ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ДВУЦИКЛИЧЕСКИЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИЛЬНО НЕСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

Л. Г. Чикина, Б. Л. Крукиер
Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: `chikin@rsu.ru, bk@rsu.ru`

An idea of including only skew-symmetric component of a matrix into the iterative operator of the triangular parts belongs to L.A. Krukier (1979). Further, this idea was developed by him and his collaborators for the product (PTKM) and the double cyclic (DTKM) triangular skew-symmetric methods, where only one relaxation parameter was included into the operator of the method. The novelty of the suggested methods consists in the generalization to the case of two different parameters (relaxation parameter is different from the parameter in the operator of the method) of the method DTKM and in the application of the new ideas for the proof of convergence.

Введение

Решение систем линейных алгебраических уравнений является важной составляющей частью моделирования различных научно-технических задач. Если моделирование происходит в движущейся диффундирующей среде, то в уравнениях, описывающих эту модель, обязательно присутствуют члены, описывающие процессы конвекции и диффузии. Поэтому уравнение конвекции-диффузии является модельным для широкого круга прикладных задач. Аппроксимируя эти уравнения конечными разностями или конечными элементами, сводим исходную непрерывную задачу в случае использования неявных схем или при решении стационарных задач к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений.

В случае большой размерности системы для ее решения используются, как правило, итерационные методы. В настоящее время предложено большое количество методов решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [1, 2], большинство из которых эффективно работают со СЛАУ, матрицы их обладают некими дополнительными специальными свойствами, такими как симметричность, разреженность, знакопостоянство части или всех элементов, монотонность и др. Вместе с тем разработанный аппарат теории

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00005), гранта РФФИ и администрации Ростовской области (№ 04-01-96807) и программы Университеты России УР.03.01.024.

итерационных методов [2–4] не всегда удается эффективно использовать для решения задач с нарушением или отсутствием каких-то из вышеперечисленных свойств. Нас в первую очередь будут интересовать СЛАУ, матрицы которых потеряли свойство симметрии. Такие системы получаются, например, при наличии в дифференциальных уравнениях производных нечетных порядков. Ситуация еще более усложняется, когда несимметричная часть матрицы становится очень большой, т. е. норма кососимметричной части матрицы существенно превышает норму симметричной ее части. Такие СЛАУ называют сильно несимметричными. Матрицы такого класса появляются, например, в результате использования центрально-разностных схем при аппроксимации уравнения конвекции-диффузии с малым параметром при старшей производной.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f. \tag{1}$$

Для любой действительной матрицы A справедливо разложение на симметричную и кососимметричную составляющие части исходной матрицы, т. е.

$$\begin{aligned} &A = A_0 + A_1, \\ &A_0 = \left(A + A^T\right)/2 = A_0^T, \\ &A_1 = \left(A - A^T\right)/2 = -A_1^T. \end{aligned}$$

Для кососимметричной составляющей справедливо следующее разложение:

$$A_1 = K_U + K_L,$$

где K_U и K_L — строго нижняя и верхняя треугольные части матрицы A_1, причем

$$K_U = -K_L^T.$$

Определение 1. Матрица А называется диссипативной, если ее симметричная часть A_0 положительно определена [2].

Большинство итерационных методов, которые применяются для решения линейных систем, могут быть объединены общей формулой

$$B_n \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_n} + A\, y^n = f, \tag{2}$$

где B_n — последовательность невырожденных матриц (операторов метода); A — исходная матрица; $\tau_n > 0$ — последовательность итерационных параметров; y^0 — начальное приближение; f — правая часть, $f, y^0 \in H, H$ — конечномерное гильбертово пространство; y^n — решение на n-й итерации. Этот итерационный процесс можно записать в эквивалентном виде

$$z^{n+1} = z^n - \tau_n B_n^{-1} r^n,$$

где $r^n = Ay^n - f$ — вектор невязки на n-й итерации, а $z^n = y^n - y$ — вектор ошибки этого метода (y-точное решение метода).

