

# НАЧАЛЬНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ЗАКРУЧЕННЫХ ГАЗОВЫХ ОБЪЕМОВ, ПРИМЫКАЮЩИХ К ВАКУУМУ\*

С. Л. ДЕРЯБИН

*Уральский государственный университет путей сообщения*

*Екатеринбург, Россия*

e-mail: SDeryabin@math.usart.ru

We study flows of an ideal polytropic gas, which appear when the gas begins to disperse into vacuum or when a two-dimension axisymmetric gas volume collapses. We investigate the case when the vector of gas velocity lays in the plane, tangential to free surface between gas and vacuum. A solution is constructed in the form of converging series. It is proved that each gas particle on the free surface moves with its own constant velocity along its own straight line.

## Введение

Задачи об истечении газа в вакуум рассматривались ранее [1–8]. В [1] решение задачи об истечении в вакуум впервые было построено в виде характеристических рядов в окрестности звуковой характеристики, отделяющей исходное фоновое течение от искомой волны разрежения. В задачах [2–5] исследование проведено во всей области определения волны разрежения вплоть до свободной границы, при этом выявлены принципиально различные случаи: вектор скорости газа не лежит [2, 3] и лежит [4, 5] в касательной плоскости к свободной поверхности.

Доказано [2], что при схлопывании одномерной полости свободная поверхность некоторое время движется с постоянной скоростью. Этот результат обобщен на случай двумерных и трехмерных течений [3], а также трехмерных течений в условиях действия внешних массовых сил [6] и одномерных течений в условиях самогравитации [7, 8].

Если свободная поверхность является плоскостью или линейчатой поверхностью и вектор скорости газа в начальный момент времени лежит на образующей этой поверхности, то доказано [4, 5], что свободная поверхность заведомо некоторое время стоит на месте и частицы газа движутся вдоль образующих этой поверхности.

В данной работе исследуется случай, когда газовое тело в начальный момент времени является двумерным осесимметричным и начальные условия обеспечивают закрутку газа на свободной поверхности (рис. 1).

---

\* Данное исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01122, № 04-01-00205).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

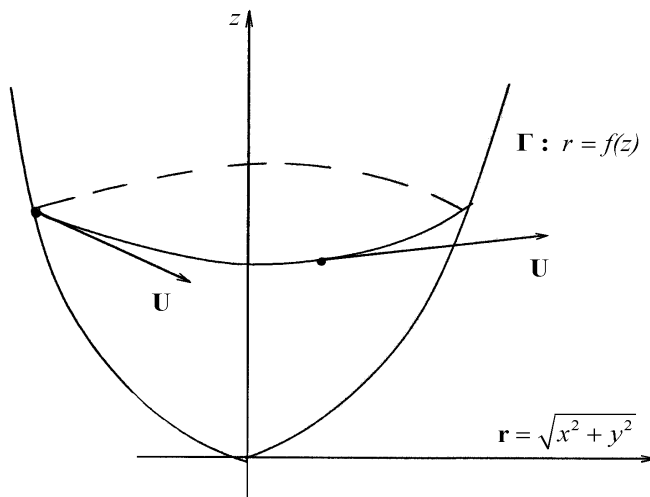


Рис. 1.

Естественно, что возникновение подобных течений возможно только при специально подобранных начальных данных. Тем не менее имеются содержательные примеры таких течений. Так, в случае, когда снаружи от осесимметричной поверхности находится газ, а внутри — вакуум, то такое течение можно использовать для приближенного моделирования нижней части закрученных потоков типа торнадо. Если снаружи от поверхности вакуум, а внутри газ, то получающееся решение описывает головную часть закрученных струйных течений.

## 1. Постановка задачи о распаде разрыва и построение фонового течения

Пусть в момент  $t = 0$  осесимметричная поверхность

$$\Gamma : r = f(z),$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $z = x_3$ , отделяет идеальный политропный газ от вакуума. Не нарушая общности, можно считать, что  $f(0) = 0$ , т.е. при  $z = 0$  у тела образуется “носик” (в простейшем случае вершина конуса) (см. рис. 1).

В задаче о схлопывании полости предполагается, что газ находится снаружи, а внутри полости — вакуум. Если внутри поверхности находится газ, а снаружи — вакуум, то это задача о разлете газа. При этом в момент  $t = 0$  известны распределения параметров газа:  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$  — вектора скорости газа;  $S = S_0(\mathbf{x})$  — энтропии;  $\sigma = \sigma_0(\mathbf{x})$  — функции, связанной с плотностью газа  $\rho$  соотношением  $\sigma = \rho^{\frac{(\gamma-1)}{2}}$ ,  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы газа,  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Функция, задающая поверхность  $\Gamma$ , а также функции  $\mathbf{U}_0, S_0, \sigma_0$  предполагаются аналитическими, а скорость звука газа  $c = S\sigma$  всюду больше нуля, в том числе  $\sigma_0(\mathbf{x})|_{\Gamma} > 0$ . Функции  $\mathbf{U}_0, S_0, \sigma_0$  не являются произвольными, их значения на поверхности  $\Gamma$  подобраны так, чтобы вектор истечения газа лежал в касательной плоскости к поверхности  $\Gamma$  параллельно плоскости  $z = 0$ . Конкретный вид этих значений будет приведен ниже.

В момент  $t = 0$  начинается движение газа, определяемое заданными при  $t = 0$  распределениями  $\mathbf{U}_0, S_0, \sigma_0$ , которое в дальнейшем будем называть фоновым течением.

Кроме того, предполагается, что в момент  $t = 0$  поверхность  $\Gamma$  мгновенно разрушается и начинается истечение части газа в вакуум. Возмущения, возникшие в фоновом течении в результате мгновенного разрушения поверхности  $\Gamma$ , распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей  $\Gamma_1$ , являющейся поверхностью слабого разрыва. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму:  $\sigma_0(\mathbf{x})|_{\Gamma_0} = 0$ , где  $\Gamma_0$  — свободная поверхность, отделяющая волну разрежения от вакуума.

Требуется построить как фоновое течение, так и волну разрежения, а также найти законы движения  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$ , т. е. построить решение задачи о распаде разрыва в случае, когда в начальный момент времени стенка  $\Gamma$  отделяет от вакуума газ со строго положительными значениями плотности.

