О ВНЕШНЕМ ПОЛИЭДРАЛЬНОМ ОЦЕНИВАНИИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ В “РАСШИРЕННОМ” ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ*

Е. К. Костоусова
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
e-mail: kek@imm.uran.ru

A problem of constructing the outer estimates of reachable sets of linear discrete systems with integral nonquadratic bounds on controls (including systems with phase constraints) is considered. The families of estimates in the form of parallelepipeds and special polytopes are introduced for reachable sets in the “initial” and “extended” spaces. The properties of these estimates are investigated.

Введение

Решение многих задач теории управления и оценивания в условиях неопределенности в гарантированной постановке основывается на исследовании трубок траекторий (многозначных функций, описывающих, например, динамику множеств достижимости, разрешимости, информационных областей) (см., например, [1, 2, 3, 4]). Их явное описание известно только в редких случаях [1]. Существует несколько подходов к разработке численных методов аппроксимации трубок траекторий. Ряд методов основывается на численном решении уравнений разного типа, описывающих динамику множеств [5], аппроксимации множеств многогранниками с большим числом вершин и граней (см., например, [6, 7]) либо объединением конечного числа точек [8, 9]. Еще один подход состоит в аппроксимации множеств классом более простых областей некоторой фиксированной формы, в частности эллипсоидами, параллелепипедами (см., например, [2, 10] и приведенную там библиографию). А.Б. Куржанский предложил аппроксимировать искомую трубку целым семейством внешних (внутренних) трубок, образованных областями фиксированной формы [2, 11]. Семейства вводятся таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить точные представления решений (через пересечение или объединение оценок), а с другой — чтобы

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00528).

каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных (что открывает возможности для параллельных вычислений).

В соответствии с этим подходом ранее были предложены некоторые способы построения семейств параллелепипедозначных оценок трубок траекторий для систем с геометрическими (жесткими) ограничениями [11, 12, 13]. В [14] введены семейства параллелепипедозначных оценок для множеств достижимости (МД) линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление. Рассматриваемые там множества достижимости, вообще говоря, не обладают полугрупповым свойством [2] (это свойство присуще МД в расширенном фазовом пространстве, включающем координату, соответствующую текущему запасу управления [15]).

В настоящей работе для линейных многошаговых систем с интегральными неквадратичными ограничениями на управление и неопределенностью в начальных условиях, включая системы с фазовыми ограничениями, исследованы свойства МД в расширенном фазовом пространстве и для них введены семейства внешних оценок в виде политопов специального вида; выведены эволюционные уравнения, описывающие динамику этих оценок. С их использованием найдены параллелепипедозначные оценки МД в исходном пространстве, отличные при наличии фазовых ограничений от введенных в [14]. Для случая без фазовых ограничений семейства оценок обеспечивают точные представления МД. Приведены результаты численного моделирования. Отметим, что рассмотрение в качестве оценок параллелепипедов, грани которых не обязательно параллельны координатным плоскостям, позволяет ослабить [12] известный в интервальном анализе "эффект обертывания" (wrapping effect) [16].

Статическое описание МД в исходном фазовом пространстве из начала координат для автономных многошаговых систем (без фазовых ограничений) с интегральными неквадратичными ограничениями на скалярное управление дано в [17].

1. Постановка задачи

На промежутке $[i, N]$ $(0 \le i < N)$ рассматривается многошаговая система

$$x[j] = A[j]x[j-1] + B[j]u[j] + v[j], \quad j = i+1, \dots, N. \tag{1.1}$$

Здесь $x[j] \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы ($\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство); $A[j] \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$ и $B[j] \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — известные матрицы ($\mathcal{M}_0^{n\times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ \det A \ne 0\}$; $\mathbb{R}^{n\times m}$ — пространство действительных $n\times m$-матриц); $v[j] \in \mathbb{R}^n$ — известные входные воздействия. Начальное состояние $x[i]$ и управления $u[j] \in \mathbb{R}^r$ стеснены ограничениями

$$x[i] = x_i \in \mathcal{X}_i; \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=i+1}^{N} \|u[j]\|_\infty \le \mu_i; \tag{1.3}$$

$$u[j] \in \mathcal{K}[j], \quad j = i+1, \dots, N, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{X}_i \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ — заданное множество ($\operatorname{conv} \mathbb{R}^n$ — множество всех выпуклых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$); $\mu_i > 0$ — известное число; $\|u\|_\infty = \max\limits_{1\le\alpha\le r} |u_\alpha|$ — норма вектора

$u \in \mathbb{R}^r$ (нижний индекс будем использовать для нумерации компонент векторов, верхний — для нумерации векторов); $\mathcal{K}[j] \subseteq \mathbb{R}^r$ — заданные выпуклые замкнутые конусы [18]. На состояние системы могут быть наложены фазовые ограничения

$$x[j] \in \mathcal{Y}[j], \quad j = i+1, \ldots, N, \tag{1.5}$$

где $\mathcal{Y}[j]$ — выпуклые замкнутые множества (считаем $\mathcal{Y}[j] = \mathbb{R}^n$, если фазовые ограничения отсутствуют). Ограничения (1.5), в частности, могут порождаться уравнением измерений с неизвестной, но ограниченной помехой [3, 4]

$$y[j] = G[j]\,x[j] + \eta[j], \quad \eta[j] \in \Theta[j] \subseteq \mathbb{R}^m, \quad j = i+1, \ldots, N,$$

где $G[j]$ — известные $m \times n$-матрицы ранга m; $\Theta[j] \in \operatorname{conv} \mathbb{R}^m$ — заданные множества.

Множеством достижимости $\mathcal{X}(k, i, \mathcal{X}_i)$ системы (1.1), (1.3)–(1.5) с начальным условием (1.2) в момент $k \in \{i, \ldots, N\}$ называется множество всех тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют такие $x[i]$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (1.2)–(1.4), что порождаемое ими в силу (1.1) решение $x[\cdot]$ будет удовлетворять условиям $x[k] = x$ и (1.5) для $j = i+1, \ldots, k$. Далее считаем, что в системе (1.1)–(1.5) $i = 0$ и используем обозначение $\mathcal{X}[k] = \mathcal{X}(k, 0, \mathcal{X}_0)$. Если ограничения (1.5) порождаются измерениями, то $\mathcal{X}[k]$ известны как *информационные области* [4, 2].

Введенные МД для систем с интегральными ограничениями (1.3), вообще говоря, не обладают полугрупповым свойством [2], и для них в общем случае не удается получить рекуррентные соотношения типа [3], имеющие место для многошаговых систем с геометрическими ограничениями. В [14] приведены "полурекуррентные" соотношения для МД (системы рекуррентных формул, с помощью которых можно находить МД) систем без фазовых ограничений, а также соотношения, описывающие МД систем с фазовыми ограничениями.

Добавим к фазовым переменным $x[j]$ переменную $\mu[j]$, удовлетворяющую уравнению

$$\mu[j] = \mu[j-1] - \|u[j]\|_\infty, \quad j = i+1, \ldots, N; \tag{1.6}$$

$$\mu[i] = \mu_i \tag{1.7}$$

и характеризующую текущий запас управления. Несложно проверить (см. также [15]), что интегральное ограничение (1.3) на управление эквивалентно фазовым ограничениям

$$\mu[j] \geq 0, \quad j = i, \ldots, N. \tag{1.8}$$

В "расширенном" фазовом пространстве точек $z = (x^\top, \mu)^\top \triangleq \{x, \mu\} \in \mathbb{R}^{n+1}$ (где $\top$ — знак транспонирования) можно рассмотреть систему (1.1), (1.4), (1.6) с начальными условиями

$$z[i] = z_i \in \mathcal{Z}_i, \tag{1.9}$$

фазовыми ограничениями (1.5) и ограничениями на $\mu[j]$, которые включают (1.8) и могут быть дополнены результатами неточных измерений $\mu[j]$:

$$\underline{\mu}[j] \leq \mu[j] \leq \overline{\mu}[j], \quad j = i+1, \ldots, N, \tag{1.10}$$

где $0 \leq \underline{\mu}[j] \leq \overline{\mu}[j]$ — заданные числа. В частности, если дополнительная информация о текущем ресурсе управления отсутствует (как было в исходной системе (1.1)—(1.5)), то считаем, что $\underline{\mu}[j] \equiv 0$, $\overline{\mu}[j] \equiv +\infty$.

Множеством достижимости $\mathcal{Z}(k,i,\mathcal{Z}_i)$ системы (1.1), (1.4)–(1.6), (1.9), (1.10) в момент $k \in \{i,\ldots,N\}$ называем множество всех тех точек $z = \{x,\mu\} \in \mathbb{R}^{n+1}$, для каждой из которых существуют такие $z[i] = \{x[i],\mu[i]\}$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (1.4) при $j = i+1,\ldots,k$ и (1.9), что порождаемое ими в силу (1.1), (1.6) решение $z[\cdot] = \{x[\cdot],\mu[\cdot]\}$ будет удовлетворять условиям $z[k] = z$ и (1.5), (1.10) при $j = i+1,\ldots,k$. Далее рассматриваем систему на промежутке $[0,N]$ и используем обозначение $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}(k,0,\mathcal{Z}_0)$. Многозначная функция $\mathcal{Z}[k]$, $k=1,\ldots,N$, известна как *трубка траекторий* $\mathcal{Z}[\cdot]$ [2].

Рассуждения, аналогичные [10, с. 18–19], показывают, что МД $\mathcal{Z}[k]$ обладают полугрупповым свойством

$$\mathcal{Z}(k,0,\mathcal{Z}_0) = \mathcal{Z}(k,i,\mathcal{Z}(i,0,\mathcal{Z}_0)) \ \forall k,i : 0 \le i \le k \le N. \tag{1.11}$$

В разд. 2 будут выписаны рекуррентные соотношения для $\mathcal{Z}[k]$, исследованы их свойства и указана связь между $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$ при специальном выборе множества $\mathcal{Z}_0$.

Будем полагать, что $\mathcal{X}_0$ — параллелепипед

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0,P_0,\pi_0) \equiv \mathcal{P}[p_0,\bar{P}_0], \tag{1.12}$$

а ограничения (1.5) (если присутствуют) являются параллелепипедами

$$\mathcal{Y}[j] = \mathcal{P}(q[j],Q[j],\kappa[j]) \equiv \mathcal{P}[q[j],\bar{Q}[j]] \tag{1.13}$$

или полосами

$$\mathcal{Y}[j] = \mathcal{S}(c[j],S[j],\sigma[j],m[j]) = \bigcap_{i=1}^{m[j]} \Sigma^i[j] \quad (m[j] \le n). \tag{1.14}$$

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p,P,\pi)$ в $\mathbb{R}^n$ называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p,P,\pi) = \left\{ x |\ x = p + \sum_{i=1}^{n} p^i \pi_i \xi_i;\ |\xi_i| \le 1,\ i=1,\ldots,n \right\},$$

где $p \in \mathbb{R}^n$; матрица $P = \{p_j^i\} = \{p^1 \cdots p^n\} \in \mathcal{M}_*^{n\times n}$, $\mathcal{M}_*^{n\times n} = \{P \in \mathbb{R}^{n\times n} |\ \det P \ne 0,\ \|p^i\| = 1\}$ — множество всех неособых $n\times n$-матриц со столбцами единичной длины[1] ($\|a\| = (a,a)^{1/2}$ обозначает евклидову норму); $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \ge 0$[2]. Можно сказать, что p задает центр параллелепипеда, p^i — "направления", а π_i — величины его "полуосей", P — матрица ориентации. Любой параллелепипед является параллелотопом: $\mathcal{P}(p,P,\pi) \equiv \mathcal{P}[p,\bar{P}]$, где $\bar{P} = P{\cdot}\mathrm{diag}\,\pi$, символом $\mathrm{diag}\,\pi$ (или $\mathrm{diag}\,\{\pi_i\}$) обозначаем диагональную матрицу с компонентами π_i вектора π на диагонали.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p,\bar{P}]$ в $\mathbb{R}^n$ называем множество

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}[p,\bar{P}] = \left\{ x |\ x = p + \sum_{i=1}^{r} \bar{p}^i \xi_i;\ |\xi_i| \le 1,\ i=1,\ldots,r \right\},$$

где $p \in \mathbb{R}^n$, $r \le n$, а $n\times r$-матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ может быть особой. Таким образом, p определяет центр параллелотопа, а матрица $\bar{P}$ — его форму. Если $r = n$ и $\det\bar{P} \ne 0$, то параллелотоп является параллелепипедом с $P = \bar{P}\,\mathrm{diag}\,\{\|\bar{p}^i\|^{-1}\}$, $\pi_i = \|\bar{p}^i\|$.