Определение 2. Итерационный метод (2) называется S-циклическим, если

$$\tau_n\, B_n^{-1} = \tau_{n+s}\, B_{n+s}^{-1}$$

для любого n≥0 и фиксированного $s > 1$ [4].

Определение 3. Итерационный метод (2) называется стационарным, если матрица B_n не зависит от номера итерации (оператор метода $B = B_n$ является постоянной матрицей) [4].

Пусть матрица A в (1) диссипативна. Для решения системы (1) рассмотрим следующий двуциклический итерационный метод:

$$\begin{cases} F \ \dfrac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + A\, y^n = f, \\ T \ \dfrac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + A\, y^{n+1/2} = f. \end{cases} \tag{3}$$

В системе (3) $\tau > 0$ — итерационный параметр; F и T — обратимые операторы метода; y^0 — начальное приближение, f — правая часть, $f, y^0 \in H$, H — конечномерное гильбертово пространство, y^n — решение на n-й итерации.

На первом этапе находится значение $y^{n+1/2}$ как решение первого уравнения системы (3), а на втором этапе решается второе уравнение системы (3), из которой находится значение y^{n+1}.

Цикл вычислений состоит в поочередном применении двух итерационных методов с операторами F и T.

Определим погрешности z^n, $z^{n+1/2}$ и z^{n+1} как разности

$$z^n = y^n - y,$$

$$z^{n+1/2} = y^{n+1/2} - y,$$

$$z^{n+1} = y^{n+1} - y$$

между решениями $y^n, y^{n+1/2}$ и y^{n+1}в (3) и точным решением y исходной системы (1).

Перейдем к уравнениям для погрешностей

$$\begin{cases} F \ \dfrac{z^{n+1} - z^{n+1/2}}{\tau} + A\, z^{n+1/2} = 0, \\ T \ \dfrac{z^{n+1/2} - z^n}{\tau} + A\, z^n = 0 \end{cases} \tag{4}$$

и перепишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} F\, z^{n+1} &= (F - \tau\, A)\, z^{n+1/2}, \\ T\, z^{n+1/2} &= (T - \tau\, A)\, z^n\, . \end{cases}$$

Проведя алгебраические преобразования и избавясь от промежуточной неизвестной $z^{n+1/2}$, метод (4) можно переписать в операторном виде

$$z^{n+1} = G\, z^n, \tag{5}$$

где оператор перехода G имеет вид произведения

$$G = G_F G_T. \tag{6}$$

В равенстве (6)

$$G_F = F^{-1}\,(F - \tau A)\,,$$

$$G_T = T^{-1}\left(T - \tau A\right).$$

Для сходимости итерационного метода (3) в энергетическом пространстве H_D достаточно потребовать [2]

$$\left\|z^{n+1}\right\|_D < \rho \left\|z^n\right\|_D, 0 < \rho < 1, D = D^T > 0. \tag{7}$$

Таким образом, в силу соотношении (7) сходимость итерационного метода (3) целиком определяется оператором перехода (5).

Представим оператор $B = B_n$ в (2) в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих

$$B = B_0 + B_1.$$

В [5] впервые было предложено при решении сильно несимметричных задач использовать треугольные части K_L и K_U кососимметричной составляющей матрицы системы (1) для посторения оператора B итерационного метода (2), причем таким образом, чтобы его кососимметричная составляющая удовлетворяла соотношению

$$B_1 = \tau A_1. \tag{8}$$

Условие (8), связывающее кососимметричные составляющие матрицы исходной системы (1) и оператора итерационного метода (2), обеспечивает самосопряженность оператора $B - \tau A$, входящего в оператор перехода:

$$G = B^{-1}\left(B - \tau A\right) = \left(B_0 + \tau A_1\right)^{-1}\left(B_0 - \tau A_0\right). \tag{9}$$

Равенство (8) достигается, когда оператор метода B имеет следующую треугольную структуру [5, 6]:

$$F = E + 2\tau K_L \tag{10}$$

или

$$T = E + 2\tau K_U. \tag{11}$$

Итерационный метод (2) с операторами метода (10) или (11) называется треугольным кососимметрическим методом (ТКМ).