Рассматривается система уравнений, описывающая неизоэнтропические течения идеального политропного газа в цилиндрических координатах [9]

$$\begin{aligned} \sigma_t + \sigma_r u + \frac{1}{r} \sigma_\varphi v + \sigma_z w + \frac{\gamma - 1}{2} \sigma \left[ u_r + \frac{1}{r} (u + v_\varphi) + w_z \right] &= 0, \\ u_t + u_r u + \frac{1}{r} u_\varphi v + u_z w - \frac{1}{r} v^2 + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 \sigma \sigma_r + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 S S_r &= 0, \\ v_t + v_r u + \frac{1}{r} v_\varphi v + v_z w + \frac{1}{r} u v + \frac{2}{(\gamma - 1)r} S^2 \sigma \sigma_\varphi + \frac{2}{\gamma r} \sigma^2 S S_\varphi &= 0, \\ w_t + w_r u + \frac{1}{r} w_\varphi v + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 \sigma \sigma_z + \frac{2}{\gamma} \sigma^2 S S_z &= 0, \\ S_t + S_r u + \frac{1}{r} S_\varphi v + S_z w &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $u, v, w$  — проекции вектора скорости газа на координатные оси  $(r, \varphi, z)$  соответственно.

Поскольку система (1.1) при  $r = 0$  имеет особенность, то точки, лежащие на оси симметрии, в задаче о распаде разрыва рассматриваться не будут.

Пусть для системы (1.1) при  $t = 0$  заданы начальные данные

$$\begin{aligned} \sigma(0, r, \varphi, z) &= \sigma_0(r, \varphi, z), \\ \mathbf{U}(0, r, \varphi, z) &= \mathbf{U}_0(r, \varphi, z), \\ S(0, r, \varphi, z) &= S_0(r, \varphi, z). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Причем предполагается, что на поверхности  $\Gamma$  при  $t = 0$  они будут принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} \sigma_0|_\Gamma &= \sigma_0(z) > 0, \\ S_0|_\Gamma &= S_0(z) > 0, \\ u_0|_\Gamma &= \pm \frac{2}{\gamma - 1} \sigma_0(z) S_0(z) \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(z)}}, \\ v_0|_\Gamma &= \omega f(z), \quad \omega = \text{const} > 0, \\ w_0|_\Gamma &= \mp \frac{2}{\gamma - 1} \sigma_0(z) S_0(z) \frac{f'(z)}{\sqrt{1 + f'^2(z)}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Верхний знак в формулах для  $u_0, w_0$  означает, что вакуум — между осью  $0z$  и поверхностью  $\Gamma$ , а газ — снаружи. Нижний знак означает, что между осью  $0z$  и поверхностью  $\Gamma$  находится газ, а вакуум — снаружи.

Поскольку рассматриваемая система (1.1) является системой типа систем Ковалевской, а начальные данные — аналитические функции, то задача Коши (1.1), (1.2) по теореме Ковалевской [10] имеет при малых  $t$  единственное аналитическое решение, которое и задает фоновое течение. По построенному фоновому течению однозначно строится (например, в виде рядов по степеням  $t$ ) закон движения поверхности слабого разрыва  $\Gamma_1$  ( $r = r_0(t, \varphi, z)$ ) как аналитическое решение соответствующей [11] задачи Коши

$$[r_0(u - r_{0t}) - r_{0\varphi}v - r_{0z}w]^2 = S^2\sigma^2(r_0 + r_{0\varphi}^2 + r_{0z}^2), \quad r_0(0, \varphi, z) = f(z).$$

Имея закон движения  $\Gamma_1$ , являющейся звуковой характеристикой фонового течения, получим значения параметров газа на ней:

$$\begin{aligned} \sigma|_{\Gamma_1} &= \sigma^0(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, \varphi, z)}, \\ \mathbf{U}|_{\Gamma_1} &= \mathbf{U}^0(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, \varphi, z)}, \\ S|_{\Gamma_1} &= S^0(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0(t, \varphi, z)}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В дальнейшем будут предполагаться известными: фоновое течение, поверхность  $\Gamma_1$ , значения  $\sigma^0$ ,  $\mathbf{U}^0$ ,  $S^0$ , заданные с помощью аналитических функций.

Для построения волны разрежения, как и в [3–8], поменяем ролями одну из независимых переменных  $r$  и одну из неизвестных функций  $\sigma$ , т. е. за независимые переменные возьмем  $t$ ,  $\sigma$ ,  $\varphi$ , а за неизвестные функции —  $r$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $S$ . Якобиан такого преобразования  $J = r_\sigma$ . В результате этой замены вместо (1.1) получим систему

$$\begin{aligned} r_t &= u - \frac{1}{r}r_\varphi v - r_z w + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma \left[ u_\sigma + \frac{1}{r}(r_\sigma u + r_\sigma v_\varphi - r_\varphi v_\sigma) + r_\sigma w_z - r_\varphi w_\sigma \right], \\ r_\sigma \left[ u_t + \frac{1}{r}(u_\varphi - v)v + u_z w \right] &+ (u - r_t)u_\sigma - \frac{r_\varphi}{r}v u_\sigma - r_z w u_\sigma + \\ &+ \frac{2}{\gamma - 1}S^2\sigma + \frac{2}{\gamma}\sigma^2 S S_\sigma = 0, \\ r_\sigma \left[ v_t + \frac{1}{r}(v_\varphi + u)v + v_z w \right] &+ (u - r_t)v_\sigma - \frac{r_\varphi}{r}v v_\sigma - r_z w v_\sigma - \\ &- \frac{2}{(\gamma - 1)r}S^2\sigma r_\varphi + \frac{2}{\gamma}\sigma^2 S(r_\sigma S_\varphi - r_\varphi S_\sigma) = 0, \\ r_\sigma \left[ w_t + \frac{1}{r}w_\varphi + v_z w \right] &+ (u - r_t)w_\sigma - \frac{r_\varphi}{r}v w_\sigma - r_z w w_\sigma - \\ &- \frac{2}{\gamma - 1}S^2\sigma r_z + \frac{2}{\gamma}\sigma^2 S(r_\sigma S_z - r_z S_\sigma) = 0, \\ r_\sigma \left[ S_t + \frac{1}{r}S_\varphi + S_z w \right] &+ (u - r_t)S_\sigma - \frac{r_\varphi}{r}v S_\sigma - r_z w S_\sigma = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Течение в области между  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  (в области волны разрежения) будем строить как решение системы (1.5) с данными (1.4) на характеристике  $\Gamma_1$ . Поскольку  $\Gamma_1$  — характеристика кратности один, то для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [12, 13]. Если бы поверхность  $\Gamma$  убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Если же поверхность  $\Gamma$  убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных  $(t, \sigma, \varphi, z)$  служит [3–8] соотношение

$$r(0, \sigma, \varphi, z) = f(z). \quad (1.6)$$

Это условие получается следующим образом: если функцию  $r$ , получившуюся при решении задачи о распаде разрыва, рассмотреть при изменении времени от  $t > 0$  к  $t = 0$ , то при  $t \rightarrow 0$  поверхность  $r = r(t, \sigma, \varphi, z)$  вне зависимости от  $\sigma, \varphi$  перейдет в начальную поверхность  $\Gamma : r = f(z)$ . Таким образом, для описания волны разряжения между  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_0$  имеем начально-краевую задачу (1.4)–(1.6), которая в дальнейшем и будет называться задачей о распаде разрыва.