[1] Условие $\|p^i\| = 1$ несущественно и может быть опущено.

[2] Векторные и матричные неравенства понимаем покомпонентно.

Полосой $\mathcal{S}(c,S,\sigma,m)$ называем пересечение m $(1\le m\le n)$ *гиперполос* Σ^i:

$$\mathcal{S}=\mathcal{S}(c,S,\sigma,m)=\bigcap_{i=1}^{m}\Sigma^i,\quad \Sigma^i=\Sigma(c_i,s^i,\sigma_i)=\{x|\ |(x,s^i)-c_i|\le\sigma_i\},$$

где $c\in\mathbb{R}^m$; $S=\{s^i_j\}=\{s^1\cdots s^m\}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ — $n{\times}m$-матрица ранга m со столбцами s^i единичной длины[3]; $\sigma\in\mathbb{R}^m$, $\sigma\ge 0$. Векторы $\pm s^i$ определяют нормали к гиперплоскостям, ограничивающим гиперполосу Σ^i.

Далее предполагаем также, что конусы $\mathcal{K}[j]$ таковы, что параллелепипедами являются множества $\mathcal{R}[j]$[4]:

$$\mathcal{R}[j]=\mathcal{C}\cap\mathcal{K}[j],\quad \mathcal{C}=\mathcal{P}(0,I,e)\subset\mathbb{R}^r,\tag{1.15}$$

а именно, считаем, что

$$\mathcal{R}[j]=\mathcal{P}(r[j],I,\rho[j])\equiv\mathcal{P}[r[j],\operatorname{diag}\rho[j]].\tag{1.16}$$

Здесь $\mathcal{C}$ — единичный куб в $\mathbb{R}^r$ с центром в нуле, I — единичная матрица, $e=(1,1,\ldots,1)^\top$.

При сделанных предположениях МД $\mathcal{X}[k]$ и тем более $\mathcal{Z}[K]$, вообще говоря, не являются параллелепипедами и точное построение МД (особенно для систем большой размерности) может быть затруднительным.

Определим в $\mathbb{R}^{n+1}$ следующий класс политопов $\Pi=\Pi(\{\mathcal{P}^b,\mu^b\},\{\mathcal{P}^t,\mu^t\})$ (частный случай политопа Π в $\mathbb{R}^3$ см. на рис. 1). Если μ^b, μ^t — числа, $0\le\mu^b\le\mu^t$, а $\mathcal{P}^b=\mathcal{P}(p^b,P^b,\pi^b)$, $\mathcal{P}^t=\mathcal{P}(p^t,P^t,\pi^t)$ — параллелепипеды с одинаковыми матрицами $P^b=P^t=P$, то политоп Π определим в виде[5]

$$\begin{gathered}\Pi=\Pi(\{\mathcal{P}^b,\mu^b\},\{\mathcal{P}^t,\mu^t\})=\operatorname{co}(\mathcal{Z}^b\cup\mathcal{Z}^t),\\ \mathcal{Z}^i=\{\mathcal{P}^i,\mu^i\}=\{\mathcal{P}(p^i,P,\pi^i),\mu^i\},\quad i=\text{“}b\text{”},\text{“}t\text{”},\end{gathered}\tag{1.17}$$

где знак $\operatorname{co}\mathcal{Z}$ обозначает выпуклую оболочку множества $\mathcal{Z}$ [18].

Нашей целью будет найти внешние для $\mathcal{Z}[k]$ оценки в виде политопов $\Pi^+[k]$

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}[k]\subseteq\Pi^+[k]=\Pi(\{\mathcal{P}^{+,b}[k],\mu^{+,b}[k]\},\{\mathcal{P}^{+,t}[k],\mu^{+,t}[k]\}),\quad k=0,\ldots,N;\\ \mathcal{P}^{+,i}[k]=\mathcal{P}(p^{+,i}[k],P^{+,i}[k],\pi^{+,i}[k]),\quad i=\text{“}b\text{”},\text{“}t\text{”},\quad P^{+,b}[k]=P^{+,t}[k]=P^+[k],\end{gathered}\tag{1.18}$$

обладающие обобщенным полугрупповым и эволюционным свойствами, являющимися аналогами (1.11), и ввести семейства таких трубок $\Pi^+[\cdot]$, что обеспечит более точные включения $\mathcal{Z}[k]\subseteq\bigcap\Pi^+[k]$. На основе указанных оценок будут введены семейства внешних параллелепипедозначных оценок $\mathcal{P}^+[k]$ для МД $\mathcal{X}[k]$: $\mathcal{X}[k]\subseteq\mathcal{P}^+[k]$, $\mathcal{X}[k]\subseteq\bigcap\mathcal{P}^+[k]$.

Напомним определения упомянутых свойств оценок $\Pi^+[k]$.

Как увидим ниже, $\Pi^+[k]$ могут быть найдены из рекуррентных уравнений с начальными условиями $\Pi^+[0]$, так что по аналогии с МД можно ввести обозначения $\Pi^+[k]\stackrel{\triangle}{=}\Pi^+(k,0,\Pi^+[0])$. Говорят [2], что $\Pi^+[k]$ обладают *“верхним” полугрупповым свойством*, если

$$\Pi^+(k,0,\Pi^+[0])=\Pi^+(k,i,\Pi^+(i,0,\Pi^+[0])),\quad 0\le i\le k\le N,\quad \mathcal{Z}_0\subseteq\Pi^+[0].\tag{1.19}$$

[3]Условие $\|s^i\|=1$ может быть опущено.

[4]Столь специальное по форме ограничение позволяет охватить, например, ситуацию, когда $\mathcal{K}[j]$ — положительный ортант или полупространство, ограниченное координатной плоскостью.

[5]Индексы “b” и “t” произошли от слов “bottom” (“дно”) и “top” (“верхушка”).

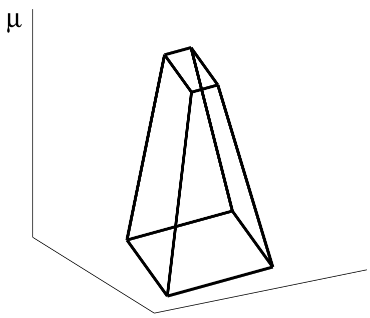


Рис. 1. Политоп Π в $\mathbb{R}^3$.

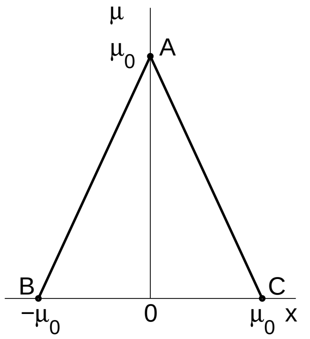


Рис. 2. Множество $\mathcal{Z}[1]$ в примере 2.1.

Говорят [10], что оценки $\Pi^+[k]$ обладают *эволюционным свойством*, если

$$\mathcal{Z}(k, k-1, \Pi^+[k-1]) \subseteq \Pi^+[k], \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mathcal{Z}_0 \subseteq \Pi^+[0]. \tag{1.20}$$

Известно, что свойство (1.20) эквивалентно соотношениям $\mathcal{Z}(k, i, \Pi^+[i]) \subseteq \Pi^+[k]$, $0 \le i \le k \le N$, и обеспечивает включения (1.18).

В работе используются обозначения:

$\triangleq$ — знак равенства по определению;

0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности $k \times l$;

$\operatorname{Abs} A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\}$: $\operatorname{Abs} A = \{|a_i^j|\}$;

$e^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — i-й единичный орт в $\mathbb{R}^n$ (единица стоит на i-м месте);

$\partial \mathcal{Q}$ — граница множества $\mathcal{Q}$;

$\rho(l|\mathcal{Q}) = \sup\{(x, l)|\ x \in \mathcal{Q}\}$, $l \in \mathbb{R}^n$, — опорная функция множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$;

$\operatorname{sign} z$ – функция знака числа: равна -1, 0, 1 соответственно при $z < 0$, $z = 0$, $z > 0$.

2. Точное описание множеств достижимости

Для записи рекуррентных формул для $\mathcal{Z}[k]$ и $\Pi^+[k]$ в компактном виде введем некоторые обозначения. Пусть множество $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ задано своими сечениями $\mathcal{X}(\mu)$[6]:

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\mu^b \le \mu \le \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu), \mu\},\ 0 \le \mu^b \le \mu^t, \quad \mathcal{X}(\mu) \subseteq \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Введем следующие *операции* $\bigodot$, $\bigoplus$, $\bigcap\!\!\!\!\bigcirc$ *и* $\uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}$ *с множеством* $\mathcal{Z}$.

Если $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, то $A \bigodot \mathcal{Z} \triangleq \bigcup\limits_{\mu^b \le \mu \le \mu^t} \{A\mathcal{X}(\mu), \mu\}$.

Если $a \in \mathbb{R}^n$, то $\mathcal{Z} \bigoplus a \triangleq \bigcup\limits_{\mu^b \le \mu \le \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu) + a, \mu\}$.

Если $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$, то $\mathcal{Z} \bigcap\!\!\!\!\bigcirc \mathcal{Y} \triangleq \bigcup\limits_{\mu^b \le \mu \le \mu^t} \{\mathcal{X}(\mu) \cap \mathcal{Y}, \mu\}$.

[6]Которые, в частности, могут быть пусты: $\mathcal{X}(\mu) = \emptyset$ при некоторых μ.