Требование диссипативности оператора B итерационного метода (2) и (8), т. е. $B_0 = B_0^T > 0$, позволяет преобразовать оператор перехода (9) к виду

$$G = B_0^{-1/2}(E + \tau B_0^{-1/2} A_1 B_0^{-1/2})^{-1}(E - \tau B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2}) B_0^{-1/2}$$

и доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть диссипативный оператор B удовлетворяет соотношению (8) [5]. Тогда для сходимости итерационного метода (2) в энергетическом пространстве H_{B_0} достаточно выполнения неравенства*

$$\left\|\left(E + \tau P_1\right)^{-1}\left(E - \tau P_0\right)\right\| < 1$$

или

$$\left\|\left(E - \tau P_0\right)\right\| < 1, \tag{12}$$

где $P_0 = B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2}, P_1 = B_0^{-1/2} A_1 B_0^{-1/2}$.

Следствием условия (12) является достаточное условие сходимости (2), (8) в виде операторного неравенства

$$B_0 > 0,5\tau A_0. \tag{13}$$

В [6] было получено обобщение результата (13).

Лемма 1. *Пусть A и B — диссипативные операторы в (2) и оператор B удовлетворяет соотношению (8). Тогда выполнение операторных неравенств для симметричных составляющих операторов A и B*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B_0 < A_0 < \frac{1+\rho}{\tau} B_0,$$

где $0 < \rho < 1$, достаточно для того, чтобы для любого $z_0 \in H$ и погрешности задачи (2) выполнялась оценка

$$\left\| z^{n+1} \right\|_{B_0} < \rho \left\| z^n \right\|_{B_0}.$$

Используя операторы (10) и (11), в работе [7] исследован на сходимость в энергетических нормах B_{L_0} и B_{U_0} двуциклический треугольный кососимметрический метод (ДТКМ)

$$\begin{cases} (E + 2\tau K_L) \dfrac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau} + Ay^{n+1/2} = f, \\ (E + 2\tau K_L) \dfrac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau} + Ay^n = f. \end{cases} \tag{14}$$

Таким образом, предложен новый класс треугольных, попеременно-треугольных и двуциклических методов, основанный на использовании в треугольных операторах лишь верхней и нижней треугольных составляющих кососимметричной части исходной матрицы. Методы данного класса относятся к методам неполной факторизации, представленным Н.И. Булеевым [8, 9], развитым и обоснованным в работах В.П. Ильина [10] и R.S. Varga [11]. Для случая M-матриц обоснования неполного разложения Холецкого даны в работе [12].

1. Достаточное условие сходимости двухпараметрического ДТКМ

В соответствии с идеей из [5] построим в (3) операторы F и T так, чтобы они включали треугольные части кососимметричной составляющей матрицы системы и зависели от второго итерационного параметра $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} F = B_L &= \mathrm{Diag}\,(B_L) + \omega K_L, \\ T = B_U &= \mathrm{Diag}\,(B_U) + \omega K_U. \end{aligned} \tag{15}$$

Каждый из операторов B_L и B_U из (15) представим в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих:

$$\begin{aligned} B_{L_0} &= \mathrm{Diag}\,(B_L) + 0,5\omega \left(K_L + K_L^T\right), \\ B_{L_1} &= 0,5\omega \,(K_L + K_U) = 0,5\omega A_1, \\ B_{U_0} &= \mathrm{Diag}\,(B_U) + 0,5\omega \left(K_U + K_U^T\right), \\ B_{U_1} &= 0,5\omega \,(K_L + K_U) = 0,5\omega A_1. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что кососимметричные составляющие операторов B_L и B_U равны между собой и пропорциональны кососимметричной составляющей исходной матрицы.