## 2. Построение волны разрежения

**Теорема 2.1.** *Существует  $t_0 > 0$  такое, что при  $0 < t < t_0$  в некоторой окрестности  $\Gamma_1$  существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) о распаде разрыва.*

Доказательство теоремы состоит, как и в [2–8], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [12, 13]. Детали доказательства здесь не приводятся. При этом, как отмечалось выше, точки на оси симметрии ( $r = 0$ ) не рассматриваются.

Для выяснения вопроса о том, входит ли поверхность  $\Gamma_0$  в область существования решения задачи (1.4)–(1.6), разложим его в ряд по степеням  $t$ :

$$\mathbf{g}(t, \sigma, \varphi, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}_k(\sigma, \varphi, z) \frac{t^k}{k!}, \quad \mathbf{g} = \{r, u, v, w, S, \}, \quad (2.1)$$

что при малых  $t$  возможно в силу аналитичности решения задачи о распаде разрыва в некоторой окрестности  $\Gamma_1$ .

В системе (1.5) положим  $t = 0$  и, учитывая (1.6), будем иметь

$$\begin{aligned} r_1 &= u_0 - f'(z)w_0 + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma [u_{0\sigma} - f'(z)w_{0\sigma}], \\ [u_{0\sigma} - f'(z)w_{0\sigma}]u_{0\sigma} &= \frac{4}{(\gamma - 1)^2}S_0^2 + \frac{4}{\gamma(\gamma - 1)}\sigma S_0 S_{0\sigma}, \\ [u_{0\sigma} - f'(z)w_{0\sigma}]v_{0\sigma} &= 0, \\ [u_{0\sigma} - f'(z)w_{0\sigma}]w_{0\sigma} &= -\frac{4}{(\gamma - 1)^2}S_0^2 f'(z) - \frac{4}{\gamma(\gamma - 1)}\sigma S_0 S_{0\sigma} f'(z), \\ [u_{0\sigma} - f'(z)w_{0\sigma}]S_{0\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, с учетом условий (1.3) получим

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm 2\alpha\sigma S_0(z) \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(z)}}, \quad 2\alpha = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \\ u_0 &= \pm \frac{2}{\gamma - 1}\sigma S_0(z) \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(z)}}, \quad v_0 = \omega f(z), \\ w_0 &= \mp \frac{2}{\gamma - 1}\sigma S_0(z) \frac{f'(z)}{\sqrt{1 + f'^2(z)}}, \quad S_0 = S_0(z). \end{aligned}$$

Продифференцируем систему (1.5)  $k$  раз по  $t$ , положим  $t = 0$  и, учитывая (1.6) и ранее полученные выражения для  $\mathbf{g}_l(\sigma) = \{r_{l+1}, u_l, v_l, w_l, S_l\}$  ( $l < k$ ), для очередного номера  $k$

имеем

$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= u_k - f'(z)w_k + \frac{\gamma - 1}{2}\sigma [u_{k\sigma} - f'(z)w_{k\sigma}] + G_{1k}(\sigma, \varphi, z), \\
\sigma u_{k\sigma} - 2\alpha k u_k + \frac{\sigma}{\sqrt{1 + f'^2(z)}} [u_{k\sigma} - f'(z)w_{k\sigma}] &= G_{2k}(\sigma, \varphi, z), \\
\sigma v_{k\sigma} - 2\alpha k v_k &= G_{3k}(\sigma, \varphi, z), \\
\sigma w_{k\sigma} - 2\alpha k w_k + \frac{\sigma f'(z)}{\sqrt{1 + f'^2(z)}} [u_{k\sigma} - f'(z)w_{k\sigma}] &= G_{4k}(\sigma, \varphi, z), \\
\sigma S_{k\sigma} - 2\alpha k S_k &= G_{5k}(\sigma, \varphi, z).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь  $G_{1k}$ ,  $G_{2k}$ ,  $G_{3k}$ ,  $G_{4k}$  — функции, зависящие от  $\mathbf{g}_l$  ( $l < k$ ); их вид не приводится ввиду громоздкости.

Умножая четвертое уравнение системы (2.2) на  $f'(z)$  и вычитая его из второго уравнения, получим

$$\sigma [u_k - f'(z)w_k]_\sigma - \alpha k [u_k - f'(z)w_k] = G_{2k}(\sigma, \varphi, z) - f'(z)G_{4k}(\sigma, \varphi, z).$$

Интегрируя полученное уравнение и подставляя его решение в систему (2.2), будем иметь систему, проинтегрировав которую, получим

$$\begin{aligned}
u_k &= \sigma^{2k\alpha} [u_{k0}(\varphi, z) + \int F_{2k}(\sigma)\sigma^{-2\alpha k-1}d\sigma], \\
v_k &= \sigma^{2k\alpha} [u_{k0}(\varphi, z) + \int G_{3k}(\sigma)\sigma^{-2\alpha k-1}d\sigma], \\
w_k &= \sigma^{2k\alpha} [u_{k0}(\varphi, z) + \int F_{4k}(\sigma)\sigma^{-2\alpha k-1}d\sigma], \\
S_k &= \sigma^{2k\alpha} [u_{k0}(\varphi, z) + \int G_{5k}(\sigma)\sigma^{-2\alpha k-1}d\sigma],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_{3k} &= G_{3k} - \frac{\sigma}{\sqrt{1 + f'^2(z)}} [u_{k\sigma} - f'(z)w_{k\sigma}], \\
F_{4k} &= G_{4k} + \frac{\sigma f'(z)}{\sqrt{1 + f'^2(z)}} [u_{k\sigma} - f'(z)w_{k\sigma}].
\end{aligned}$$

Произвольные функции  $u_{k0}$ ,  $v_{k0}$ ,  $w_{k0}$ ,  $S_{k0}$ , появившиеся в результате интегрирования системы (2.3), определяются при помощи условий (1.4). Для этого  $\sigma^0(t, \varphi, z)$  подставляется в правые части рядов (2.1), а  $\mathbf{U}^0(\mathbf{t}, \varphi, \mathbf{z})$ ,  $S^0(t, \varphi, z)$  — в левые. Раскладывая получившиеся коэффициенты по степеням  $t$  и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим линейные алгебраические системы. Условие  $\sigma^0(0, \varphi, z) > 0$  гарантирует, что главные определители этих систем отличны от нуля и, следовательно,  $u_{k0}$ ,  $v_{k0}$ ,  $w_{k0}$ ,  $S_{k0}$  определяются однозначно.