Если $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le \underline{\mu} \le \overline{\mu}$, то

$$\mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} \mathcal{R} \overset{\triangle}{=} \tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\tilde{\mu}^b \le \mu \le \tilde{\mu}^t} \{\tilde{\mathcal{X}}(\mu), \mu\},$$

где

$$\tilde{\mu}^b = \underline{\mu}, \quad \tilde{\mu}^t = \min\{\mu^t, \overline{\mu}\}, \quad \tilde{\mathcal{X}}(\mu) = \bigcup_{\max\{\mu^b,\mu\} \le \zeta \le \mu^t} (\mathcal{X}(\zeta) + (\zeta - \mu)\mathcal{R}). \tag{2.2}$$

Ввиду (1.6) – (1.8) МД $\mathcal{Z}[k]$ можно искать в виде

$$\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{\mu^b[k] \le \mu \le \mu^t[k]} \{\mathcal{X}(\mu, k), \mu\}, \quad k = 0, \ldots, N, \ 0 \le \mu^b[k] \le \mu^t[k]. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.4)–(1.6), (1.9), (1.10), $\mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0$ представлено в виде (2.3) и $\mathcal{Z}[k] \ne \emptyset$ при $k = 1, \ldots, N$. Тогда при записи множеств $\mathcal{Z}[k]$ в виде (2.3) все их сечения $\mathcal{X}(\mu, k)$ и числа $\mu^b[k]$, $\mu^t[k]$ могут быть найдены из рекуррентных соотношений (где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$)*

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}[k] = ((A[k] \bigodot \mathcal{Z}[k-1] \bigoplus v[k]) \uplus_{\underline{\mu}[k]}^{\overline{\mu}[k]} B[k](\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])) \bigcap \mathcal{Y}[k], \quad k = 1, \ldots, N; \\ &\mathcal{Z}[0] = \mathcal{Z}_0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу полугруппового свойства (1.11) имеем $\mathcal{Z}[k] = \mathcal{Z}(k, k-1, \mathcal{Z}[k-1])$ при любом $k \in \{1, \ldots, N\}$. Найдем явное описание для правой части этого равенства, т. е. для множества всех точек, в которые можно попасть в силу системы за один (k-й) шаг, начиная из множества $\mathcal{Z}[k-1]$ в момент $k-1$. Запишем $\mathcal{Z}[k-1]$ в виде (2.3) при $k-1$. Ввиду (1.6), (1.7) из точки $z = \{x, \mu\} \in \mathcal{Z}[k-1]$ с фиксированным $z_{n+1} = \mu$ и $x \in \mathcal{X}(\mu, k-1)$ можно попасть в точки $\tilde{z}$ с $\tilde{z}_{n+1} = \tilde{\mu}$, где $0 \le \tilde{\mu} \le \mu$, тогда и только тогда, когда выберем управление $u[k]$ с $\|u[k]\|_\infty = \mu - \tilde{\mu}$, причем должно выполняться ограничение (1.4), т. е. $u[k] \in (\mu - \tilde{\mu})\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k] = (\mu - \tilde{\mu})(\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])$. Перебирая всевозможные $x \in \mathcal{X}(\mu, k-1)$, можно с учетом фазовых ограничений (1.5) попасть в точки множества $\tilde{\mathcal{X}}(\mu, \tilde{\mu}) \overset{\triangle}{=} (A[k]\,\mathcal{X}(\mu, k-1) + v[k] + (\mu - \tilde{\mu})B[k](\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k])) \cap \mathcal{Y}[k]$. Ввиду (2.3) $\mu^b[k-1] \le \mu \le \mu^t[k-1]$, а ввиду фазовых ограничений (1.10) $\tilde{\mu}$ может принимать любые значения из промежутка $[0, \mu] \cap [\underline{\mu}[k], \overline{\mu}[k]]$. Обозначим множество таких $(\mu, \tilde{\mu})$ через $\mathcal{F}$. Тогда $\mathcal{Z}[k] = \bigcup\limits_{\mu}\bigcup\limits_{\tilde{\mu}}\{\{\tilde{\mathcal{X}}(\mu, \tilde{\mu}), \tilde{\mu}\} \mid (\mu, \tilde{\mu}) \in \mathcal{F}\}$. Рассматривая шесть всевозможных комбинаций соотношений между числами $\mu^b[k-1]$, $\mu^t[k-1]$, $\underline{\mu}[k]$, $\overline{\mu}[k]$, можно заметить, что при нашем предположении $\mathcal{Z}[k] \ne \emptyset$ множество $\mathcal{F}$ представимо в виде $\mathcal{F} = \{(\mu, \tilde{\mu}) \mid \underline{\mu}[k] \le \tilde{\mu} \le \min\{\mu^t[k-1], \overline{\mu}[k]\}, \max\{\mu^b[k-1], \tilde{\mu}\} \le \mu \le \mu^t[k-1]\}$. Поменяем теперь местами объединения по μ и $\tilde{\mu}$ в выражении для $\mathcal{Z}[k]$ и переобозначим $\tilde{\mu}$ на μ, а μ — на ζ. Тогда получаем представление $\mathcal{Z}[k]$ как раз в виде (2.3), где сечения $\mathcal{X}(\mu, k)$ и числа $\mu^b[k]$, $\mu^t[k]$ определяются с учетом введенных операций соотношениями (2.4). □

Вследствие нелинейности системы в расширенном пространстве МД $\mathcal{Z}[k]$ из выпуклого множества $\mathcal{Z}_0$ могут быть невыпуклы, а при наличии фазовых ограничений (1.10) — даже несвязны.

Пример 2.1. Пусть $n = 1$, $k = N = 1$, $A[1] = B[1] = 1$, $v[1] = 0$, $\mathcal{K}[1] = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{Z}_0 = \{0, \mu_0\}$. Тогда в силу системы $x[1] = u[1]$, $\mu[1] = \mu_0 - |u[1]|$. Множество достижимости $\mathcal{Z}[1]$ системы (1.1), (1.4), (1.6), (1.8), (1.9), показанное на рис. 2, представляет собой два отрезка

AB и AC и, очевидно, невыпукло. При фазовых ограничениях (1.10), где $\underline{\mu}[1] = \overline{\mu}[1] = 0$, МД $\mathcal{Z}[1]$ состоит из двух точек — B и C и несвязно.

Выпуклость $\mathcal{Z}[k]$ можно гарантировать, наложив дополнительные условия на $\mathcal{Z}_0$ и $\underline{\mu}[\cdot]$.

Будем говорить, что *сечения множества $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ вида (2.1) не возрастают*, если $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$ $\forall$ μ^1, μ^2 : $\mu^b \le \mu^1 \le \mu^2 \le \mu^t$, другими словами, вместе с любой точкой $\{x, \mu\} \in \mathcal{Z}$ множество $\mathcal{Z}$ содержит и все точки $\{x, \eta\}$, где $\mu^b \le \eta \le \mu$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{Z}$ имеет вид (2.1), его сечения не возрастают, и пусть $\underline{\mu} \ge \mu^b$. Тогда сечения множества $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} \mathcal{R}$ не возрастают, каково бы ни было множество $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{z} \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{x}, \mu\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, где $\underline{\mu} \le \mu \le \min\{\mu^t, \overline{\mu}\}$. В силу (2.2) существуют такие $\zeta \in [\max\{\mu^b, \mu\}, \mu^t]$, $x \in \mathcal{X}(\zeta)$ и $u \in \mathcal{R}$, что $\tilde{x} = x + (\zeta - \mu)u$. Рассмотрим точку $\{\tilde{x}, \eta\}$ с произвольным $\eta \in [\underline{\mu}, \mu]$. Введем $\tilde{\zeta} = \zeta - (\mu - \eta)$. С учетом $\underline{\mu} \ge \mu^b$ имеем $\tilde{\zeta} \ge \max\{\mu^b, \mu\} - (\mu - \eta) = \eta \ge \underline{\mu} \ge \mu^b$. Очевидно, $\tilde{\zeta} \le \zeta \le \mu^t$. Тогда можно записать, что $\tilde{x} = x + (\tilde{\zeta} - \eta)u$, где $x \in \mathcal{X}(\tilde{\zeta})$ в силу свойства $\mathcal{Z}$. Из (2.2) следует, что $\{\tilde{x}, \eta\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$. □

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы 2.1, $\mathcal{K}$ — конус в $\mathbb{R}^r$, $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$ и $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Тогда множества $\mathcal{Z}^1 = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B(\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K})$ и $\mathcal{Z}^2 = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B(\mathcal{C} \cap \mathcal{K})$ совпадают.*

Доказательство. Очевидно, $\mathcal{Z}^1 \subseteq \mathcal{Z}^2$. Пусть $\tilde{z} \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^2$, т.е. найдутся такие $\zeta \in [\mu, \mu^t]$, $x \in \mathcal{X}(\zeta)$ и $u \in \mathcal{K}$, $\|u\|_\infty \le 1$, что $\tilde{x} = x + (\zeta - \mu)Bu$. Если $\|u\|_\infty = 1$, то $\tilde{z} \in \mathcal{Z}^1$. Пусть $\|u\|_\infty = \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда можно записать $\tilde{x}$ в виде $\tilde{x} = x + (\zeta - \tilde{\mu})B\tilde{u}$, где $\tilde{u} = u/\|u\|_\infty \in \mathcal{K}$, $\|\tilde{u}\|_\infty = 1$, а $\tilde{\mu} = \zeta - \varepsilon(\zeta - \mu) = \mu + (1 - \varepsilon)(\zeta - \mu)$. При этом $\mu^b \le \underline{\mu} \le \mu \le \tilde{\mu} \le \zeta$. Ввиду (2.2) $\{\tilde{x}, \tilde{\mu}\} \in \mathcal{Z}^1$, а по лемме 2.1 и $\tilde{z} = \{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^1$. В случае $u = 0$ можно записать $\tilde{x} = x + (\mu - \mu)B\tilde{u}$, где $\tilde{u}$ — произвольная точка из $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, причем $x \in \mathcal{X}(\mu)$ в силу свойства $\mathcal{Z}$. Значит, опять $\{\tilde{x}, \mu\} \in \mathcal{Z}^1$. Включение $\mathcal{Z}^2 \subseteq \mathcal{Z}^1$ доказано. □

Лемма 2.3. *Из выпуклости $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{R}$ при любых $\underline{\mu} \le \overline{\mu}$ следует выпуклость $\tilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} \mathcal{R}$. Если выполнены условия леммы 2.2, причем множество $\mathcal{Z}$ и конус $\mathcal{K}$ выпуклы, то оба множества $\mathcal{Z}^1$ и $\mathcal{Z}^2$ из леммы 2.2 выпуклы.*

Доказательство. Убедимся сначала в выпуклости $\tilde{\mathcal{Z}}$. Пусть $\tilde{z}^k \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{x}^k, \mu^k\} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, $k = 1, 2$, т.е. $\tilde{x}^k = x^k + (\zeta^k - \mu^k)u^k$, где $\zeta^k \in [\max\{\mu^b, \mu^k\}, \mu^t]$, $x^k \in \mathcal{X}(\zeta^k)$, $u^k \in \mathcal{R}$. Рассмотрим точку $z_\lambda \stackrel{\triangle}{=} \{\tilde{x}_\lambda, \mu_\lambda\} = \lambda\tilde{z}^1 + (1-\lambda)\tilde{z}^2$ с $\lambda \in [0, 1]$. Тогда $\tilde{x}_\lambda = x_\lambda + (\zeta_\lambda - \mu_\lambda)u_\lambda$, где $\zeta_\lambda = \lambda\zeta^1 + (1-\lambda)\zeta^2 \in [\max\{\mu^b, \mu_\lambda\}, \mu^t]$, $x_\lambda \in \mathcal{X}(\zeta_\lambda)$ в силу выпуклости $\mathcal{Z}$, а $u_\lambda = (\zeta_\lambda - \mu_\lambda)^{-1}(\lambda(\zeta^1 - \mu^1)u^1 + (1 - \lambda)(\zeta^2 - \mu^2)u^2) \in \mathcal{R}$, если $\zeta_\lambda > \mu_\lambda$ (в силу выпуклости $\mathcal{R}$), и u_λ — произвольный элемент из $\mathcal{R}$, если $\zeta_\lambda = \mu_\lambda$. Имеем $z_\lambda \in \tilde{\mathcal{Z}}$. Значит, $\mathcal{Z}^2$ выпукло, а в силу леммы 2.2 выпукло и $\mathcal{Z}^1$. □

Лемма 2.4. *Если сечения $\mathcal{Z}$ не возрастают, то таково же множество $\mathcal{Z} \circledcirc \mathcal{Y}$ при любом $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$. Если $\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Y}$ выпуклы, то $\mathcal{Z} \circledcirc \mathcal{Y}$ тоже выпукло.*

Лемма очевидна. Из теоремы 2.1 и лемм 2.1 – 2.4 получаем

Следствие 2.1. В условиях теоремы 2.1, если $\mu^b[0] \le \underline{\mu}[1] \le \underline{\mu}[2] \le \ldots \le \underline{\mu}[N]$, а $\mathcal{Z}_0$ выпукло и его сечения не возрастают, то такими же свойствами обладают множества $\mathcal{Z}[k]$ и при их построении в формулах (2.4) можно заменить $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]$ на $\mathcal{R}[k]$.