Для оценки нормы оператора перехода двухпараметрического ДТКМ (3), (15)

$$G = G_L G_U,$$

произведем некоторые преобразования операторов G_L и G_U. Рассмотрим оператор

$$G_L = B_L^{-1}\left(B_L - \tau A\right)$$

и подставим в выражение для оператора B_L его симметричную и кососимметричную составляющие:

$$G_L = \left(B_{L_0} + 0,5\omega\, A_1\right)^{-1}\left(B_{L_0} + 0,5\omega\, A_1 - \tau\, A_0 - \tau\, A_1\right).$$

Оператор $B_L - \tau A$ не является симметричным. Добавляя и отнимая в обеих скобках оператор $0.5\omega A_0$, получим

$$G_L = \left(B_{L_0} - 0,5\omega\, A_0 + 0,5\omega\, A_1 + 0,5\omega\, A_0\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(B_{L_0} - 0,5\omega\, A_0 + 0,5\omega\, A_1 - \tau\, A_0 - \tau\, A_1 + 0,5\omega\, A_0\right).$$

Введем оператор

$$N_{L_0} = B_{L_0} - 0,5\omega\, A_0 = N_{L_0}^T,$$

что позволит записать оператор перехода G_L в следующем виде:

$$G_L = \left(N_{L_0} + 0,5\omega\, A\right)^{-1}\left(N_{L_0} - (\tau - 0,5\omega)\, A\right).$$

Потребуем, чтобы оператор N_{L_0} (N_{U_0}) был положительно определен, т. е.

$$N_{L_0} = B_{L_0} - 0,5\omega\, A_0 = N_{L_0}^T > 0 \left(N_{U_0} = B_{U_0} - 0,5\omega\, A_0 = N_{U_0}^T > 0\right). \tag{16}$$

Тогда возможны следующие преобразования:

$$G_L = N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\left(E + 0,5\omega\, N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\, A\, N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(E - (\tau - 0,5\omega)\, N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\, A\, N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\right) N_{L_0}^{\frac{1}{2}}.$$

Введем оператор

$$P_L = N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\, A\, N_{L_0}^{-\frac{1}{2}} \quad \left(P_U = N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\, A\, N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{17}$$

и получим

$$G_L = N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\left(E + 0,5\omega\, P_L\right)^{-1}\left(E - (\tau - 0,5\omega)\, P_L\right) N_{L_0}^{\frac{1}{2}}$$

или

$$G_L = N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\, \tilde{G}_L\, N_{L_0}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\tilde{G}_L = \left(E + 0,5\omega\, P_L\right)^{-1}\left(E - (\tau - 0,5\omega)\, P_L\right).$$

Таким образом, получили оператор перехода $\tilde{G}_L$, подобный исходному оператору G_L.

Аналогичными преобразованиями получим и оператор $\tilde{G}_U$

$$G_U = N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{G}_U\,N_{U_0}^{\frac{1}{2}},$$
$$\tilde{G}_U = (E + 0,5\omega\, P_U)^{-1}\,(E - (\tau - 0,5\omega)\,P_U)\,,$$
$$P_U = N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\,A\,N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Для сходимости итерационного метода достаточно [1, 2], чтобы норма оператора перехода была меньше 1, а в нашем случае — это норма произведения операторов:

$$\|G\| = \|G_L\,G_U\| \le \left\|N_{L_0}^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{G}_L\,N_{L_0}^{\frac{1}{2}}\right\| \cdot \left\|N_{U_0}^{-\frac{1}{2}}\,\tilde{G}_U\,N_{U_0}^{\frac{1}{2}}\right\| = \|G_L\|_{N_{L_0}} \cdot \|G_U\|_{N_{U_0}} < 1,$$