Детальное исследование структуры коэффициентов рядов (2.1) приводит к следующей лемме.

**Лемма 2.1.** *При  $1 < \gamma < 3$  коэффициенты рядов (2.1) при  $k > 1$  имеют вид*

$$\begin{aligned}
r_{k+1} &= d_k(z) + \sigma P_{1k}(\sigma, \sigma \ln \sigma, \sigma^\lambda), \quad u_k = a_k(z) + \sigma P_{2k}(\sigma, \sigma \ln \sigma, \sigma^\lambda), \\
v_k &= b_k(z) + \sigma P_{3k}(\sigma, \sigma \ln \sigma, \sigma^\lambda), \quad w_k = \sigma P_{4k}(\sigma, \sigma \ln \sigma, \sigma^\lambda), \\
S_k &= \sigma P_{5k}(\sigma, \sigma \ln \sigma, \sigma^\lambda),
\end{aligned}$$

где  $P_{ik}$  — многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше  $Ak$ ,  $\lambda > 0$ ,  $A$ ,  $\lambda = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Доказательство леммы аналогично соответствующим доказательствам из [2–8] и проводится индукцией по  $k$ . Сначала доказывается, что  $G_{ki}$  обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что  $\mathbf{g}_k$  обладают указанной структурой. Отметим, что в отличие от [2–6] здесь, как и в задаче об истечении самогравитирующего газа [7, 8], в коэффициентах ряда (2.1) присутствуют слагаемые, у которых нет множителя  $\sigma$ . Это требует более детального исследования структуры коэффициентов. На основании леммы можно утверждать, что решение задачи о распаде разрыва представимо в виде

$$\begin{aligned} r &= r^0(t, z) + \sigma r^1(t, \sigma, \varphi, z), u = U^0(t, z) + \sigma U^1(t, \sigma, \varphi, z), \\ v &= V^0(t, z) + \sigma V^1(t, \sigma, \varphi, z), w = \sigma W^1(t, \sigma, \varphi, z), \\ S &= S_0(z) + \sigma S^1(t, \sigma, \varphi, z). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} r^0(t, z) &= f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(z) \frac{t^k}{k!}, \\ U^0(t, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) \frac{t^k}{k!}, \\ V^0(t, z) &= \omega f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) \frac{t^k}{k!}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для функций  $r^0(t, z)$ ,  $U^0(t, z)$ ,  $V^0(t, z)$  справедлива следующая

**Лемма 2.2.** *Ряды (2.3) решают вспомогательную задачу*

$$\begin{aligned} r_t &= U, \quad r(0, z) = f(z), \\ U_t &= \frac{V^2}{r}, \quad U(0, z) = 0, \\ V_t &= -\frac{UV}{r}, \quad V(0, z) = \omega f(z). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням  $t$  решения задачи (2.4) и сравнением полученных рядов с рядами (2.3). Ряды оказываются равными.

Система (2.4) не имеет особенностей, в предположении, что точки с  $r = 0$  не рассматриваются. Поэтому задача (2.4) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами (2.3). Следовательно, ряды (2.3) сходятся.

На основании приведенных лемм доказывается

**Теорема 2.2.** *Для  $1 < \gamma < 3$  при  $0 < t < t_0$  область сходимости рядов (2.1), а также рядов, задающих  $\mathbf{g}_t$ ,  $\mathbf{g}_\sigma$ ,  $\mathbf{g}_\varphi$ ,  $\mathbf{g}_z$ , покрывает всю область течения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно. При этом закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи (2.4)  $w|_{\Gamma_0} = 0$  и на свободной поверхности сохраняется исходное значение энтропии  $S|_{\Gamma_0} = S_0(z)$ .*

Доказательство теоремы аналогично доказательствам из [2–8] и проводится по методике [13, 14], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной в случае полиномиальной структуры коэффициентов ряда. Локальная сходимость рядов (2.1) в области

$$|z - z_0| < r_1, |\varphi - \varphi_0| < r_2, |\sigma - \sigma_0| < r_3, |t| < r_4; \quad r_1, r_2, r_3, r_4 = \text{const} > 0$$

следует из теоремы 2.1. Поскольку коэффициенты рядов (2.1) есть многочлены от  $\sigma$ ,  $\sigma \ln \sigma$ ,  $\sigma^\lambda$  и степени многочленов не выше  $Ak$ , то доказывается, что существует постоянная  $M > 0$ , такая, что ряды (2.1) сходятся в области

$$M\xi_1\xi_2\xi_3|t| < 1,$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \max\{\sigma, |\sigma \ln \sigma|, 1\}, \\ \xi_2 &= \max\left\{1, \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{r_1}}\right\}, \\ \xi_3 &= \max\left\{1, \frac{1}{1 - \frac{\varphi - \varphi_0}{r_2}}\right\}. \end{aligned}$$

Поэтому для  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$  точка  $\sigma = 0$ , определяющая закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ , включается в область сходимости рядов (2.1).

Таким образом, на основании теоремы 2.2 получено решение задачи о распаде разрыва в виде рядов (2.1), сходящихся при малых  $t$  во всей области волны разряжения от  $\Gamma_1$  до  $\Gamma_0$  включительно.

После интегрирования системы (2.4) получается закон движения свободной поверхности:

$$\begin{aligned} r^0 &= f(z)\sqrt{1 + \omega^2 t^2}, \\ U^0 &= f(z)\frac{\omega^2 t}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}, \\ V^0 &= f(z)\frac{\omega}{\sqrt{1 + \omega^2 t^2}}, \\ W^0 &= 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим, что во все моменты времени модуль вектора скорости газа на свободной поверхности имеет следующее значение:  $\sqrt{U^{02} + V^{02}} = \omega f(z)$ ,  $W^0 = 0$  — не зависит от времени и совпадает с заданным при  $t = 0$  значением.

Поэтому частицы газа на свободной поверхности движутся следующим образом: каждая по своей прямой, лежащей в касательной плоскости к исходной поверхности  $\Gamma$  и параллельно плоскости  $z = 0$ ; со своей постоянной скоростью, которая равна  $\omega f(z)$ . Следовательно, во все моменты времени газовый объем остается осесимметричным.