Из определений МД, теоремы 2.1 и следствия 2.1 вытекает связь между $\mathcal{X}[k]$ и $\mathcal{Z}[k]$.

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (1.1) – (1.5), а $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.4) – (1.6), (1.8), (1.9) из множества $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\} = \{z = \{x, \mu\}|\ x \in \mathcal{X}_0,\ \mu = \mu_0\}$ либо $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0] = \{z = \{x, \mu\}|\ x \in \mathcal{X}_0,\ \mu \in [0, \mu_0]\}$, представленные в виде (2.3), причем все $\mathcal{Z}[k] \ne \emptyset$. Тогда $\mathcal{X}[k] = \bigcup\{\mathcal{X}(\mu, k)|\ 0 \le \mu \le \mu^t[k]\}$, $k = 1, \ldots, N$, $\mathcal{X}[0] = \mathcal{X}_0$. Если $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, то $\mathcal{X}[k] = \mathcal{X}(0, k)$, $k = 1, \ldots, N$, $\mathcal{X}[0] = \mathcal{X}_0$, причем при построении $\mathcal{Z}[k]$ в формулах (2.4) можно заменить $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k]$ на $\mathcal{R}[k]$.

3. Некоторые свойства параллелепипедов и политопов П

Построение полиэдральных оценок для МД основывается на выполнении операций над параллелепипедами и политопами П вида (1.17) (афинного преобразования, суммы Минковского, пересечений для параллелепипедов и введенных в разд. 2 операций для политопов П). Результат такой операции может не принадлежать к рассматриваемому классу множеств и в этом случае будет аппроксимироваться такими множествами снаружи. Приведем некоторые свойства параллелепипедов и политопов П, используемые для построения оценок (см. также [12, 13]).

Опорные функции параллелепипеда и параллелотопа вычисляются по формулам

$$\rho(l|\mathcal{P}(p,P,\pi)) = (p,l) + \mathrm{Abs}\,(l^\top P)\pi, \quad \rho(l|\mathcal{P}[p,\bar{P}]) = (p,l) + \mathrm{Abs}\,(l^\top \bar{P})e. \tag{3.1}$$

Если матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — неособая, $a \in \mathbb{R}^n$, то $A\mathcal{P}(p,P,\pi) + a = \mathcal{P}(Ap+a, AP, \pi) = \mathcal{P}(Ap+a, APB^{-1}, B\pi)$, где $B = \mathrm{diag}\,\{\|Ap^i\|\}$. Если $\mathcal{P}{=}\mathcal{P}[p,\bar{P}] \subset \mathbb{R}^r$, $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $r \le n$, то $A\mathcal{P} = \mathcal{P}[Ap, A\bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$.

Отметим связь между параллелепипедами и полосами, считая столбцы матриц P и S не обязательно нормированными. Если $m = n$, то полоса $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c,S,\sigma,m)$ есть параллелепипед $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p,P,\pi)$ с параметрами $p = {S^{-1}}^\top c$, $P = {S^{-1}}^\top$, $\pi = \sigma$. Обратно, параллелепипед $\mathcal{P}$ есть полоса $\mathcal{S}$ с параметрами $c = P^{-1}p$, $S = {P^{-1}}^\top$, $\sigma = \pi$, $m = n$, т. е.

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | x = p + P\mathrm{diag}\,\pi\,\xi,\ \mathrm{Abs}\,\xi \le e\} = \{x |\ \mathrm{Abs}\,(P^{-1}(x-p)) \le \pi\}. \tag{3.2}$$

Далее будет удобно использовать также следующую запись параллелепипеда:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(p,P,\pi) = \mathcal{P}(P, \gamma^{(-)}, \gamma^{(+)}) \overset{\triangle}{=} \{x \,|\, \gamma^{(-)} \le P^{-1}x \le \gamma^{(+)}\}, \tag{3.3}$$

где связь между параметрами, определяющими параллелепипед, задается формулами

$$\gamma^{(\pm)} = P^{-1}p \pm \pi; \quad p = P(\gamma^{(-)} + \gamma^{(+)})/2, \quad \pi = (\gamma^{(+)} - \gamma^{(-)})/2, \tag{3.4}$$

при этом

$$\gamma_i^{(\pm)} = \pm\rho(\pm{P^{-1}}^\top e^i |\, \mathcal{P}), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3.5}$$

Называем $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p,P,\pi)$ внешним *касающимся параллелепипедом* для $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ и $\rho(\pm(P^{-1})^\top e^i|\mathcal{P}) = \rho(\pm(P^{-1})^\top e^i|\mathcal{Q})$, $i = 1,\ldots,n$.

Внешняя касающаяся оценка для $\mathcal{Q} \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^n$ с данной матрицей P^+ имеет вид

$$\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(p^+, P^+, \pi^+) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,(-)}, \gamma^{+,(+)}), \tag{3.6}$$

где $\gamma_i^{+,(\pm)} = \pm\rho(\pm({P^+}^{-1})^\top e^i |\, \mathcal{Q})$.

Оценка $\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q})$ обладает свойством *монотонности по включению*, т. е. если $\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченные множества и $\mathcal{Q}^1 \subseteq \mathcal{Q}^2$, то $\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q}^1) \subseteq \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q}^2)$ $\forall P^+ \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$.

Сумма $\mathcal{Q}{=}\sum_{j=1}^k \mathcal{P}(p^{(j)}, P^{(j)}, \pi^{(j)})$ параллелепипедов с одинаковыми матрицами $P^{(j)}{=}P$ есть параллелепипед: $\mathcal{Q} = \mathcal{P}(\,\sum_{j=1}^k p^{(j)},\ P, \sum_{j=1}^k \pi^{(j)})$. В общем случае это не так. Оценка $\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q})$ в этом случае принимает вид (3.6), где $p^+ = \sum_{j=1}^k p^{(j)}$, $\pi^+ = \sum_{j=1}^k \mathrm{Abs}\,({P^+}^{-1}P^{(j)})\pi^{(j)}$.

Для семейства множеств $\mathcal{Q}_\lambda$, зависящих от некоторого параметра $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^1$, имеем

$$\boldsymbol{P}^+_{P^+}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{Q}_\lambda\right) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,(-)}, \gamma^{+,(+)}),$$

$$\gamma_i^{+,(\pm)} = \begin{pmatrix} \sup \\ \inf \end{pmatrix} \{\pm\rho(\pm({P^+}^{-1})^\top e^i |\, \mathcal{Q}_\lambda) \;|\lambda \in \Lambda\}. \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{P}^{(k)} = \mathcal{P}(p^{(k)}, P, \pi^{(k)})$, $k = 1, 2$, *— параллелепипеды с одинаковыми матрицами* P. *Тогда множество* $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda = \lambda\mathcal{P}^{(1)} + (1-\lambda)\mathcal{P}^{(2)}$, *где* $\lambda \in [0, 1]$, *совпадает с параллелепипедом* $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}(p_\lambda, P, \pi_\lambda)$, *где* $p_\lambda = \lambda p^{(1)} + (1-\lambda)p^{(2)}$, $\pi_\lambda = \lambda\pi^{(1)} + (1-\lambda)\pi^{(2)}$.

Доказательство. Проверка включений $\mathcal{P}_\lambda \subseteq \tilde{\mathcal{P}}_\lambda$, $\tilde{\mathcal{P}}_\lambda \subseteq \mathcal{P}_\lambda$ проводится соответственно с помощью первого и второго из указанных в (3.2) представлений параллелепипеда. □

Следствие 3.1. Политоп (1.17) может быть представлен в виде

$$\begin{gathered} \Pi = \bigcup_{\mu^b \le \mu \le \mu^t} \{\mathcal{P}(\mu), \mu\}, \quad \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(p(\mu), P, \pi(\mu)), \\ p(\mu) = \lambda p^t + (1-\lambda)p^b, \quad \pi(\mu) = \lambda\pi^t + (1-\lambda)\pi^b, \quad \lambda = (\mu - \mu^b)/(\mu^t - \mu^b). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Доказательство. Несложно заметить, что $\Pi = \bigcup\limits_{0\le\lambda\le1} (\lambda\mathcal{Z}^t + (1-\lambda)\mathcal{Z}^b)$. Теперь (3.8) вытекает из представления типа (2.1) для Π и леммы 3.1. □

Следствие 3.2. Сечения политопа (1.17) не возрастают тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}^t \subseteq \mathcal{P}^b$, и тогда и только тогда, когда все функции $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ монотонно не возрастают, а $\gamma_j^{(-)}(\mu)$ — монотонно не убывают на $[\mu^b, \mu^t]$, где $\gamma^{(\pm)}(\mu)$ определены для $\mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(p(\mu), P, \pi(\mu))$ из (3.8) формулами (3.4), (3.5).

Доказательство проводится с помощью исследования свойств монотонности для опорных функций $\rho(l|\mathcal{P}(\mu)) = ((\mu-\mu^b)/(\mu^t-\mu^b))\rho(l|\mathcal{P}^t) + ((\mu^t-\mu)/(\mu^t-\mu^b))\rho(l|\mathcal{P}^b)$. □

Очевидно, что результат операций $A \bigodot \Pi$ и $\Pi \bigoplus a$ также является политопом типа (3.8). Найдем теперь внешние оценки типа (3.8) для результата операций $\Pi \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B\mathcal{R}$ и $\Pi \bigcap \mathcal{Y}$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\mathcal{R} = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ — конус, $\mathcal{Y}$ — параллелепипед либо гиперполоса.

Будем использовать следующую схему построения оценок для множеств $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ вида (2.1). Сначала при фиксированной матрице $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$ строится внешняя для $\mathcal{Z}$ оценка $\tilde{\mathcal{Z}} \supseteq \mathcal{Z}$, удовлетворяющая соотношениям

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\mu^b\le\mu\le\mu^t} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{(-)}(\mu), \gamma^{(+)}(\mu)) \supseteq \mathcal{X}(\mu) \quad \forall \mu \in [\mu^b, \mu^t].$$

В частности, можно строить $\tilde{\mathcal{Z}}$ в виде

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\mathcal{Z}) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\mu^b\le\mu\le\mu^t} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \tag{3.9}$$

где $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{X}(\mu))$.