что в свою очередь выполняется, если справедливы неравенства

$$\begin{cases} \left\|\tilde{G}_L\right\| = \|G_L\|_{N_{L_0}} < 1, \\ \left\|\tilde{G}_U\right\| = \|G_U\|_{N_{U_0}} < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Итак, оценим норму оператора $\tilde{G}_L$

$$\left\|\tilde{G}_L\right\|^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\big((E + 0,5\omega\, P_L)^{-1}\,(E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,x, (E + 0,5\omega\, P_L)^{-1}\,(E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,x\big)}{(x,x)}.$$

Операторы $(E + 0,5\omega P_L)^{-1}$ и $(E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)$ являются коммутативными, поэтому

$$\left\|\tilde{G}_L\right\|^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{\big((E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,(E + 0,5\omega\, P_L)^{-1}\,x, (E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,(E + 0,5\omega\, P_L)^{-1}\big)}{(x,x)}.$$

Производя замену
$$y = (E + 0,5\omega\, P_L)^{-1}\,x \Rightarrow x = (E + 0,5\omega\, P_L)\,y,$$
получаем
$$\begin{aligned} \left\|\tilde{G}_L\right\|^2 &= \sup_{y\neq 0} \frac{((E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,y, (E - (\tau - 0,5\omega)\,P_L)\,y)}{((E + 0,5\omega\, P_L)\,y, (E + 0,5\omega\, P_L)\,y)} = \\ &= 1 - \tau \inf_{y\neq 0} \frac{2\,(P_L\,y, y) - (\tau - \omega)\,(P_L\,y, P_L\,y)}{\big((y,y) + \omega\,(P_L\,y, y) + (0,5\omega)^2\,(P_L\,y, P_L\,y)\big)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из формулы (19) следует, что для выполнения первого из условий (18) достаточно выполнения неравенства

$$2\,(P_L\,y, y) - (\tau - \omega)\,(P_L\,y, P_L\,y) > 0.$$

Произведя аналогичные выкладки, получаем, что для выполнения второго из условий (18) достаточно
$$2\,(P_U\,y, y) - (\tau - \omega)\,(P_U\,y, P_U\,y) > 0.$$

Таким образом, получили достаточное условие сходимости метода (3), (15).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (16). Тогда для сходимости метода (3), (15) достаточно выполнения условий*

$$\begin{cases} 2\,(P_L\,y, y) - (\tau - \omega)\,(P_L\,y, P_L\,y) > 0, \\ 2\,(P_U\,y, y) - (\tau - \omega)\,(P_U\,y, P_U\,y) > 0, \end{cases} \tag{20}$$

где P_L и P_U определены формулами (17).
Доказательство этой теоремы приведено выше.

Так как $(P_L\,y, P_L\,y) > 0$ и $(P_U\,y, P_U\,y) > 0$, условие (20) можно записать в виде

$$\begin{cases} 0 < \tau < \omega + \dfrac{2\,(P_L\,y, y)}{(P_L\,y, P_L\,y)}, \\ 0 < \tau < \omega + \dfrac{2\,(P_U\,y, y)}{(P_U\,y, P_U\,y)}. \end{cases}$$

Следствие 1. Пусть выполняются условия (16). Если оператор А в (1) диссипативен, то для сходимости метода (3), (15) достаточно выполнения условия

$$0 < \tau < \omega.$$

Доказательство. В условиях (20)

$$(P_L\,y, P_L\,y) > 0, (P_U\,y, P_U\,y) > 0.$$

Так как матрица A диссипативна, операторы P_L и P_U, заданные равенством (17), также диссипативны в силу свойств диссипативных операторов [2]. Значит, для выполнения условий (20) достаточно потребовать $\omega - \tau > 0 \Rightarrow 0 < \tau < \omega$.

Следствие доказано.

