2},$$

$$p^1_{i2,\, n+1/2,\, m+1/2} = p_{i2,\, n+1/2,\, m+1} - p_{i2,\, n+1/2,\, m},$$

$$p^0_{i1,\, n+1/2,\, m+1/2} = \frac{1}{2}(p_{i1,\, n+1,\, m+1/2} + p_{i1,\, n,\, m+1/2}),$$

$$p^0_{i2,\, n+1/2,\, m+1/2} = \frac{1}{2}(p_{i2,\, n+1/2,\, m+1} + p_{i2,\, n+1/2,\, m}) \quad (i = 1,\, 2),$$

$$\lambda_{11} = \frac{3\frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2}, \quad \lambda_{22} = \frac{3a\frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2},$$

$$\lambda_{12} = \frac{3\mu\frac{h_1}{h_2}}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}, \quad \lambda_{21} = \frac{3\mu\frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2},$$

$$c_{11} = \frac{h_1 h_2}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} f^0_1, \quad c_{22} = \frac{h_1 h_2}{1 + \frac{\mu}{a}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2} f^0_2,$$

$$c_{12} = \frac{h_1 h_2}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2} f^0_1, \quad c_{21} = \frac{h_1 h_2}{1 + \frac{a}{\mu}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2} f^0_2,$$

a, b, μ — коэффициенты закона Гука, f^0_1, f^0_2 — средние по площади элемента значения объемных сил,

$$u^1_{i1,\, n+1/2,\, m+1/2} = u_{i1,\, n+1,\, m+1/2} - u_{i1,\, n,\, m+1/2},$$

$$u^1_{i2,\, n+1/2,\, m+1/2} = u_{i2,\, n+1/2,\, m+1} - u_{i2,\, n+1/2,\, m},$$

$$u^0_{i1,\, n+1/2,\, m+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i1,\, n+1,\, m+1/2} + u_{i1,\, n,\, m+1/2}),$$

$$u^0_{i2,\, n+1/2,\, m+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i2,\, n+1/2,\, m+1} + u_{i2,\, n+1/2,\, m}) \quad (i = 1,\, 2).$$

Величины $p_{i1,\, n,\, m+1/2}$, $p_{i2,\, n+1/2,\, m}$, $u_{i1,\, n,\, m+1/2}$, $u_{i2,\, n+1/2,\, m}$ означают действующие на гранях усилия (рис. 7, *а*) и смещения (рис. 7, *б*). Стрелками на рисунках показаны направления действия положительных значений усилий и смещений.

Уравнения жесткости (44) соответствуют уравнениям (22), (23) в случае, когда в качестве тензоров $\mathbf{\Lambda}^\alpha$ принять тензоры

$$\mathbf{\Lambda}^\alpha = \Lambda^\alpha_{ij}\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j, \quad \Lambda^\alpha_{12} = \Lambda^\alpha_{12} = 0 \ (\alpha = 1,\, 2),$$

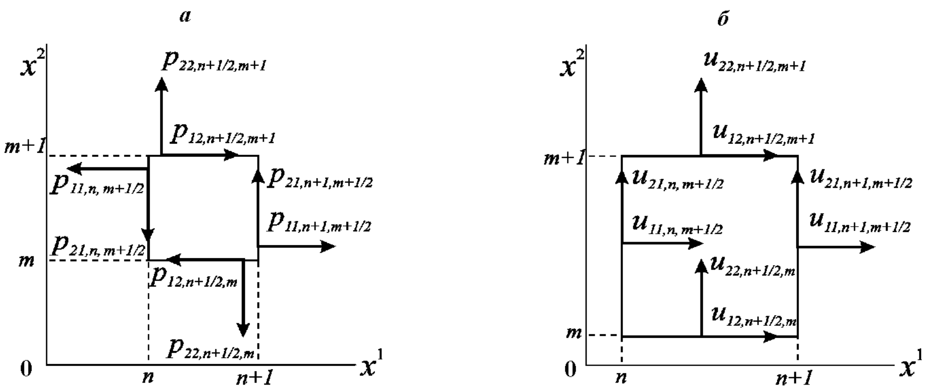

Рис. 7.