При этом $\tilde{\mathcal{Z}}$ может не быть политопом Π типа (3.8). В этом случае предположим, что функции $\gamma^{(\pm)}(\mu)$ представимы в виде

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \begin{pmatrix} \min \\ \max \end{pmatrix} \{\gamma_j^{1(\pm)}(\mu), \gamma_j^{2(\pm)}(\mu)\}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{3.10}$$

причем все функции $\gamma_j^{k(\pm)}(\mu)$ линейны. Построим для $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{(-)}(\mu)$) линейные мажоранты (миноранты) $\gamma_j^{+,(+)}(\mu)$ ($\gamma_j^{+,(-)}(\mu)$), определяемые параметрами $g_j^{(+)}$ ($g_j^{(-)}$):

$$\begin{gathered}\gamma_j^{+,(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)}) + g_j^{(\pm)}(\mu - \mu_{*j}^{(\pm)}),\\ \mu_{*j}^{(\pm)} = \mu_{0j}^{(\pm)},\ g_j^{(\pm)} \in \mp\partial(\mp\gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)})),\ \text{если уравнение } \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{2(\pm)}(\mu)\\ \text{имеет единственный корень } \mu_{0j}^{(\pm)},\ \text{причем } \mu^b < \mu_{0j}^{(\pm)} < \mu^t;\\ \mu_{*j}^{(\pm)} = \mu^b,\ g_j^{(\pm)} = \frac{d}{d\mu}\gamma_j^{(\pm)}(\mu_{*j}^{(\pm)}) \text{ в противном случае,}\end{gathered} \tag{3.11}$$

где в последней формуле имеется в виду правая односторонняя производная. Векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$, удовлетворяющие (3.11), будем называть *допустимыми*. Здесь символом $\partial f(\mu_*)$ обозначен субдифференциал выпуклой функции $f(\mu)$ в точке μ_*. Определим далее множество

$$\mathbf{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}}) \triangleq \bigcup_{\mu^b\le\mu\le\mu^t} \{\mathcal{P}^+(\mu), \mu\}, \quad \mathcal{P}^+(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,(-)}(\mu), \gamma^{+,(+)}(\mu)). \tag{3.12}$$

Оно содержит $\tilde{\mathcal{Z}}$ в силу свойств субдифференциала[7] и представления параллелепипеда в виде (3.3). Таким образом, справедлива

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{Z}$ — множество вида (2.1). При сделанных относительно $\tilde{\mathcal{Z}}$ предположениях множество (3.12) представляет собой политоп типа (3.8) и является внешней для $\mathcal{Z}$ оценкой: $\Pi^+ = \mathbf{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}}) \supseteq \mathcal{Z}$, каковы бы ни были матрица $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$ и допустимые векторы $g^{(-)}$, $g^{(+)}$.*

Из фактов выпуклого анализа [19, с. 211] получаем

Замечание 3.1. Пусть $\gamma(\mu) = \max\{\gamma^1(\mu), \gamma^2(\mu)\}$, где $\gamma^k(\mu) = a_k\mu + b_k$, $k = 1, 2$, и $\mu_0 = (b_2 - b_1)/(a_2 - a_1)$ — единственный корень уравнения $\gamma^1(\mu) = \gamma^2(\mu)$. Тогда $\partial\gamma(\mu_0) = \mathrm{co}\,(\bigcup_{k=1}^2 \partial\gamma^k(\mu_0)) = \mathrm{co}\,(a_1 \cup a_2) = [\min\{a_1, a_2\}, \max\{a_1, a_2\}]$ и любая функция вида $\gamma^+(\mu) = \gamma(\mu_0) + g(\mu - \mu_0)$, $g = \alpha\max\{a_1, a_2\} + (1 - \alpha)\min\{a_1, a_2\}$ $\forall\alpha \in [0, 1]$ служит минорантой для $\gamma(\mu)$: $\gamma^+(\mu) \le \gamma(\mu)$, причем если обе функции $\gamma^1(\mu)$ и $\gamma^2(\mu)$ монотонно не убывают, то этим свойством обладает и $\gamma^+(\mu)$.

Лемма 3.3. *Пусть Π — политоп вида (3.8), $\mathcal{R} \in \mathrm{conv}\,\mathbb{R}^r$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$ и $0 \le \underline{\mu} \le \overline{\mu}$. Тогда внешней оценкой для множества $\mathcal{Z} = \Pi \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B\mathcal{R}$ является политоп вида*

$$\Pi^+ = \bigcup_{\mu^{+,b}\le\mu\le\mu^{+,t}} \{\mathcal{P}(P^+, \gamma^{+,(-)}(\mu), \gamma^{+,(+)}(\mu)), \mu\},\ \mu^{+,b} = \underline{\mu},\ \mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \overline{\mu}\},$$

построенный по формулам $\Pi^+ = \mathbf{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\mathcal{Z})$, каковы бы ни были матрица $P^+\in\mathcal{M}_0^{n\times n}$ и векторы $g^{(\pm)}$, допустимые в силу (3.11), где μ^b, μ^t надо заменить на $\mu^{+,b}$, $\mu^{+,t}$. Здесь

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \bigcup_{\mu^{+,b}\le\mu\le\mu^{+,t}} \{\tilde{\mathcal{P}}(\mu), \mu\}, \quad \tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \mathcal{P}(P^+, \gamma^{(-)}(\mu), \gamma^{(+)}(\mu)); \tag{3.13}$$

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = (Dp^t \pm C\pi^t)_j + (\mu^t - \mu)h_j^{(\pm)}, \tag{3.14}$$

[7]Напомним [18], что вектор x^* называется субградиентом функции $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, в точке x_0, если $f(x) - f(x_0) \ge (x - x_0, x^*)$, а множество всех субградиентов в точке x_0 называется суддифференциалом $\partial f(x_0)$.

если либо $\mu^b = \mu^t$, *либо* $\mu^b < \mu^t$ *и выполняются условия*

$$(Dp^t \pm C\pi^t)_j + (\mu^t - \mu^b)h_j^{(\pm)} \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} (Dp^b \pm C\pi^b)_j, \tag{3.15}$$

а если $\mu^b < \mu^t$ *и (3.15) не выполняется, то имеет место представление (3.10), где*

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) \ \textit{при}\ \mu \geq \mu^b, \quad \gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \gamma_j^{2(\pm)}(\mu) \ \textit{при}\ \mu \leq \mu^b; \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} \gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = ((\mu - \mu^b)/(\mu^t - \mu^b))(Dp^t \pm C\pi^t)_j + ((\mu^t - \mu)/(\mu^t - \mu^b))(Dp^b \pm C\pi^b)_j, \\ \gamma_j^{2(\pm)}(\mu) = (Dp^b \pm C\pi^b)_j + (\mu^b - \mu)h_j^{(\pm)} \end{gathered} \tag{3.17}$$

и использованы обозначения

$$D = P^{+^{-1}}, \quad C = \mathrm{Abs}\,(P^{+^{-1}}P), \quad h_j^{(\pm)} = \pm\rho(\pm(P^{+^{-1}})^\top e^i |\, B\mathcal{R}). \tag{3.18}$$

Доказательство. Имеем $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{X}(\mu))$, где в силу определения операции $\Pi \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B\mathcal{R}$

$$\mathcal{X}(\mu) = \bigcup_{\max\{\mu^b,\mu\}\leq\zeta\leq\mu^t} (\mathcal{P}(\zeta) + (\zeta - \mu)B\mathcal{R}). \tag{3.19}$$

Ввиду формул (3.1), (3.7) в случае $\mu^b = \mu^t$ получаем (3.14), а при $\mu^b < \mu^t$

$$\gamma_j^{(\pm)}(\mu) = \begin{pmatrix} \max \\ \min \end{pmatrix} \{\varphi_j^{(\pm)}(\zeta,\mu) \,|\, \max\{\mu^b,\mu\}\leq\zeta\leq\mu^t\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \max \\ \min \end{pmatrix} \{\varphi_j^{(\pm)}(\max\{\mu^b,\mu\},\mu), \varphi_j^{(\pm)}(\mu^t,\mu)\},$$

$$\varphi^{(\pm)}(\zeta,\mu) \stackrel{\triangle}{=} ((\zeta - \mu^b)/(\mu^t - \mu^b))(Dp^t \pm C\pi^t) + ((\mu^t - \zeta)/(\mu^t - \mu^b))(Dp^b \pm C\pi^b) + (\zeta - \mu)h^{(\pm)}.$$

С учетом неравенства $\max\{\mu^b,\mu\} - \mu^t \leq 0$ несложно проверить, что соотношения $\varphi_j^{(\pm)}(\mu^t,\mu) \begin{pmatrix} \geq \\ \leq \end{pmatrix} \varphi_j^{(\pm)}(\max\{\mu^b,\mu\},\mu)$ эквивалентны условиям (3.15) и $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ определяются формулами (3.14) – (3.18). Включение $\mathcal{Z} \subseteq \Pi^+$ следует из леммы 3.2. □

Следствие 3.3. Если в условиях леммы 3.3 либо $\mu^b = \mu^t$, либо $\mu^b < \mu^t$ и $\underline{\mu} = \mu^b$, то $\Pi^+ = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\mathcal{Z})$.

Доказательство. Функции $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ в (3.14), (3.16) оказываются линейными, а векторы $g^{(\pm)}$ определяются в силу (3.11) однозначно и обеспечивают равенство $\mathbf{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}}) = \tilde{\mathcal{Z}}$. □

Следствие 3.4. Пусть $\Pi^{(1)}$ и $\Pi^{(2)}$ — два политопа (1.17) с одинаковыми $\mathcal{P}^{(1),b} = \mathcal{P}^{(2),b} = \mathcal{P}^{(1),t} = \mathcal{P}^{(2),t}$ и $\mu^{(1),t} = \mu^{(2),t}$, но у первого $\mu^{(1),b} = \mu^{(1),t}$, а у второго $\mu^{(2),b} < \mu^{(2),t}$ и пусть $\mathcal{Z}^{(k)} = \Pi^{(k)} \uplus_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}} B\mathcal{R}$, причем $0 \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующие в силу леммы 3.3 оценки имеют вид $\Pi^{(k)+} = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\mathcal{Z}^{(k)})$ и совпадают: $\Pi^{(1)+} = \Pi^{(2)+}$.

Доказательство. Условие $0 \in \mathcal{R}$ обеспечивает $\rho(l|B\mathcal{R}) \geq 0$ и, значит, (3.15). □

Следствие 3.5. Если в условиях леммы 3.3 множество $\mathcal{R}$ представимо в виде $\mathcal{R} = \mathcal{C} \cap \mathcal{K}$, где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e) \subset \mathbb{R}^r$, а $\mathcal{K}$ — конус, то сечения множества $\mathcal{Z}$ и его оценки Π^+ не возрастают[8]. Если к тому же $\mathcal{R}$ оказывается параллелепипедом $\mathcal{R} = \mathcal{P}(r, I, \rho)$, то величины $h_j^{(\pm)}$ из (3.18) вычисляются по явным формулам $h^{(\pm)} = d \pm f$, $d = DBr$, $f = \mathrm{Abs}\,(DB)\rho$.

[8]В отличие от леммы 2.1 не делается предположений о невозрастании сечений Π и о $\underline{\mu}$.