2. Ускорение двуциклических методов

Рассмотрим возможности ускорения сходимости предложенных методов путем учета в обращаемом операторе метода информации об изменениях в строках и столбцах исходной матрицы. Для этого рассмотрим в первую очередь условия положительной определенности (16) и запишем их в следующем виде:

$$\begin{cases} N_{L_0} = \mathrm{Diag}\,(B_L) + 0,5\omega\left(K_L + K_L^T\right) - 0,5\omega A_0 > 0, \\ N_{U_0} = \mathrm{Diag}\,(B_U) - 0,5\omega\left(K_L + K_L^T\right) - 0,5\omega A_0 > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} N_{L_0} = \mathrm{Diag}\,(B_L) - 0,5\omega\mathrm{Diag}\,(A_0) + 0,5\omega\left(K_L + K_L^T\right) - 0,5\omega\overline{A_0} > 0, \\ N_{U_0} = \mathrm{Diag}\,(B_U) - 0,5\omega\mathrm{Diag}\,(A_0) - 0,5\omega\left(K_L + K_L^T\right) - 0,5\omega\overline{A_0} > 0, \end{cases}$$

где $\overline{A_0} = \left\{\overline{A_0}\right\}_{ij}, \ \ i \neq j, \ \ \overline{A_0} = \overline{K_{0L}} + \overline{K_{0U}}$.

Так как матрицы N_{L_0} и N_{U_0} симметричны, их собственные числа действительны и по теореме Гершгорина [1] для положительной определенности операторов N_{L_0} и N_{U_0} достаточно выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} \left\{N_{L_0}\right\}_{ii} > 0, \\ \left\{N_{L_0}\right\}_{ii} \geq \sum\limits_{i \neq j} \left|\left\{N_{L_0}\right\}_{ij}\right|, \end{cases} \quad \begin{cases} \left\{N_{U_0}\right\}_{ii} > 0, \\ \left\{N_{U_0}\right\}_{ii} \geq \sum\limits_{i \neq j} \left|\left\{N_{U_0}\right\}_{ij}\right|, \end{cases} \tag{21}$$

причем хотя бы для одной строки в каждой системе неравенство должно быть строгим.

Запишем условия (21) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \{\mathrm{Diag}\,(B_L) - 0,5\omega \mathrm{Diag}\,(A_0)\}_{ii} > 0, \\ \{\mathrm{Diag}\,(B_U) - 0,5\omega \mathrm{Diag}\,(A_0)\}_{ii} > 0. \\ \{\mathrm{Diag}\,(B_L)\}_{ii} - 0,5\omega \mathrm{Diag}\,(A_0) \geqslant 0,5\omega \sum\limits_{i\neq j} \left(\left| \{K_L\}_{ij} + \{\overline{K_{0L}}\}_{ij} \right| + \left| \{K_L^T\}_{ij} + \left\{\overline{K_{0L}^T}\right\}_{ij} \right| \right), \\ \{\mathrm{Diag}\,(B_U)\}_{ii} - 0,5\omega \mathrm{Diag}\,(A_0) \geqslant 0,5\omega \sum\limits_{i\neq j} \left(\left| \{K_U\}_{ij} + \{\overline{K_{0U}}\}_{ij} \right| + \left| \{K_U^T\}_{ij} + \left\{\overline{K_{0U}^T}\right\}_{ij} \right| \right). \end{cases}$$

Тогда, очевидно, что если в качестве диагоналей операторов метода взять следующие выражения:

$$\begin{cases} \{\mathrm{Diag}\,(B_L)\}_{ii} = 0,5\omega \sum\limits_{i\neq j} \left(\left|\{K_L\}_{ij}\right| + \left|\{\overline{A_0}\}_{ij}\right| + \left|\{K_L^T\}_{ij}\right| \right) + 0,5\omega \{\mathrm{Diag}\,(A_0)\}_{ii}\,, \\ \{\mathrm{Diag}\,(B_U)\}_{ii} = 0,5\omega \sum\limits_{i\neq j} \left(\left|\{K_U\}_{ij}\right| + \left|\{\overline{A_0}\}_{ij}\right| + \left|\{K_U^T\}_{ij}\right| \right) + 0,5\omega \{\mathrm{Diag}\,(A_0)\}_{ii}\,, \end{cases}$$

то они обеспечат выполнение условий (16) и тем самым дадут сходимость двухпараметрического ДТКМ с диссипативным оператором системы, сохраняя при этом в операторах B_L и B_U информацию об изменениях в строках и столбцах исходной матрицы. Кроме того, построение диагоналей матриц B_Lи B_U не требует существенных вычислительных затрат, что не понижает эффективность метода.

