

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЗОНДИРОВАНИЯ НАД ЛОКАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

М. К. ОРУНХАНОВ, Б. Г. МУКАНОВА, Б. К. САРБАСОВА
НИИ математики и механики при КазНУ им. аль-Фараби,
Алматы, Казахстан
e-mail: orun@kazsu.kz

A geoelectric sounding problem above a local patch on earth is considered. The conditions for the iterations process convergence of an integral equation on secondary charges density are obtained.

Для внедрения численных методов в практику геофизических исследований необходимо создание программ, позволяющих проводить расчеты электрических полей и сопротивлений для разнообразной геометрии залегания пластов. Нами рассматривается математическая модель метода вертикального электрического зондирования (ВЭЗ), относящегося к группе зондирований постоянным током. Будем основываться на общепринятой математической модели для задач ВЭЗ — уравнении для постоянного во времени электрического поля с кусочно-непрерывным распределением проводимости среды [1]. Пусть в точках A, B на плоской поверхности среды, совпадающей в декартовых координатах с плоскостью $z = 0$, расположены питающие электроды, моделируемые через точечные источники постоянного тока. Пусть среда с постоянной проводимостью σ_1 содержит локальное включение с проводимостью σ_2 (см. рисунок).

Для стационарного поля и в отсутствие объемных источников электростатический потенциал в точках среды определяется уравнением Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (1)$$

за исключением внутренней границы между областями с разной проводимостью $\Gamma = \partial\Omega$, где Ω есть множество точек включения. На поверхности Γ должны выполняться условия непрерывности нормальной составляющей тока и потенциала

$$\sigma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \sigma_2 \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \quad \varphi|_{\Gamma_+} = \varphi|_{\Gamma_-}. \quad (2)$$

Здесь знаки “+” и “−” соответствуют производным, вычисленным по разные стороны поверхности Γ . Должны также удовлетворяться условия убывания на бесконечности $\varphi(\infty) = 0$ и граничное условие на земной поверхности:

$$\sigma_1 \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = -I(\delta(\vec{r} - \vec{OA})) + I(\delta(\vec{r} - \vec{OB})). \quad (3)$$

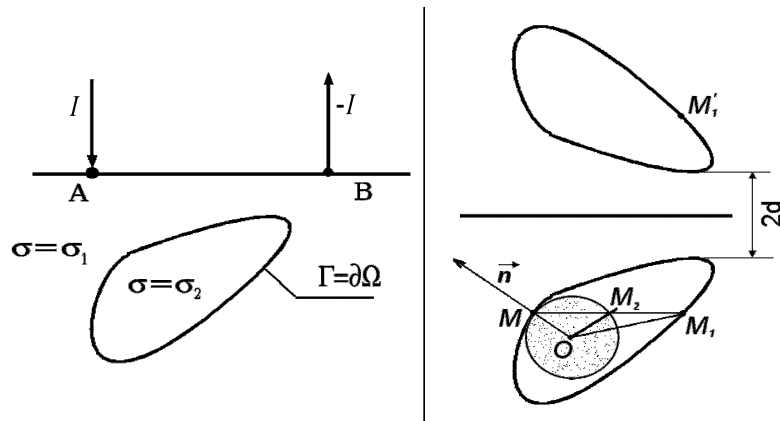


Схема вертикального электрического зондирования: $OM = R_{\min}$, $OM_1 = R(\theta_1, \varphi_1)$,
 $r_{MM_1} = MM_1$, $\theta_1 = \angle MOM_1$, $\theta_2 = \angle MOM_2 = \Theta(\theta_1) \leq \theta_1$.

Здесь \vec{OA} , \vec{OB} есть радиусы-векторы точечных источников постоянного тока, I — сила тока питающих электродов. Представим решение задачи в точке M в виде суммы потенциалов точечных источников в однородном полупространстве и неизвестной регулярной добавки:

$$\varphi = U_0(M) + u(M) = \frac{I}{2\sigma_1\pi|\vec{r}_{MA}|} - \frac{I}{2\sigma_1\pi|\vec{r}_{MB}|} + u(M).$$

Функция $u(M)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, за исключением границы Γ , а условия (2) и (3) для $u(M)$ переписываются в виде

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0; \tag{4}$$

$$\sigma_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 - \sigma_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 = - \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_1 - \sigma_2 \left(\frac{\partial U_0}{\partial n} \right)_2 \right] = -f(M). \tag{5}$$