При этом при разлете газа свободная поверхность движется в сторону вакуума, при схлопывании осесимметричной полости свободная поверхность  $\Gamma_0$  вдвигается в газ, т. е. в обоих случаях свободная поверхность движется от оси симметрии.

Также заметим, что систему (2.4) можно проинтегрировать и в окрестности оси симметрии. Подставляя  $z = 0$  в решение (2.5), получаем  $r^0 = 0$ ,  $U^0 = V^0 = W^0 = 0$ . Это означает, что при предполагаемых начальных данных “носик” газового тела или осесимметричной полости во все моменты времени стоит на месте.



### 3. Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму

Для того чтобы определить момент времени, до которого сохраняется полученная выше картина течения, исследуем задачу о непрерывном примыкании газа к вакууму. В отличие от задачи о распаде разрыва будет предполагаться, что в начальный момент времени  $t = t_0 > 0$ :  $\sigma(t_0, r, \varphi, z)|_{\Gamma} = 0$ , т. е. газ непрерывно примыкает к вакууму.

При этом рассмотрим более общую, чем описанную в разд. 1, 2, ситуацию. Будем предполагать, что на массу газа вдоль оси  $0z$  действует постоянная сила тяжести с постоянным ускорением свободного падения  $g$ .

Будет предполагаться, что в начальный момент времени  $t = t_0$  известны распределения параметров газа  $\sigma_0(r, \varphi, z)$ ,  $\mathbf{U}_0(r, \varphi, z)$ ,  $S_{00}(r, \varphi, z)$ , заданные аналитическими функциями, причем на свободной поверхности в начальный момент времени  $t = t_0$  они принимают значения

$$\sigma_0|_{\Gamma_0} = 0, \quad u_0|_{\Gamma_0} = 0, \quad v_0|_{\Gamma_0} = \omega f(z), \quad w_0|_{\Gamma_0} = 0, \quad S_0|_{\Gamma_0} = S_0(z).$$

В системе (1.1) введем новую независимую переменную  $x = r - r_0(t, z, \varphi)$ , где  $r = r_0(t, z, \varphi)$  — неизвестный закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ . В начальный момент времени  $\Gamma_0$  совпадает с  $\Gamma(r_0(t_0, z, \varphi) = f(z))$ . Заметим, что, введя так новую независимую переменную, мы поверхность  $\Gamma_0$  взяли за новую координатную ось  $x = 0$ . Также введем новые неизвестные функции  $C$ ,  $U$ ,  $V$ , определяемые соотношениями

$$C = \frac{\sigma}{r}, \quad U = \frac{u}{r}, \quad V = \frac{v}{r},$$

при этом неизвестные функции  $S$ ,  $w$  не меняются. Введение новых неизвестных функций позволяет убрать особую точку  $r = 0$  из системы (1.1).

Перепишем систему (1.1) при наличии силы тяжести в новых зависимых и независимых переменных

$$\begin{aligned} & C_t + C_\varphi V + C_z w + [(x + r_0)U - r_{0t} - r_{0\varphi}V - r_{0z}w] C_x + \gamma CU + \\ & + \frac{\gamma - 1}{2} C(x + r_0)U_x - \frac{\gamma - 1}{2} C r_{0\varphi} V_x - \frac{\gamma - 1}{2} C r_{0z} w_x + \frac{\gamma - 1}{2} C (V_\varphi + w_z) = 0, \\ & U_t + U_\varphi V + U_z w + U^2 - V^2 + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 C^2 + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 C C_x (x + r_0) + \\ & + [(x + r_0)U - r_{0t} - r_{0\varphi}V - r_{0z}w] U_x + \frac{2}{\gamma} C^2 (x + r_0) S S_x = 0, \\ & V_t + V_\varphi V + V_z w + 2UV + [(x + r_0)U - r_{0t} - r_{0\varphi}V - r_{0z}w] V_x + \\ & + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 C C_\varphi + \frac{2}{\gamma} C^2 S S_\varphi - \frac{2}{\gamma - 1} S^2 r_{0\varphi} C C_x - \frac{2}{\gamma} C^2 r_{0\varphi} S S_x = 0, \\ & w_t + w_\varphi V + w_z w + \frac{2}{\gamma - 1} S^2 (x + r_0)^2 C C_z + \frac{2}{\gamma} C^2 (x + r_0)^2 S S_z + \\ & + [(x + r_0)U - r_{0t} - r_{0\varphi}V - r_{0z}w] w_x - \frac{2}{\gamma - 1} S^2 r_{0z} (x + r_0)^2 C C_x - \\ & - \frac{2}{\gamma} C^2 (x + r_0)^2 r_{0z} S S_x = g, \\ & S_t + [(x + r_0)U - r_{0t} - r_{0\varphi}V - r_{0z}w] S_x + S_\varphi V + S_z w = 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Полученная система является аналитической и никаких особенностей не имеет.

Начальные данные, записанные в новых переменных, будут иметь вид

$$\begin{aligned} C(t_0, \varphi, x, z) &= C_0(\varphi, x, z), \\ \mathbf{U}(t_0, \varphi, x, z) &= \mathbf{U}_0(\varphi, x, z), \\ S(t_0, \varphi, x, z) &= S_0(\varphi, x, z), \end{aligned} \quad (3.2)$$

причем на свободной поверхности  $x = 0$  в начальный момент времени  $t = t_0$  они принимают значения

$$\begin{aligned} C(t_0, \varphi, 0, z) &= 0, \quad U(t_0, \varphi, 0, z) = 0, \\ V(t_0, \varphi, 0, z) &= \omega, \quad w(t_0, \varphi, 0, z) = 0, \\ S(t_0, \varphi, 0, z) &= S_{00}(z). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В дальнейшем будет предполагаться, что  $C_0$ ,  $U_0$ ,  $V_0$  являются аналитическими функциями в окрестности свободной поверхности  $\Gamma_0$ .