3. Численные исследования ДТКМ с различными ускорителями

Численное исследование итерационных методов проводилось на следующей модельной задаче: в замкнутой области $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ рассматривалось стационарное уравнение конвекции-диффузии

$$-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta u + \frac{1}{2}\left(v_1 \frac{\partial\, u}{\partial\, x} + \frac{\partial\ (v_1 u)}{\partial\, x} + v_2 \frac{\partial\, u}{\partial\, y} + \frac{\partial\ (v_2 u)}{\partial\, y} \right) = f(x,y),$$

$$d\vec{iv}V = 0, V = \{v_1, v_2\}, \tag{22}$$

конвективные члены которого записаны в симметричном виде, т. е. как полусумма дивергентной и недивергентной форм записи. Если есть условия (22), все три формы записи уравнения конвекции-диффузии (дивергентная, недивергентная и симметричная) эквивалентны [13]. На границе области расчета ставились нулевые краевые условия 1-го рода.

В рассматриваемой области строилась регулярная сетка с равными шагами по обоим направлениям. После аппроксимации этого уравнения на стандартном пятиточечном шаблоне, где конвективная часть аппроксимировалась центральными разностями, получается система линейных алгебраических уравнений с диссипативной пятидиагональной матрицей A.

Итерационный процесс прекращался, если

$$\frac{\left\|r^{(k)}\right\|_2}{\left\|r^{(0)}\right\|_2} < \varepsilon, \varepsilon = 10^{-6},$$

где $r^{(k)}$ и $r^{(0)}$ – невязки соответственно на k-й и нулевой итерациях.

В качестве точного решения бралась функция

$$U(x, y) = e^{xy} \sin \pi x \sin \pi y,$$

обращающаяся в нуль на границе.

При проведении численного исследования рассмотрены четыре варианта задания коэффициентов при конвективных членах (табл. 1).

Коэффициенты скоростей были подобраны таким образом, чтобы удовлетворить условию (22) для каждой задачи. Расчеты проводились при числах Pe $= 10^3, 10^4, 10^5$. Исследовалось влияние числа Pe и итерационного параметра τ на число итераций n.

Было проведено численное исследование трех методов решения системы (1) с диссипативной матрицей A, получаемой в результате описанной конечно-разностной аппроксимации уравнения конвекции-диффузии:

— стандартного двуциклического треугольного кососимметрического метода с одним параметром τ, где $B_L = E + 2\tau K_L$, $B_U = E + 2\tau K_U$, обозначаемого в табл. 2 ДТКМ(τ);

Таблица 1

Коэффициенты при конвективных членах

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
$v_1 = 1$, $v_2 = -1$	$v_1 = 1 - 2x$, $v_2 = 2y - 1$	$v_1 = x + y$, $v_2 = x - y$	$v_1 = \sin 2\pi x$, $v_2 = -2\pi y \cos 2\pi x$

Таблица 2

Количество итераций ДТКМ и SSOR

Pe	ДТКМ(τ)	ДТКМ0(τ)	**ДТКМ(2,τ)**	SSOR(ω)	SSOR(ω) / ДТКМ(2,τ)
			Задача 1		
10^3	103	103	**68**	101	1,48
10^4	753	750	**517**	747	1,44
10^5	5725	5773	**4126**	5816	1,4
			Задача 2		
10^3	470	127	**34**	102	3
10^4	611	442	**205**	375	1,82
10^5	4733	3355	**1201**	2940	2,44
			Задача 3		
10^3	118	74	**50**	101	2
10^4	629	423	**215**	604	2,8
10^5	4733	3211	**1851**	4655	2,51
			Задача 4		
10^3	225	83	**58**	147	2,53
10^4	1601	476	**319**	1067	3,34
10^5	13714	3534	**1590**	7990	5,02