В [2] впервые было получено интегральное уравнение для решения задачи зондирования над наклонно залегающим плоским пластом. Там же предложен метод его решения и доказана его сходимость при всех параметрах слоев и ненулевых углах наклона пласта. В [3] на основе данного метода в рамках современных автору вычислительных возможностей были проведены первые две итерации для угла наклона пласта в 45° . Нами в [4] выполнена численная реализация метода для произвольного угла наклона пласта. Следуя [2], будем искать решение $u(M)$ в виде потенциала простого слоя, создаваемого вторичными источниками, распределенными на геоэлектрической границе Γ и ее отражении в верхнем полупространстве. Симметричное отражение использовано для того, чтобы обеспечить выполнение условия (4) на поверхности Земли. На первом этапе в качестве искомой функции рассматривается плотность простого слоя, удовлетворяющая интегральному уравнению, полученному из условия (5) и формул Грина:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 = -\nu(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \nu(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM'_1}} \right) d\Gamma; \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 = \nu(M) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Gamma} \nu(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM'_1}} \right) d\Gamma. \tag{7}$$

Здесь точка M_1 принадлежит поверхности интегрирования Γ , а M_1' — ее отражению в верхнем полупространстве, r_{MM_1} , $r_{MM_1'}$ есть расстояния от точки M до M_1 и M_1' соответственно.

Подставляя (6) и (7) в (5), получаем интегральное уравнение для функции $\nu(M)$:

$$\nu(M) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} \nu(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM_1'}} \right) d\Gamma + \lambda F_0(M), \quad (8)$$

где $F_0(M) = \partial U_0 / \partial n(M)$, $\lambda = (\sigma_2 - \sigma_1) / (\sigma_1 + \sigma_2)$.

Нетрудно убедиться в том, что производная по некоторому направлению \vec{l} есть

$$\frac{\partial}{\partial \vec{l}} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM_1'}} \right) = \frac{\cos \psi}{r_{MM_1}^2} + \frac{\cos \psi'}{r_{MM_1'}^2}, \quad (9)$$

где углы ψ и ψ' образованы вектором \vec{l} и направлениями $M_1\vec{M}$ и $M_1'\vec{M}$ соответственно.

Рассмотрим итерационную схему решения уравнения (8). Зададим некоторое начальное приближение функции $\nu_0(M) \in C(\Gamma)$. Каждое следующее приближение $\nu_{n+1}(M)$ будем вычислять из уравнения (8), подставляя в правую часть $\nu_n(M_1)$ вместо $\nu(M_1)$:

$$\nu_{n+1}(M) = \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} \nu_n(M_1) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_1}} + \frac{1}{r_{MM_1'}} \right) d\Gamma + \lambda F_0(M), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Сделаем предположения относительно геометрии локального включения:

1. Область Ω есть ограниченное выпуклое множество в R^3 с достаточно гладкой границей Γ , и $\text{diam}(\Omega) \leq 2R_{\max} < \infty$.

2. В каждой точке $M \in \Gamma$ существует параметризация поверхности Γ в сферических координатах r_1, θ_1, φ_1 вида

$$r_1 = R(\theta_1, \varphi_1), \quad \theta_1 \in [0, \pi], \quad \varphi_1 \in [0, 2\pi], \quad (11)$$

такая, что центр рассматриваемой системы координат совпадает с центром некоторой вложенной в Γ сферы, касающейся поверхности Γ в точке M , с радиусом R_{\min} , так что $R(0, \varphi_1) = r_1(M) = R_{\min}$ (см. рисунок), причем $R_{\min} \geq \delta > 0$ с δ , не зависящим от M .

3. Функция $R(\theta_1, \varphi_1) \in C^1$ и удовлетворяет условиям

$$\max(|\partial R / \partial \theta| / R, |\partial R / \partial \varphi| / (R \sin \theta)) \leq K < \infty, \quad 0 \leq K < \infty. \quad (12)$$

4. Для каждой точки $M_1(R(\theta_1, \varphi_1), \theta_1, \varphi_1) \in \Gamma$ отрезок M_1M пересекает сферу радиуса R_{\min} в точке $M_2(R_{\min}, \theta_2, \varphi_1)$ с координатой $\theta_2 = \Theta(\theta_1)$. По построению $\Theta(\theta_1) \leq \theta_1$, $\Theta(0) = 0$, $\Theta(\pi) = \pi$ (см. рисунок).

Предположим, что функция $\Theta(\theta_1) \in C^1[0, \pi]$ и $\exists K_1$, такое, что $\max(|\partial \Theta / \partial \theta_1|) \leq K_1$ равномерно по M .

5. Наименьшая глубина залегания d от поверхности $z = 0$ для всех точек Γ строго больше нуля.