Для постановки характеристической задачи Коши с данными на свободной поверхности в системе (3.1) положим  $x = 0$ , учитывая (3.3) и что  $C(t, \varphi, 0, z) = 0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} r_{0t} + r_{0\varphi}V_0 + r_{0z}w_0 &= r_0U_0, \quad r_0(t_0, \varphi, z) = f(z), \\ U_{0t} + U_{0\varphi}V_0 + U_{0z}w_0 &= V_0^2 - U_0^2, \quad U(t_0, \varphi, 0, z) = 0, \\ V_{0t} + V_{0\varphi}V_0 + V_{0z}w_0 &= -2V_0U_0, \quad V(t_0, \varphi, 0, z) = \omega, \\ w_{0t} + w_{0\varphi}V_0 + w_{0z}w_0 &= g, \quad w(t_0, \varphi, 0, z) = 0, \\ S_{0t} + S_{0\varphi}V_0 + S_{0z}w_0 &= 0, \quad S(t_0, \varphi, 0, z) = S_{00}(z). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первое уравнение системы (3.4) получается из равенства нулю коэффициента при выходящей с поверхности  $\Gamma_0$  производной  $C_x$  в первом уравнении системы (3.1) и описывает закон движения свободной поверхности  $\Gamma_0$ . Остальные уравнения системы (3.4) получаются из второго — пятого уравнений системы (3.1) и являются необходимыми условиями разрешимости характеристической задачи Коши с данными на характеристике  $\Gamma_0$ . Поскольку в начальные данные и систему (3.4)  $\varphi$  явно не входит, то и решение задачи (3.4) от  $\varphi$  зависеть не будет и далее учитывается, что производные по  $\varphi$  равны нулю.

Интегрируя четвертое уравнение системы (3.4), имеем

$$w_0 = g(t - t_0).$$

Подставляя полученное решение в остальные уравнения системы (3.4) и вводя новую независимую переменную  $\xi = z - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$ , получим

$$\begin{aligned} r_{0t} &= r_0U_0, \quad r_0(t_0, \xi) = f(\xi), \\ U_{0t} &= V_0^2 - U_0^2, \quad U_0(t_0, \xi) = 0, \\ V_{0t} &= -2V_0U_0, \quad V_0(t_0, \xi) = \omega, \\ S_{0t} &= 0, \quad S_0(t_0, \xi) = S_{00}(\xi). \end{aligned}$$

Интегрируя полученную систему и подставляя начальные данные, имеем решение системы (3.4)

$$\begin{aligned} r_0 &= f(\xi)\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}, \\ U_0 &= \frac{\omega^2(t - t_0)}{1 + \omega^2(t - t_0)^2}, \quad V_0 = \frac{\omega}{1 + \omega^2(t - t_0)^2}, \\ w_0 &= g(t - t_0), \quad S_0 = S_{00}(\xi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Полученное решение для  $r_0, U_0, V_0$  аналогично решению (2.5) и отражает тот факт, что каждая частица на свободной поверхности движется по своей прямой со своей постоянной скоростью. Вместе с тем учет силы тяжести привел к следующему результату: свободная поверхность движется как твердое тело вдоль оси  $0z$  со скоростью  $w_0 = g(t - t_0)$ . Заметим также, что  $U_0, V_0, w_0$  не зависят от  $\xi$ , а следовательно, и от  $z$ .

Таким образом, соотношения (3.5) задают единственное аналитическое решение задачи (3.4). Заметим, что это решение согласовано при  $t = t_0$  с условиями (3.2). Поэтому справедлива следующая

**Теорема 3.1.** *Существует  $t_* > t_0$  такое, что при  $t_0 < t < t_*$  в некоторой окрестности  $\Gamma_0$  существует единственное локально-аналитическое решение задачи (3.1), (3.2), (3.5).*

Доказательство теоремы сводится, как и в [2–8], к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [12, 13]. Задача (3.1), (3.2), (3.5) является характеристической задачей Коши с данными на характеристике кратности пять, поэтому для построения единственного локально-аналитического решения надо задать пять дополнительных условий. Этими условиями и являются условия (3.2).

Для нахождения момента времени, до которого существует решение задачи (3.1), (3.2), (3.5), разложим его в ряд по степеням  $x$

$$\mathbf{q}(t, \varphi, x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{q}_k(t, \varphi, z) \frac{x^k}{k!}, \quad \mathbf{q} = \{C, U, V, w, S\}, \quad (3.6)$$

что при малых  $x$  возможно в силу аналитичности решения задачи (3.1), (3.2), (3.5) в некоторой окрестности  $\Gamma_0$ .

В системе (3.1) положим  $x = 0$  и, учитывая (3.5), получим тождество.

Продифференцируем систему (3.1) по  $x$ , положим  $x = 0$ . Будем иметь систему транспортных уравнений

$$\begin{aligned} C_{1t} + C_{1\varphi}V_0 + C_{1z}w_0 + \frac{\gamma + 1}{2}C_1(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + (\gamma + 1)C_1U_0 &= 0, \\ U_{1t} + U_{1\varphi}V_0 + U_{1z}w_0 - 2V_0V_1 + 3U_0U_1 + U_1(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + \\ &+ \frac{2}{\gamma - 1}r_0C_1^2S_0^2 = 0, \\ V_{1t} + V_{1\varphi}V_0 + V_{1z}w_0 + 3U_0V_1 + 2V_0U_1 + V_1(r_0U_1 - r_{0z}w_1) &= 0, \\ w_{1t} + w_{1\varphi}V_0 + w_{1z}w_0 + U_0w_1 + w_1(r_0U_1 - r_{0z}w_1) - \frac{2}{\gamma - 1}r_0^2r_{0z}S_0^2C_1^2 &= 0, \\ S_{1t} + S_{1\varphi}V_0 + S_{1z}w_0 + U_0S_1 + S_1(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + S_{0z}w_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

описывающую поведение производных, выводящих со свободной поверхности  $\Gamma_0$ .

Продифференцируем систему (3.1) по  $x$   $k$  раз, положим  $x = 0$  и, учитывая (3.5) и ранее найденные  $\mathbf{q}_l$  ( $l < k$ ), получим систему