$$\Lambda_{11}^1 = \frac{\sigma_0 h_1}{3ah_2}, \quad \Lambda_{22}^1 = \frac{\sigma_0 h_1}{3\mu h_2}, \quad \Lambda_{11}^2 = \frac{\sigma_0 h_2}{3\mu h_1}, \quad \Lambda_{22}^2 = \frac{\sigma_0 h_2}{3ah_1}.$$

Задача для прямоугольной области из $N \times M$ элементов состоит в решении системы алгебраических уравнений (44) при $n \in [0,\ N-1]$, $m \in [0,\ M-1]$, дополненной граничными условиями типа

$$\big[(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})\big]_{n+1/2,\,0} = 0,$$

$$\big[(1 - z_{i2})(u_{i2} - \hat{u}_{i2}) + z_{i2}(p_{i2} - \hat{p}_{i2})\big]_{n+1/2,\,M} = 0\ (n \in [0,\ N-1]),$$

$$\big[(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})\big]_{0,\,m+1/2} = 0,$$

$$\big[(1 - z_{i1})(u_{i1} - \hat{u}_{i1}) + z_{i1}(p_{i1} - \hat{p}_{i1})\big]_{N,\,m+1/2} = 0\ (m \in [0,\ M-1]), \tag{45}$$

где числа $z_{i2,\,n+1/2,\,0}$, $z_{i2,\,n+1/2,\,M}$ $(n \in [0,\ N-1])$, $z_{i1,\,0,\,m+1/2}$, $z_{i1,\,N,\,m+1/2}$ $(m \in [0,\ M-1])$ равны нулю, если на соответствующих гранях элементов заданы смещения, и единице, если заданы усилия; величины $\hat{u}_{ij}$, $\hat{p}_{ij}$ равны заданным значениям смещений и усилий либо нулю, если соответствующие значения не заданы.

Система алгебраических уравнений (44), (45) может быть решена любым известным итерационным или прямым методом численного решения систем линейных алгебраических уравнений. Эффективные методы решения этой системы — предмет отдельной статьи.

В качестве тестовой задачи рассмотрим прямоугольную область 8×8 элементов, в которой задано поле смещений

$$u_1 = x^1 x^2 (x^1 + x^2), \quad u_2 = x^1 x^2 (x^1 - x^2). \tag{46}$$

Подставляя выражения (46) в (21), из уравнений (18) находим массовые силы

$$f_1 = 4[(b - a + \mu)x^2 - (b + 2\mu)x^1], \quad f_2 = 4[(a - b - \mu)x^1 - (b + 2\mu)x^2].$$

Величины f_1^0, f_2^0, используемые в уравнениях (44), получаются путем осреднения f_1 и f_2 в пределах элемента. Граничные условия заданы в смещениях.

Для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-4}$ методом локальных вариаций [8] потребовалось 45 итераций, методом самоуравновешенных невязок [9] — 27.

Примеры использования непрямоугольных элементов приведены в [10, 11], где исследовалось предельное состояние при упругопластическом деформировании тонких прослоек.

Список литературы

[1] Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике.* Мир, М., 1975.

[2] Галлагер Р. *Метод конечных элементов.* Мир, М., 1984.

[3] Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов.* Мир, М., 1977.

[4] Argyris J. H., Lazarus L. P. A natural triangular layered element for bending analysis of isotropic, sandwich, laminated composite and hybrid plates. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, No. 109, 1993.

[5] Phillips T. N., Rose M. E. A finite difference scheme for the equilibrium equations of elastic bodies. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **7**, No. 1, 1986.

[6] Lustman L. R., Rose M. E. A three dimensional calculation of elastic equilibrium for composite materials. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, **26**, 1988.

[7] Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности.* Мир, М., 1987.

[8] Черноусько Ф. Л., Баничук Н. В. *Вариационные задачи механики и управления.* Наука, М., 1973.

[9] Волчков Ю. М., Иванов Г. В., Иванова О. Н. Вычисление плоских равновесных форм тонких стержней методом самоуравновешенных невязок. *Журн. прикл. мех. и техн. физ.*, №2, 1994.

[10] Иванов Г. В., Кургузов В. Д. Безмоментная модель упругопластического деформирования и предельного состояния тонких прослоек. *Там же*, №6, 1994.

[11] Иванов Г. В., Кургузов В. Д. Волны смещений и локализация деформаций при растяжении полосы с упругопластическими прослойками. *Там же*, №2, 1995.

Поступила в редакцию 8 апреля 1996 г.