— двуциклического треугольного кососимметрического метода с одним параметром τ и ускорителем $D_0 = 0.5\mathrm{Diag}(K_L K_U + K_U K_L)$, где $B_L = E - \omega D_0 + 2\tau K_L$, $B_U = E - \omega D_0 + 2\tau K_L$, обозначаемого в таблице ДТКМ0(τ);

— двуциклического треугольного кососимметрического метода с двумя параметрами — τ и ω, операторы метода первого и второго цикла имеют вид

$$B_L = \mathrm{Diag}\,(B_L) + \omega K_L,$$
$$B_U = \mathrm{Diag}\,(B_U) + \omega K_U,$$

обозначаемого в таблице ДТКМ(ω,τ) с $\omega = 2$.

Достаточные условия сходимости методов ДТКМ(τ) и ДТКМ0(τ) исследовались в работе [7];

Для сходимости ДТКМ(2,τ) достаточно взять диагональные матрицы в виде

$$\mathrm{Diag}\,(B_L) = \mathrm{Diag}\,(B_U) = \left\{ b_{L_{ii}} = \sum_j \left|a_{0_{ij}}\right| + \sum_j \left|k_{L_{ij}}\right| + \sum_j \left|k_{U_{ij}}\right| \right\}, \tag{23}$$

так как по теореме Гершгорина [1] операторы

$$B_{L_0} - A_0 > 0, \quad B_{U_0} - A_0 > 0$$

будут положительно определены.

Количество итераций каждого метода сравнивалось с эталонным методом SSOR [13].

Численно подтвердилось существование таких значений τ_{opt}, для которых при достижении заданной точности число итераций минимально.

Выводы

1. Предложен новый класс двуциклических итерационных методов с двумя параметрами, основанный на кососимметричной части исходной матрицы и эффективный для сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений.
2. Получены достаточные условия сходимости метода в виде легко проверяемых операторных неравенств.
3. Предложен способ ускорения сходимости метода, основанный на построении диагонали обратимого оператора по специальной формуле (23).
4. Среди рассмотренных двуциклических методов ДТКМ(2,τ) — самый эффективный метод решения сильно несимметричных систем линейных уравнений.

Список литературы

[1] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

[2] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

[3] Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986.

[4] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.

[5] Крукиер Л.А. Итерационный метод решения неявных конечно-разностных схем аппроксимирующих один класс квазилинейных систем уравнений // Изв. вузов. Математика. 1979. № 7. С. 41–52.

[6] Крукиер Л.А., Чикина Л.Г. Кососимметрический итерационный метод решения стационарного уравнения конвекции-диффузии // Изв. вузов. Математика. 2000. № 11. С. 62–75.

[7] Крукиер Л.А., Чикина Л.Г. Двуциклический треугольный кососимметрический метод решения сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений // Изв. вузов. Математика. 2001. № 5. С. 36–42.

[8] Булеев Н.И. Численный метод решения двумерных и трехмерных уравненний диффузии // Мат. сб. 1960. Т. 51, № 2.

[9] Булеев Н.И. Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989. 344 с.

[10] Il'in V.P. Iterative incoplite factorization methods. Singapure, World Sci., Publ. Co., 1992.

[11] Varga R.S. Matrix iterative analysis. Prentince Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962. 322 p.

[12] Meijerink J.A. Van der vorst an iterative solution methods for linear equation systems of which coefficient matrix is a symmetric M-matrix // Math. Comp. 1977. Vol. 31. P. 148–162.

[13] Крукиер Л.А., Мартынова Т.С. Влияние формы записи уравнения конвекции-диффузии на сходимость метода верхней релаксации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 11. С. 1821–1827

Поступила в редакцию 9 апреля 2004 г.,
в переработанном виде — 8 июня 2004 г.