$$\begin{aligned}
& C_{kt} + C_{k\varphi}V_0 + C_{kz}w_0 + (\gamma + k)C_kU_0 + \left(k + \frac{\gamma - 1}{2}\right)C_k(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + \\
& \quad + \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}k\right)C_1(r_0U_k - r_{0z}w_k) = Q_{1k}(t, \varphi, z), \\
& U_{kt} + U_{k\varphi}V_0 + U_{kz}w_0 + (k + 2)U_0U_k - 2V_0V_k + kU_k(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + \\
& \quad + U_1(r_0U_k - r_{0z}w_k) + \frac{2}{\gamma - 1}(k + 1)r_0S_0^2C_1C_k = Q_{2k}(t, \varphi, z), \\
& V_{kt} + V_{k\varphi}V_0 + V_{kz}w_0 + (k + 2)U_0V_k + 2V_0U_k + kV_k(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + \\
& \quad + V_1(r_0U_k - r_{0z}w_k) = Q_{3k}(t, \varphi, z), \\
& w_{kt} + w_{k\varphi}V_0 + w_{kz}w_0 + kw_k(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + w_1(r_0U_k - r_{0z}w_k) + \\
& \quad + kU_0w_k - \frac{2}{\gamma - 1}(k + 1)r_0^2r_{0z}S_0^2C_1C_k = Q_{4k}(t, \varphi, z), \\
& S_{kt} + S_{k\varphi}V_0 + S_{kz}w_0 + kS_k(r_0U_1 - r_{0z}w_1) + S_1(r_0U_k - r_{0z}w_k) + \\
& \quad + S_{0z}w_k = Q_{5k}(t, \varphi, z).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Функции  $Q_{ik}(t, \varphi, z)$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , известным образом зависят от  $q_l$ ,  $l < k$ , и ввиду громоздкости здесь не приводятся. Единственное решение систем (3.7), (3.8) получается при задании начальных условий  $q_k(t_0, \varphi, z)$ , которые однозначно определяются при разложении в ряд по степеням  $x$  условий (3.2).

Системы (3.8) линейны, поэтому первые особенности решений этих систем совпадают с особенностями решений систем (3.4), (3.7). Функции (3.5), задающие решение системы (3.4), особенностей не имеют, следовательно, для определения момента времени  $t = t_*$ , являющегося граничной точкой области сходимости рядов (3.6), необходимо исследовать систему транспортных уравнений (3.7).

## 4. Исследование системы транспортных уравнений

Система транспортных уравнений (3.7) является нелинейной системой уравнений с частными производными. Ее аналитическое исследование представляет большие сложности. Поэтому система (3.7) далее исследуется численно. Чтобы получить более удобную для численного исследования задачу, в системе (3.7) вместо  $z$ ,  $\varphi$  введем новые независимые переменные

$$\xi = z - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \zeta = \varphi - \arctg(\omega(t - t_0)),$$

при этом независимая переменная  $t$  не меняется. Система (3.7) перейдет в систему

$$\begin{aligned}
C_{1t} + \frac{\gamma+1}{2}C_1(r_0U_1 - r_{0\xi}w_1) + \frac{\gamma+3}{2}C_1U_0 &= 0, \\
U_{1t} - 2V_0V_1 + 3U_0U_1 + U_{0\xi}w_1 + U_1(r_0U_1 - r_{0\xi}w_1) + \\
&+ \frac{2}{\gamma-1}r_0C_1^2S_0^2 = 0, \\
V_{1t} + 3U_0V_1 + 2V_0U_1 + V_{0\xi}w_1 + V_1(r_0U_1 - r_{0\xi}w_1) &= 0, \\
w_{1t} + U_0w_1 + w_1(r_0U_1 - r_{0\xi}w_1) - \frac{2}{\gamma-1}r_0^2r_{0\xi}S_0^2C_1^2 &= 0, \\
S_{1t} + U_0S_1 + S_1(r_0U_1 - r_{0\xi}w_1) + S_{0\xi}w_1 &= 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

обыкновенных дифференциальных уравнений, в которую  $\xi$ ,  $\zeta$  входят как параметры, от которых зависят начальные данные и коэффициенты системы (4.1), но по которым не производится дифференцирование искомых функций  $C_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $w_1$ ,  $S_1$ .

Если в системе (4.1) ввести новые неизвестные функции

$$y = \exp \int_{t_0}^t (r_0U_1 - r_{0\xi}w_1)dt, \quad u_1 = yU_1, \quad v_1 = yV_1, \quad W_1 = yw_1, \quad s_1 = yS_1,$$

то система (4.1) перейдет в систему

$$\begin{aligned}
y_t &= r_0u_1 - r_{0\xi}W_1, \\
u_{1t} &= -3U_0u_1 + 2V_0v_1 - \frac{2}{\gamma-1} \frac{S_0^2r_0C_{10}^2(\xi, \tau)}{y^\gamma [1 + \omega^2(t-t_0)^2]^{\gamma+1}}, \\
v_{1t} &= -2V_0u_1 - 3U_0v_1, \\
W_{1t} &= -U_0W_1 + \frac{2}{\gamma-1} \frac{S_0^2r_{0\xi}r_0^2C_{10}^2(\xi, \tau)}{y^\gamma [1 + \omega^2(t-t_0)^2]^{\gamma+1}}, \\
s_{1t} &= -U_0s_1 - s_{0\xi}W_1,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

а функция  $C_1$  будет находиться из конечного соотношения

$$C_1 = C_{10}(\xi, \tau)y^{-\frac{\gamma+1}{2}} [1 + \omega^2(t-t_0)^2]^{-\frac{\gamma+1}{2}}.$$

Заметим, что  $y(t_0) = 1$ .

Построим точное решение системы (4.2), описывающее поведение выводящих производных в “носике” газового объема (в частном случае — в вершине конуса). В системе (4.2) положим  $\xi = 0$ , тогда  $r_0 = f(0)\sqrt{1 + \omega^2(t-t_0)^2} = 0$ ,  $r_{0\xi} = f'(0)\sqrt{1 + \omega^2(t-t_0)^2}$  ( $f'(0) = a$ ), и получим систему

$$\begin{aligned}
y_t &= -a\sqrt{1 + \omega^2(t-t_0)^2}W_1, \\
u_{1t} &= -3\frac{\omega^2(t-t_0)}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}u_1 + 2\frac{\omega}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}v_1, \\
v_{1t} &= -2\frac{\omega}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}u_1 - 3\frac{\omega^2(t-t_0)}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}v_1, \\
W_{1t} &= -\frac{\omega^2(t-t_0)}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}W_1, \\
s_{1t} &= -\frac{\omega^2(t-t_0)}{1 + \omega^2(t-t_0)^2}s_1 - S_{0\xi}(0)W_1.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Интегрируя четвертое уравнение системы (4.3), подставляя полученное решение в первое и пятое уравнения системы и интегрируя их, будем иметь

$$W_1 = \frac{W_{10}(\tau)}{\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}}, \quad s_1 = \frac{W_{10}(\tau)S_{0\xi}(0)(t - t_0) + s_{10}(\tau)}{\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}},$$

$$y = 1 - aW_{10}(\tau)(t - t_0).$$

Второе и третье уравнения системы (4.3) образуют отдельную систему, общее решение которой имеет вид [15]

$$u_1 = D_1 \frac{1 - \omega^2(t - t_0)^2}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5} + D_2 \frac{2\omega(t - t_0)}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5},$$

$$v_1 = D_1 \frac{-2\omega(t - t_0)}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5} + D_2 \frac{1 - \omega^2(t - t_0)^2}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5}.$$