Оценим равномерную норму разности двух последовательных приближений. Подставляя (9) в (10), получаем

$$|\nu_{n+1} - \nu_n|_C \leq |\nu_n - \nu_{n-1}|_C \cdot \frac{\lambda}{2\pi} \iint_{\Gamma} \left(\frac{\cos \psi}{r_{MM_1}^2} + \frac{\cos \psi'}{r_{MM_1'}^2} \right) d\Gamma \equiv |\nu_n - \nu_{n-1}|_C \cdot \frac{\lambda}{2\pi} (I_1 + I_2). \quad (13)$$

Оценим слагаемые в правых частях (13). Для оценки первого слагаемого в каждой точке M и вычисления интеграла перейдем к параметризации поверхности Γ согласно условию (11):

$$I_1 = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\cos \psi}{r_{MM_1}^2} \right) d\Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{R^2(\theta, \varphi) \cos(\psi) \sqrt{(1 + (R_{\theta}/R)^2) \sin^2 \theta + (R_{\varphi}/R)^2} d\theta d\varphi}{r_{MM_1}^2}. \quad (14)$$

В силу выбора параметризации Γ и условий 2, 4

$$r_{MM_1}^2 = r_M^2 - 2r_M r_{M_1} \cos \theta + r_{M_1}^2 \geq 2r_M^2(1 - \cos \theta)^2 = 4r_M^2 \sin^2(\theta/2) \geq 4\delta^2 \sin(\theta/2) \sin(\Theta(\theta)/2),$$

$$\cos \psi = \cos((\pi - \Theta(\theta))/2) = \sin(\Theta(\theta)/2).$$

Отсюда с учетом условий 1–3, (12) из (14) следует

$$I_1 \leq \frac{R_{\max}^2 \sqrt{1 + 2K^2}}{4\delta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta = \frac{\pi R_{\max}^2 \sqrt{1 + 2K^2}}{\delta^2}. \quad (15)$$

Оценим второе слагаемое (13) с учетом условия 5:

$$I_2 = \iint_{\Gamma} \left(\frac{\cos \psi'}{r_{MM_1'}^2} \right) d\Gamma \leq \frac{1}{4d^2} \text{mes}(\Gamma). \quad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) вытекает

$$|\nu_{n+1} - \nu_n|_C \leq |\nu_n - \nu_{n-1}|_C \cdot \lambda \left(\frac{R_{\max}^2 \sqrt{1 + 2K^2}}{2\delta^2} + \frac{\text{mes}(\Gamma)}{8\pi d^2} \right). \quad (17)$$

В частности, если Ω есть шар радиуса R , то $R_{\max} = \delta = R$, $K \equiv 0$, $\text{mes}(\Gamma) = 4\pi R^2$ и из (17) получаем

$$|\nu_{n+1} - \nu_n|_C \leq |\nu_n - \nu_{n-1}|_C \cdot \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{R^2}{d^2} \right)$$

Отсюда следует, что если глубина залегания неоднородности превышает радиус шара, то в силу того что $|\lambda| < 1$, итерационный процесс сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем λ при любом расположении электродов. Отметим, что аналитические решения для данного случая неоднородности получены лишь для случая одного электрода, размещенного непосредственно над центром включения.

Из оценки (17) следует, что если глубина залегания неоднородности велика по сравнению с ее линейными размерами, а значения “эксцентриситета” R_{\max}/δ и контрастность сред λ не слишком велики, процесс итераций также сходится.

Искомый потенциал поля $u(M)$ восстанавливается по формулам Грина через плотность простого слоя $\nu(M)$ интегрированием по поверхности контакта сред и ее отражению в верхнем полупространстве.

Отметим достоинства рассмотренного метода:

— хотя распределение потенциала носит трехмерный характер, но искомая плотность простого слоя есть функция двух пространственных переменных, поэтому затраты машинных ресурсов сопоставимы с затратами для двумерных задач;

— конечной целью расчетов в аналогичных задачах часто является не потенциал поля, а его производные, их вычисление на основе интегральных выражений производится с хорошей точностью, что улучшает качество расчетов;

— по сравнению с методами конечных элементов и граничных конечных элементов, применяемых в подобных задачах, алгоритм расчета относительно прост.

Список литературы

- [1] ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА. Справочник геофизика / Под. ред. В.К. Хмелевского и В.М. Бондаренко. Кн. I. М.: Недра, 1989. 438 с.
- [2] ТИХОНОВ А.Н. Об электроразведке над наклонным пластом // Тр. Ин-та теорет. геофизики. 1946. Т. 1. С. 116–136.
- [3] ТЮРКИШЕР Р.И. Вычисление поля точечного источника, находящегося над наклонным пластом // Там же. С. 137–142.
- [4] МУКАНОВА Б.Г., ОРУНХАНОВ М.К., САРБАСОВА Б.К. Расчет кривых кажущегося сопротивления над наклонным пластом // Мат. конф. “Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании”. Ч. 2. Новосибирск; Алматы; Усть-Каменогорск, 2003. С. 316–321.

Поступила в редакцию 26 октября 2004 г.