Доказательство. Пусть $\mu^1 \leq \mu^2$. Расписывая $\mathcal{X}(\mu^1)$ в виде (3.19), заменяя отрезок $[\max\{\mu^b, \mu^1\}, \mu^t]$, по которому производится объединение, вложенным в него отрезком $[\max\{\mu^b, \mu^2\}, \mu^t]$ и используя включение $(\zeta - \mu^1)\mathcal{R} \supseteq (\zeta - \mu^2)\mathcal{R}$, получаем $\mathcal{X}(\mu^1) \supseteq \mathcal{X}(\mu^2)$. Из монотонности по включению операции $\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Q})$ следует, что $\tilde{\mathcal{P}}(\mu^1) \supseteq \tilde{\mathcal{P}}(\mu^2)$. Значит, сечения $\mathcal{Z}$ и $\tilde{\mathcal{Z}}$ не возрастают и функции $\gamma_j^{(+)}(\mu)$ $(\gamma_j^{(-)}(\mu))$ монотонно не возрастают (не убывают). Ввиду замечания 3.1 и следствия 3.2 сечения политопа Π^+ не возрастают. □

Лемма 3.4. *Пусть* Π *— политоп вида (3.8), а* $\mathcal{Y} \in \operatorname{conv}\mathbb{R}^n$*. Тогда внешней оценкой для множества* $\mathcal{Z} = \Pi \circledcirc \mathcal{Y} \neq \emptyset$ *является политоп* Π^+*, построенный по формулам* $\Pi^+ = \boldsymbol{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\Pi) \circledcirc \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Y})$*, каковы бы ни были матрица* $P^+ \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$ *и векторы* $g^{(-)}$, $g^{(+)}$*, допустимые в силу (3.11). Здесь* $\tilde{\mathcal{Z}}$ *имеет вид (3.13), (3.10), где* $\gamma^{1(\pm)}(\mu)$ *описываются такими же формулами, что и в (3.17), а* $\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) \equiv \pm\rho(\pm({P^+}^{-1})^\top e^i | \mathcal{Y})$*. В частности, если* $\mathcal{Y} = \mathcal{P}(q, Q, \kappa)$ *— параллелепипед в* $\mathbb{R}^n$*, то* $\gamma_j^{2(\pm)} \equiv (d \pm f)_j$*, где* $d = Dq$*,* $f = \operatorname{Abs}(DQ)\kappa$*,* $D = {P^+}^{-1}$*,* $C = \operatorname{Abs}(DP)$*. Допуская в (3.13) возможность* $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \emptyset$*, можно считать, что* $\mu^{+,b} = \mu^b$*,* $\mu^{+,t} = \mu^t$*.*

Доказательство. Включения $\Pi^+ \supseteq \mathcal{Z}$ следуют из леммы 3.2, так как $\tilde{\mathcal{P}}(\mu) = \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{P}(\mu)) \cap \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{Y}) \supseteq \mathcal{P}(\mu) \cap \mathcal{Y}$, а функции $\gamma^{(\pm)}(\mu)$ имеют указанный выше вид [12, лемма 3.14]. □

Следствие 3.6. В условиях леммы 3.4, если сечения Π не возрастают, то таким же свойством обладают множества $\mathcal{Z}$, $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+. При этом все сечения $\tilde{\mathcal{P}}(\mu)$ и $\mathcal{P}^+(\mu)$ множеств $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+ непусты, если положить $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \min_{1\leq j\leq n} \tilde{\mu}_j\}$, где $\tilde{\mu}_j$ — корень уравнения $\gamma_j^{(-)}(\mu) = \gamma_j^{(+)}(\mu)$, если он единственный, и $\tilde{\mu}_j = +\infty$ в остальных случаях.

Доказательство. Сечения $\mathcal{Z}$ не возрастают ввиду леммы 2.4. Заметим, что $(Dp^i \pm C\pi^i)_j = \pm\rho(\pm({P^+}^{-1})^\top e^j | \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{P}^i))$, $i =$ “b”, “t”. Поэтому включения $\boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{P}^b) \supseteq \boldsymbol{P}^+_{P^+}(\mathcal{P}^t)$ обеспечивают невозрастание (неубывание) функций $\gamma_j^{1(+)}(\mu)$ $(\gamma_j^{1(-)}(\mu))$ из (3.17), а значит, и соответствующее свойство функций $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ вида (3.10), поскольку $\gamma_j^{2(\pm)}(\mu)$ постоянны. Ввиду замечания 3.1 и следствия 3.2 сечения $\tilde{\mathcal{Z}}$ и Π^+ не возрастают. Последнее утверждение леммы также вытекает из свойств монотонности функций $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$. □

В случае, когда $\mathcal{Z} = \Pi \circledcirc \mathcal{Y}$, Π — политоп вида (1.17), (3.8), а $\mathcal{Y} = \Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$ — гиперполоса, несколько внешних оценок Π^+ можно найти в явном виде, выбрав матрицы ориентации P^+ специальным образом.

Введем множество $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{P}^b \cap \Sigma^0)$ неособых матриц, состоящее не более чем из $n+1$ элементов $P^{(l)}$, $l = 0, \ldots, n$. Здесь $P^{(0)} = P = \{p^1 \cdots p^n\}$, а $P^{(l)}$, $l \in \{1, \ldots, n\}$, определена при условии $(p^l, s^0) \neq 0$ и равна $P^{(l)} = ({S^{(l)}}^\top)^{-1}$, где матрица $S^{(l)}$ получена из $S = (P^{-1})^\top$ заменой l-го столбца на s^0. Известно [20], что столбцы матрицы $P^{(l)}$ имеют вид

$$p^{(l),i} = p^i - (p^i, s^0)(p^l, s^0)^{-1} p^l, \quad i = 1, \ldots, n,\ i \neq l; \quad p^{(l),l} = (p^l, s^0)^{-1} p^l.$$

Лемма 3.5. *Пусть* Π *— политоп (3.8), а* $\mathcal{Y} = \Sigma^0 = \mathcal{S}(c_0, s^0, \sigma_0, 1)$*. Тогда внешней оценкой для* $\mathcal{Z} = \Pi \circledcirc \mathcal{Y} \neq \emptyset$ *является политоп, построенный по формулам* $\Pi^+ = \boldsymbol{\Pi}^+_{g^{(-)},g^{(+)}}(\tilde{\mathcal{Z}})$, $\tilde{\mathcal{Z}} = \boldsymbol{Z}^+_{P^+}(\mathcal{Z})$*, каковы бы ни были матрица* $P^+ = P^{(l)} \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^b \cap \Sigma^0)$ $(l \in \{0, \ldots, n\})$ *и векторы* $g^{(-)}$, $g^{(+)}$*, допустимые в силу (3.11). Здесь* $\tilde{\mathcal{Z}}$ *имеет вид (3.13), (3.10), где*

$$\gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = (P^{-1}p(\mu))_j \pm \pi_j(\mu),$$

$$\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) = \begin{cases} (P^{-1}p(\mu))_j + |\omega_j|^{-1}(\zeta_j^{(\pm)}(\mu) \pm \sigma_0) \mp \pi_j(\mu),\ \omega_j \neq 0, \\ \pm\infty,\ \omega_j = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq l, \end{cases}$$

$$\gamma_l^{1(\pm)}(\mu) = c_0 \pm \sigma_0, \quad \gamma_l^{2(\pm)}(\mu) = c_0 + \zeta_0^{(\pm)}(\mu),$$

$p(\mu)$, $\pi(\mu)$ — такие же, как в (3.8), а

$$\omega_\alpha = (p^\alpha, s^0), \quad \alpha = 1, \ldots, n, \quad \omega_0 = -1;$$
$$\zeta_\alpha^{(\pm)}(\mu) = \pm \mathrm{Abs}\,(\omega)^\top \pi(\mu) - (\mathrm{sign}\,\omega_\alpha)((p(\mu), s^0) - c_0), \quad \alpha = 0, \ldots, n.$$

Допуская пустые сечения $\tilde{\mathcal{P}}(\mu)$, можно считать, что $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \mu^t$.

Доказательство. Включения $\Pi^+ \supseteq \mathcal{Z}$ следуют из леммы 3.2. Формулы для $\gamma_j^{(\pm)}$ получены эквивалентным преобразованием формул из [20, 13], определяющих оценки $\boldsymbol{P}_V^+(\mathcal{P} \cap \Sigma^0)$, $V \in \mathcal{V}(\mathcal{P} \cap \Sigma^0)$, проведенным для выявления явного вида линейных функций $\gamma_j^{i(\pm)}(\mu)$. □

Следствие 3.7. Лемме 3.5 соответствуют утверждения, аналогичные следствию 3.6, где необходимо положить $\mu^{+,b} = \mu^b$, $\mu^{+,t} = \min\{\mu^t, \mu^{(-)}, \mu^{(+)}\}$, где $\mu^{(\pm)}$ — корень уравнения $\rho(\pm s^0|\mathcal{P}(\mu)) = \pm c_0 - \sigma_0$, если он единственный, и $\mu^{(\pm)} = +\infty$ в остальных случаях.

Доказательство аналогично доказательству следствия 3.6. При этом нужную монотонность функций $\gamma_j^{(\pm)}(\mu)$ несложно установить, если заметить, что

$$\gamma_j^{2(\pm)}(\mu) = \mathrm{const}_j^{2(\pm)} \pm |\omega_j|^{-1} \rho(\pm(|\omega_j|(P^{-1})^\top e^j - (\mathrm{sign}\,\omega_j)s^0)|\mathcal{P}(\mu)) \text{ при } \omega_j \neq 0,$$
$$\gamma_j^{1(\pm)}(\mu) = \rho(\pm(P^{-1})^\top e^j|\mathcal{P}(\mu)), \quad j = 1, \ldots, n, j \neq l,$$
$$\gamma_l^{2(\pm)}(\mu) = \mathrm{const}_l^{2(\pm)} \pm \rho(\pm s^0|\mathcal{P}(\mu)), \quad \gamma_l^{1(\pm)}(\mu) = \mathrm{const}_l^{1(\pm)}.$$

Выражение для $\mu^{+,t}$ вытекает с учетом монотонности из того, что $\mathcal{P}(\mu) \cap \Sigma^0 \neq \emptyset$, тогда и только тогда, когда $\zeta_0^+(\mu) \geq -\sigma_0$ и $-\zeta_0^-(\mu) \geq -\sigma_0$ [20]. □

4. Внешние оценки множеств достижимости

Из теоремы 2.1, включений $\partial\mathcal{C} \cap \mathcal{K}[k] \subseteq \mathcal{R}[k]$, леммы 3.3 и следствий 3.3, 3.5 вытекает

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.4), (1.6), (1.8), (1.9) без фазовых ограничений на x и с начальным множеством $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}[0]$, где $\mu^t[0] = \mu_0$ и либо $\mu^b[0] = \mu_0$, либо $\mu^b[0] = 0$. Если*

$$\Pi^+[k] = \boldsymbol{Z}^+_{P^+[k]}((A[k] \bigodot \Pi^+[k-1] \bigoplus v[k]) \uplus_0^{\mu_0} B[k]\mathcal{R}[k]), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{4.1}$$

где $\mathcal{R}[k]$ определены в (1.15), то $\mathcal{Z}[k] \subseteq \Pi^+[k]$, $k = 1, \ldots, N$, каковы бы ни были матрицы $P^+[k] \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$, $k = 1, \ldots, N$, и политоп $\Pi^+[0] \supseteq \mathcal{Z}_0$ с $\mu^{+,i}[0] = \mu^i[0]$, $i =$ “b”, “t”. При этом сечения политопов $\Pi^+[k]$, $k = 1, \ldots, N$, не возрастают.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (1.1) – (1.4) без фазовых ограничений, $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы из теоремы 4.1 с начальным множеством $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$, а политопы*

$$\Pi^+[k] = \bigcup_{\mu^{+,b}[k] \leq \mu \leq \mu^{+,t}[k]} \{\mathcal{P}^+(\mu, k), \mu\}, \quad k = 0, \ldots, N, \tag{4.2}$$