Полученное точное решение позволяет упростить систему (4.2) введением новых неизвестных функций  $u$ ,  $v$ ,  $W$ ,  $s$  по следующим формулам:

$$u_1 = u \frac{1 - \omega^2(t - t_0)^2}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5} + v \frac{2\omega(t - t_0)}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5},$$

$$v_1 = u \frac{-2\omega(t - t_0)}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5} + v \frac{1 - \omega^2(t - t_0)^2}{\left(\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}\right)^5},$$

$$W_1 = \frac{W}{\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}}, \quad s_1 = \frac{s}{\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}}.$$

Система (4.2) перейдет в систему

$$y_t = f(\xi) \frac{1 - \omega^2(t - t_0)^2}{(1 + \omega^2(t - t_0)^2)^2} u + f(\xi) \frac{2\omega(t - t_0)}{(1 + \omega^2(t - t_0)^2)^2} v - f'(\xi)W,$$

$$u_t = -\frac{2}{\gamma - 1} \frac{S_0^2 f(\xi) C_{10}^2(\xi, \tau) [1 - \omega^2(t - t_0)^2]}{y^\gamma [1 + \omega^2(t - t_0)^2]^\gamma},$$

$$v_t = -\frac{2}{\gamma - 1} \frac{S_0^2 f(\xi) C_{10}^2(\xi, \tau) 2\omega(t - t_0)}{y^\gamma [1 + \omega^2(t - t_0)^2]^\gamma}, \quad (4.4)$$

$$W_t = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{S_0^2 f'(\xi) f^2(\xi) C_{10}^2(\xi, \tau)}{y^\gamma [1 + \omega^2(t - t_0)^2]^{\gamma-1/2}},$$

$$s_t = -s_{0\xi} \frac{W}{\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}}.$$

Далее систему (4.4) будем исследовать в частном случае — в предположении, что в начальный момент времени  $t = t_0$  газовый объем закручен как твердое тело и энтропия на поверхности  $\Gamma$  не зависит от  $z$  ( $S|_\Gamma = S_{00} = \text{const} > 0$ ). В этом случае пятое уравнение системы (4.4) интегрируем и, возвращаясь к исходной неизвестной функции, получаем

$$S_0 = S_{00}, \quad S_1 = \frac{S_{10}}{y\sqrt{1 + \omega^2(t - t_0)^2}}.$$

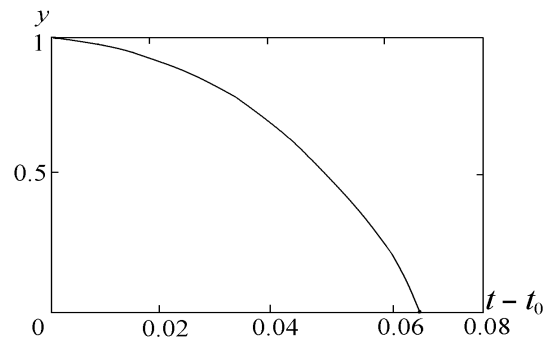


Рис. 2. Поведение функции  $y(t)$  при  $t \rightarrow t_*$ ,  $y(t_*) = 0$ ,  $t_0 = 0.1$ ,  $\omega = 10$ ,  $\gamma = 2$ .

Расчеты системы (4.4) будем вести также при дополнительном предположении, что исходная поверхность  $\Gamma$  — конус, образующая которого имеет уравнение  $r = az$ , т. е.:  $f(z) = az$ ,  $f'(z) = a$ . В этом случае начальные данные для системы (4.4) будут иметь вид

$$y(t_0) = 1, \quad u(t_0) = v(t_0) = W(t_0) = 0, \quad t_0 = 0.1.$$

Значение  $C_{10} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{2\alpha t_0 S_{00} a z}$  возьмем из приближенного решения задачи о распаде разрыва, используя первые два слагаемых ряда для  $r$ , что допустимо для малых  $t$ . Расчеты ведутся до момента времени, когда  $y = 0$ , т. е. до момента ( $t = t_*$ ) появления бесконечных производных на свободной поверхности — момента “градиентной катастрофы”. На основании численного исследования поставленной для системы (4.4) задачи можно сделать следующие выводы.

1. Во всех проведенных расчетах независимо от величины констант  $\gamma$  или  $\omega$  “градиентная катастрофа” возникает в обоих случаях: и когда газ находится снаружи от свободной поверхности, и когда газ находится внутри нее. Это можно объяснить тем, что определяющим слагаемым в правой части первого уравнения системы (4.4) является  $-aW$ . Расчеты показали, что функция  $W$  возрастает и остается положительной по мере роста  $t$ . Это обеспечивает убывание  $y$  вплоть до нуля (рис. 2).

2. Время появления бесконечных производных оказалось связанным с параметром  $\omega$ . Чем больше  $\omega$ , тем позже наступает “градиентная катастрофа”:

$\omega$	1	10	100
$t_*$	0.158	0.165	0.64

Все полученные в статье результаты доказаны строго, но носят локальный характер. Поэтому они не учитывают особенностей, возможно, возникающих в средней части течения.

Автор благодарит С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

## Список литературы

- [1] Сидоров А.Ф. Приближенный метод решения некоторых задач о пространственном истечении газа в вакуум // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд.-ние. ВЦ; ИТПМ. 1976. Т. 7, № 5. С. 137–148.
- [2] Баутин С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.

- [3] БАУТИН С.П., ДЕРЯБИН С.Л. Истечение идеального газа в вакуум // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 817–820.
- [4] БАУТИН С.П. Двумерное нестационарное истечение газа в вакуум в случае прямолинейной свободной поверхности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1983. Вып. 60. С. 22–23.
- [5] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение идеального газа в вакуум в случае линейчатой свободной поверхности. Свердловск: Уральский электромеханический ин-т инженеров железнодорожного транспорта. 1984. 28 с. Деп. в ВИНТИ 25.04.1984. № 2617–84.
- [6] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.
- [7] ДЕРЯБИН С.Л., ЧУЕВ Н.П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
- [8] ДЕРЯБИН С.Л. Одномерное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 32–44.
- [9] ЛОЙЦЯНСКИЙ Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
- [10] КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [11] ОВСЯННИКОВ Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
- [12] БАУТИН С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
- [13] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [14] БАУТИН С.П. Исследование области сходимости специальных рядов, решающих некоторые задачи газовой динамики // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1978. Т. 9, № 4. С. 5–17.
- [15] КАМКЕ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

*Поступила в редакцию 3 ноября 2003 г.*