где $\mu^{+,b}[k] \equiv 0$, $\mu^{+,t}[k] \equiv \mu_0$, находятся из соотношений (4.1), причем $\Pi^+[0] = \boldsymbol{Z}^+_{P^+[0]}(\mathcal{Z}_0)$. Тогда

$$\mathcal{X}[k] \subseteq \mathcal{P}^+(0, k) \equiv \mathcal{P}^{+,b}[k], \quad k = 0, \ldots, N, \tag{4.3}$$

при любых матрицах $P^+[k]\in\mathcal{M}_0^{n\times n}$, $k=0,\ldots,N$. Если $P\in\mathcal{M}_*^{n\times n}$ — произвольная матрица, а

$$P^+[k]=A[k]P^+[k-1],\quad k=1,\ldots,N,\quad P^+[0]=P,$$

то $\mathcal{P}^{+,b}[k]$ и $\mathcal{P}^+(\mu,k)$ являются внешними касающимися оценками соответственно для $\mathcal{X}[k]$[9] и сечений $\mathcal{X}(\mu,k)$ множеств $\mathcal{Z}[k]$ при любом $\mu\in[0,\mu_0]$ и

$$\mathcal{X}[k]=\bigcap\{\mathcal{P}^{+,b}[k]\,|\,P\},\quad \mathcal{Z}[k]=\bigcap\{\Pi^+[k]\,|\,P\},\quad k=1,\ldots,N, \tag{4.4}$$

где пересечение достаточно взять по произвольному множеству матриц $P\in\mathcal{M}_*^{n\times n}$, обладающему тем свойством, что для каждого вектора $l\in\mathbb{R}^n$, $\|l\|=1$, в этом множестве найдется такая матрица P, что l коллинеарен какому-либо из столбцов P^{-1}.

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{Z}_0=\mathcal{X}_0\times[0,\mu_0]$. Включения (4.3) вытекают из теоремы 4.1 и следствия 2.2. Свойство $\mathcal{P}^+(\mu,k)$ быть касающимися для $\mathcal{X}(\mu,k)$, т. е.

$$\rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i|\mathcal{P}^+(\mu,k))=\rho(\pm(P^+[k]^{-1})^\top e^i|\mathcal{X}(\mu,k)),\quad i=1,\ldots,n,\quad k=1,\ldots,N, \tag{4.5}$$

доказывается индукцией по k аналогично [14, теорема 4.1]. При этом проводятся выкладки, подобные сделанным при доказательстве леммы 3.3, и учитывается, что ввиду следствия 2.2 в формулах (2.4) можно писать $\mathcal{R}[k]$ вместо $\partial\mathcal{C}\cap\mathcal{K}[k]$, и ввиду следствия 3.3 политопы $\Pi^+[k]$ определяются только параметрами $P^+[k]$. Свойство (4.5) для $\mathcal{X}(\mu,k)\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$ вместе с варьированием P обеспечивает второе из равенств (4.4), а ввиду следствия 2.2 — и первое. При $\mathcal{Z}_0=\{\mathcal{X}_0,\mu_0\}$ оценки $\Pi^+[k]$ оказываются такими же ввиду следствия 3.4, а потому верно последнее утверждение теоремы. □

Из теоремы 2.1, лемм 3.3, 3.4 и следствий 3.5, 3.6 вытекает

Теорема 4.3. *Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.4), (1.6), (1.9) с фазовыми ограничениями (1.5), где $\mathcal{Y}[j]\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, и (1.10), и пусть все $\mathcal{Z}[k]\neq\emptyset$. Если политопы $\Pi^+[k]$ находятся по формулам*

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}^{(0)+}[k]=\boldsymbol{Z}^+_{P^{(0)+}[k]}((A[k]\bigodot\Pi^+[k-1]\bigoplus v[k])\uplus^{\overline{\mu}[k]}_{\underline{\mu}[k]}B[k]\mathcal{R}[k]),\\ \Pi^{(0)+}[k]=\boldsymbol{\Pi}^+_{g^{(0)(-)}[k],g^{(0)(+)}[k]}(\mathcal{Z}^{(0)+}[k]);\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}^{(1)+}[k]=\boldsymbol{Z}^+_{P^{(1)+}[k]}(\Pi^{(0)+}[k])\bigcap\boldsymbol{P}^+_{P^{(1)+}[k]}(\mathcal{Y}[k]),\\ \Pi^+[k]=\boldsymbol{\Pi}^+_{g^{(1)(-)}[k],g^{(1)(+)}[k]}(\mathcal{Z}^{(1)+}[k]),\quad k=1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{4.7}$$

то $\mathcal{Z}[k]\subseteq\Pi^+[k]$, $k=1,\ldots,N$, каковы бы ни были матрицы $P^{(i)+}[k]\in\mathcal{M}_0^{n\times n}$ и допустимые векторы $g^{(i)(\pm)}[k]$, $i=0,1$, $k=1,\ldots,N$, и политоп $\Pi^+[0]\supseteq\mathcal{Z}_0$. При этом сечения политопов $\Pi^+[k]$ не возрастают.

Учитывая следствия 2.2 и 3.3, получаем

Следствие 4.1. Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (1.1) – (1.5) с $\mathcal{Y}[j]\in\operatorname{conv}\mathbb{R}^n$, $\mathcal{Z}_0=\{\mathcal{X}_0,\mu_0\}$ либо $\mathcal{Z}_0=\mathcal{X}_0\times[0,\mu_0]$, $\underline{\mu}[k]\equiv 0$, $\overline{\mu}[k]\equiv\mu_0$, а политопы $\Pi^+[k]$ вида (4.2) находятся из соотношений (4.6), (4.7), где $\Pi^+[0]=\boldsymbol{Z}^+_{P^+[0]}(\mathcal{Z}_0)$ и $\Pi^{(0)+}[k]=\mathcal{Z}^{(0)+}[k]$, $k=1,\ldots,N$. Тогда при любых матрицах $P^+[0]$, $P^{(0)+}[k]$, $P^{(1)+}[k]\in\mathcal{M}_0^{n\times n}$ и допустимых векторах $g^{(1)(\pm)}[k]$ имеют место включения (4.3).

Из теоремы 2.1, лемм 3.3, 3.5 и следствий 3.5, 3.7 вытекает

[9] И, значит, семейство $\mathcal{P}^{b+}[\cdot]$ совпадает с семейством оценок, введенных для $\mathcal{X}[\cdot]$ в [14, теорема 4.1].

Теорема 4.4. *Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — МД системы (1.1), (1.4), (1.6), (1.9) с фазовыми ограничениями (1.5) и (1.10), где $\mathcal{Y}[j]$ — полосы (1.14), и пусть все $\mathcal{Z}[k] \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{Z}^{(0)+}[k]$, $\Pi^{(0)+}[k]$ построены, как и в (4.6), а*

$$\begin{gathered}\mathcal{Z}^{(i)+}[k] = \boldsymbol{Z}^{+}_{P^{(i)+}[k]}(\Pi^{(i-1)+}[k] \circledcirc \Sigma^{i}[k]),\\ \Pi^{(i)+}[k] = \boldsymbol{\Pi}^{+}_{g^{(i)(-)}[k], g^{(i)(+)}[k]}(\mathcal{Z}^{(i)+}[k]), \quad i = 1, \ldots, m[k],\\ \Pi^{+}[k] = \Pi^{(m[k])+}[k], \quad k = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{4.8}$$

каковы бы ни были матрицы $P^{(0)+}[k] \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$, $k = 1, \ldots, N$, $P^{(i)+}[k] \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^{(i-1)+,b}[k] \cap \Sigma^{i}[k])$, $i = 1, \ldots, m[k]$, $k = 1, \ldots, N$, допустимые векторы $g^{(i)(\pm)}[k]$, $i = 0, \ldots, m[k]$, $k = 1, \ldots, N$, и политоп $\Pi^{+}[0] \supseteq \mathcal{Z}_0$. Тогда политопы $\Pi^{+}[k]$ являются внешними оценками для $\mathcal{Z}[k]$ и сечения $\Pi^{+}[k]$ не возрастают.

Учитывая следствия 2.2 и 3.3, получаем

Следствие 4.2. Пусть $\mathcal{X}[k]$ — МД системы (1.1)–(1.5), (1.14), а политопы $\Pi^{+}[k]$ вида (4.2) находятся из соотношений (4.1) и (4.8), где $\Pi^{+}[k]$ и $P^{+}[k]$ заменены на $\Pi^{(0)+}[k]$ и $P^{(0)+}[k]$, $\Pi^{+}[0] = \boldsymbol{Z}^{+}_{P^{+}[0]}(\mathcal{Z}_0)$, а $\mathcal{Z}_0 = \{\mathcal{X}_0, \mu_0\}$ либо $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{X}_0 \times [0, \mu_0]$. Тогда при любых указанных в теореме 4.4 значениях параметров $P^{(\cdot)+}[\cdot]$, $g^{(\cdot)(\pm)}[\cdot]$ и $P^{+}[0] \in \mathcal{M}_0^{n\times n}$ имеют место включения (4.3).

Замечание 4.1. Если $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{R}[k]$ — параллелепипеды, $\mathcal{Y}[k]$ — параллелепипеды или полосы, то все операции в рекуррентных формулах в теоремах 4.1–4.4 производятся по явным формулам из разд. 3.

Замечание 4.2. Политопы $\Pi^{+}[k]$ из теорем 4.1–4.4 обладают “верхним” полугрупповым (1.19) и эволюционным (1.20) свойствами.

5. Примеры

Приведем примеры оценок МД $\mathcal{X}[N]$ для многошаговых систем (1.1)–(1.5), (1.12), (1.14), (1.16) специального вида (полученных дискретизацией систем с непрерывным временем), в которых

$$A[j] \equiv I + h_N A, \quad h_N = \theta N^{-1}, \quad B[j] \equiv B, \quad v[j] \equiv 0.$$

Оценки $\mathcal{P}^{+}[N]$ построены в соответствии со следствием 4.2 при $P^{+}[0] = P_0$ и нескольких других случайным образом выбранных матрицах $P^{+}[0]$. Матрицы $P^{(0)+}[\cdot]$ найдены по формулам $P^{(0)+}[k] = A[k]P^{+}[k-1]$. Политопы $\Pi^{(i)+}[k]$ при каждом $i \in \{1, \ldots, m[k]\}$, $k \in \{1, \ldots, N\}$ найдены путем выбора политопа, “наилучшего” в смысле некоторого критерия, среди оценок, определяемых возможными матрицами ориентации $P^{(i)+}[k] \in \mathcal{V}(\mathcal{P}^{(i-1)+,b}[k] \cap \Sigma^{i}[k])$ и найденных минимизацией по $2n$ параметрам $g_j^{(i)(\pm)}[k]$, $j = 1, \ldots, n$, которые, в свою очередь, определяются в соответствии с формулами типа приведенных в замечании 3.1 значениями $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in [0, 1]$. Эта минимизация (при фиксированной матрице $P^{(i)+}[k]$) проводилась либо по конечному множеству значений $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in \{0, 1\}$, либо по множеству всевозможных $\alpha_j^{i(\pm)}[k] \in [0, 1]$ с помощью симплексного метода Нелдера — Мида (Nelder — Mead) (с бесконечными штрафами вне допустимой области и начальным приближением в точке $\alpha_j^{i(\pm)}[k] = 0.99$, $j = 1, \ldots, n$). В качестве упомянутого критерия оптимальности политопа $\Pi^{(i)+}[k]$ использовался объем параллелепипеда, являющегося “нижним” сечением вспомогательного политопа $\boldsymbol{Z}^{+}_{A[k+1]P^{(i)+}[k]}((A[k+1] \odot \Pi^{(i)+}[k])$

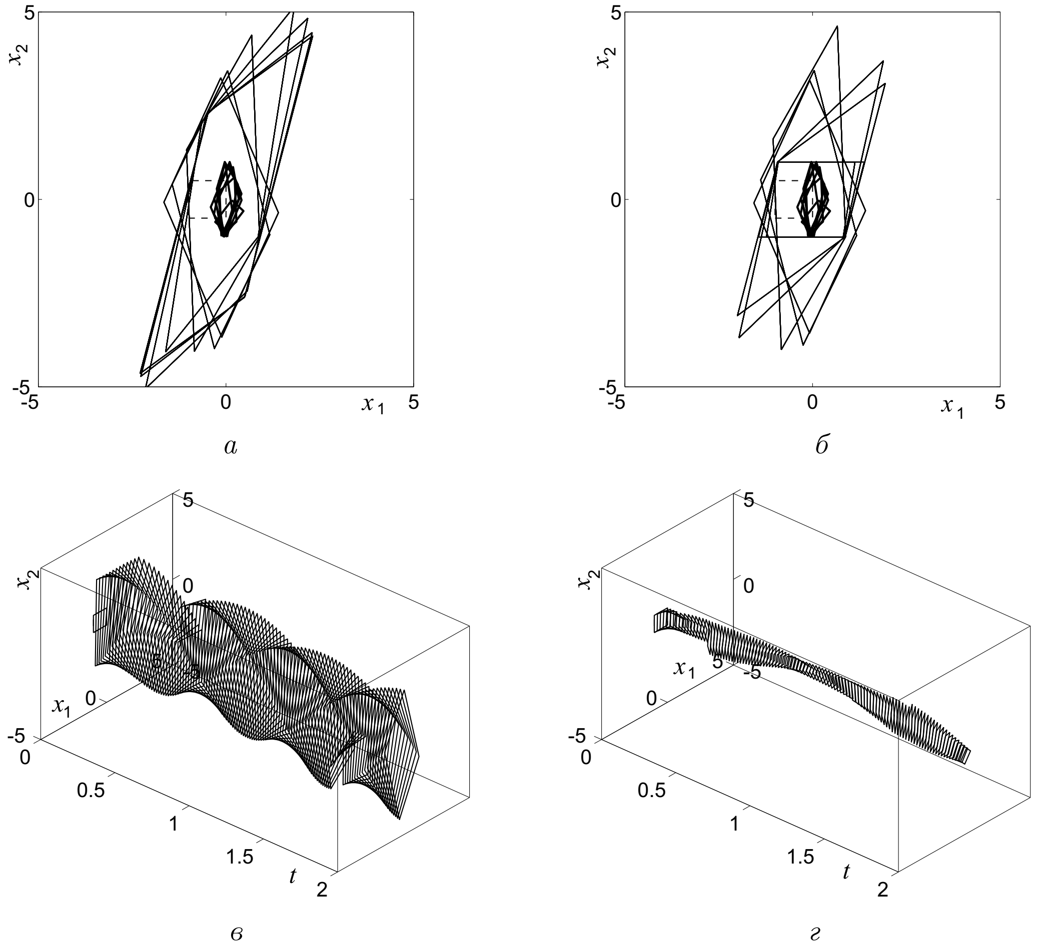
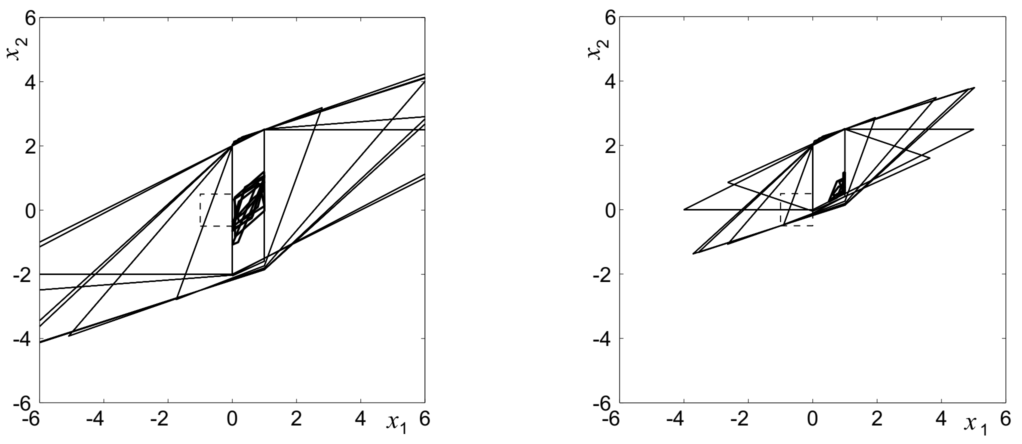


Рис. 3. Внешние и внутренние оценки множеств достижимости $\mathcal{X}[N]$ и $\mathcal{X}[k]$ в примере 5.1.

$\uplus_0^{\mu_0} B[k+1]\mathcal{R}[k+1])$ (считая при $k = N$, что $A[k+1] = I$, $B[k+1] = 0)$[10]. Для сравнения будут приведены также несколько внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$, построенных в соответствии с теоремой 5.2 из [14], когда значения фигурирующих там параметров $h[\cdot]$, Λ, $\Gamma^{(1)}[\cdot]$, $\Gamma^{(2)}[\cdot]$ взяты, как и в [14, пример 6.2], $P^{(i)-}[j] \equiv P^{(0)-}[j]$, а параметры $p^{(i)-}[j] \in \operatorname{Argmax}\{\operatorname{vol} \boldsymbol{P}^-_{v,P^{(i)-}[j]}(\mathcal{Q}) |\ v \in \mathcal{Q}\}$, где $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^{(i-1)-}[j] \cap \Sigma^i[j]$, вычислены с помощью метода Нелдера — Мида с начальным приближением, найденным с использованием формул (3.19), (3.21) ($i = 1, \ldots, m[k]$) из [14].

Пример 5.1. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $p_0 = (-0.5, 0)^\top$, $P_0 = I$, $\pi_0 = (0.5, 0.5)^\top$; $\mu_0 = 2$; $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$ (т. е. $r[j] \equiv 0$, $R[j] \equiv 1$, $\rho[j] \equiv 1$); $c[j] \equiv 0$; $S[j] \equiv (0,1)^\top$; $\sigma[j] \equiv 1$; $\theta = 2$; $N = 200$. На рис. 3, *а*, *б* показаны множество $\mathcal{X}_0$ (штриховая линия) и семь внешних оценок $\mathcal{P}^+[N]$ для $\mathcal{X}[N]$ (светлые линии), построенных, как описано выше, соответственно при первом и втором способах минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$. Жирными линиями показаны несколько внутренних для $\mathcal{X}[N]$ оценок $\mathcal{P}^-[N]$. На рис. 3, *в* показана динамика во времени внешних для $\mathcal{X}[k]$ оценок $\mathcal{P}^+[k]$, соответствующих $P^+[0] = P_0$ и первому способу

[10] Некоторые другие опробованные критерии, например объем политопа $\Pi^{(i)+}[k]$ или объем параллелепипеда, лежащего в его “нижнем” основании, или сумма объемов “верхнего” и “нижнего” оснований, в описанных ниже примерах дали худшие результаты.



а *б*

Рис. 4. Внешние и внутренние оценки для множества достижимости $\mathcal{X}[N]$ в примере 5.2: *а* — случай $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$; *б* — случай $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$.

минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$, на рис. 3, *г* — одна из внутренних оценок для трубки $\mathcal{X}[\cdot]$ ($\mathcal{P}^{\pm}[k]$ изображены через каждые два шага k).

Пример 5.2. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $c[j] \equiv 0.5$; $S[j] \equiv (1,0)^\top$; $\sigma[j] \equiv 0.5$, а B, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0)$, μ_0, θ и N — такие же, как в примере 5.1. И пусть либо опять $\mathcal{K}[j] \equiv \mathbb{R}^1$ (случай 1), либо $\mathcal{K}[j] \equiv [0, \infty)$, т.е. $r[j] \equiv 0.5$, $R[j] \equiv 1$, $\rho[j] \equiv 0.5$ (случай 2). Указанным случаям соответствуют рис. 4, *а*, *б*, которые аналогичны 3, *а* и получены при первом способе минимизации по $\alpha_j^{i(\pm)}[k]$.

Сравнение рис. 3, *а*, *б* и 4, *а*, *б* с аналогичными рисунками, приведенными в [14], показывает, что построенные оценки оказываются меньше, чем оценки МД аналогичных систем без фазовых ограничений.

Автор выражает глубокую признательность академику А.Б. Куржанскому за внимание к работе, обсуждение результатов и замечания.

Список литературы

[1] Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.

[2] Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.

[3] Кац И.Я., Куржанский А.Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79–87.

[4] Кощеев А.С., Куржанский А.Б. Адаптивное оценивание эволюции многошаговых систем в условиях неопределенности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 72–93.

[5] Панасюк А.И., Панасюк В.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986.

[6] Bushenkov V., Chernykh O., Kamenev G., Lotov A. Multi-dimensional images given by mappings: construction and visualization // Pattern Recognition and Image Analysis. 1995. Vol. 5, N 1. P. 35–56.

[7] Goncharova E.V., Baturin V.A., Sousa J.B., Pereira F.L. A reachable set estimation algorithm for impulsive control systems // Tools for Mathematical Modelling: Proc. of the The Fourth Intern. Conf., June 23–28, 2003, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Technical Univ., 2003. P. 213–219. (Mathematical Research, Vol. 9).

[8] Гусейнов Х.Г., Незнахин А.А., Ушаков В.Н. Приближенное построение множеств достижимости с интегральными ограничениями на управление // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 4. С. 580–590.

[9] Revenko V.V., Sesekin A.N., Stephanova A.V. Attainability sets of dynamic systems with impulse control // Preprints of the Eleventh IFAC Intern. Workshop "Control Applications of Optimization", July 3–6, 2000, St.-Petersburg. St.-Petersburg: St.-Petersburg State Univ., 2000. Vol. 2. P. 172–176.

[10] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.

[11] Костоусова Е.К., Куржанский А.Б. Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 19–27.

[12] Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization Methods & Software. 1998. Vol. 9, N 4. P. 269–306.

[13] Костоусова Е.К. Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 107–126.

[14] Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках множеств достижимости линейных многошаговых систем с интегральными ограничениями на управление // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 55–74.

[15] Дарьин А.Н., Куржанский А.Б. Нелинейный синтез при двойных ограничениях // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1476–1484.

[16] Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.

[17] Сиротин А.Н., Формальский А.М. Области достижимости и управляемости линейных дискретных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 4. С. 5–16.

[18] Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

[19] Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

[20] Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. AC-41, N 6. P. 774–785.

Поступила в редакцию 22 марта 2004 г.,
в переработанном виде — 29 июня 2004 г.