Вычислительные технологии **Том 9, № 4, 2004**

ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ БЕЗЫМПУЛЬСНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ*

О. Ф. Воропаева
Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: vorop@ict.nsc.ru

A review of the numerical models and results of investigations on the momentumless turbulent wake dynamics in a stably stratified media is presented.

Введение

Турбулентные следы за телами вращения являются классическим объектом исследования теоретической, вычислительной и прикладной гидродинамики, имеющим весьма важные практические приложения. Следам и другим локальным турбулентным образованиям отводится важная роль в формировании тонкослоистой микростуктуры океана, при обтекании тел, в задачах энергетики и экологии. Инструментальные измерения параметров следоподобных образований в неоднородной по плотности (температуре) среде даже в лабораторных условиях представляют собой трудноразрешаемую задачу. В связи с этим разработка надежных и эффективных численных моделей и исследование на их основе турбулентных течений в следах за телами в устойчиво стратифицированных средах является весьма актуальной проблемой.

Достаточно хорошо известно, что течение в турбулентном следе за телом, движущимся в устойчиво стратифицированной жидкости, обладает рядом особенностей, отличающих его от течения в однородной среде. При сравнительно слабой устойчивой стратификации турбулентный след вначале развивается почти так же, как и в однородной жидкости, и расширяется в плоскости, ортогональной оси движения тела, симметрично. Однако вертикальной турбулентной диффузии препятствуют архимедовы силы, так что след приобретает сплющенную форму и, наконец, совсем перестает расти в вертикальном направлении. Из-за турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его. Архимедовы силы стремятся восстановить прежнее невозмущенное состояние устойчивой стратификации, возвращая частицы жидкости на горизонты их равновесного состояния. В результате в плоскости, ортогональной оси движения

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 01-01-00783, № 04-01-00209) и НШ 2314.2003.1 президента РФ.

тела, возникают конвективные течения, приводящие к активному образованию внутренних волн в окружающей жидкости [1–3].

В данной работе представлен обзор численных моделей и выполненных с их применением исследований турбулентных следов за телами с движителем, собственная тяга которого уравновешивает силу гидродинамического сопротивления — безымпульсных следов. Особенностью таких турбулентных следов является их более быстрое вырождение в сравнении с турбулентными следами за буксируемыми телами [4–6].

Лабораторные эксперименты. Для начала обратимся к имеющимся экспериментальным данным. Одной из первых работ, в которых в условиях лабораторного эксперимента было установлено, что турбулентный след в линейно стратифицированной среде существенно отличается от следа в однородной жидкости, является, по-видимому, работа Schooley & Stewart [7]. В ней продемонстрированы основные особенности развития турбулентного следа в устойчиво стратифицированной среде — коллапс (сплющивание) следа и генерация следом внутренних волн, представлены также некоторые теоретические оценки параметров генерируемых внутренних волн.

В работе Merrit [3] кроме результатов оригинальных лабораторных измерений размеров турбулентного следа в линейно стратифицированной среде и расстояния от тела, на котором начинается коллапс следа, содержится также анализ этих данных. Отмечается, в частности, что характерными параметрами течения являются отношение времени после образования следа к периоду Вяйсяля — Брента T и плотностное число Фруда Fr:

$$\mathrm{Fr} = \frac{U_\infty T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}} = \frac{1}{N}$$

($a > 0$ — константа, определяемая градиентом плотности невозмущенной жидкости $\rho_s(z)$, U_∞ — скорость набегающего потока, D — характерный размер тела, N — частота Вяйсяля — Брента, g — ускорение силы тяжести).

Наиболее детальные лабораторные измерения характеристик турбулентности в следах за телами, движущимися в линейно стратифицированной среде, проведены Lin & Pao [8] (некоторые результаты экспериментов этих авторов для следов в однородной и линейно стратифицированной средах, в том числе данные о вырождении дефекта продольной компоненты осредненной скорости, можно найти в [9, 10]). В [8] представлены подробные количественные данные о поведении линейных размеров следа и интенсивностей турбулентных флуктуаций полей плотности и скорости в безымпульсном турбулентном следе для достаточно широкого диапазона чисел Фруда, включая трудно моделируемые в лабораторных условиях большие значения этого параметра. Полученные данные иллюстрируют анизотропный характер вырождения интенсивностей пульсационных составляющих горизонтальной и вертикальной компонент скорости на больших расстояниях от тела.

Детальный анализ экспериментальных данных о вырождении турбулентных следов за буксируемыми и самодвижущимися телами в линейно стратифицированных жидкостях и теоретические оценки параметров внутренних волн выполнены в работах Voisin [11] и Чашечкина [12].

Лабораторные опыты показывают, что в тех случаях, когда распределение плотности невозмущенной жидкости по глубине задается существенно нелинейным, картина течения может сильно отличаться от наблюдаемой в линейно стратифицированной среде. Наиболее характерные изменения были продемонстрированы Gilreath & Brandt [13] на примере движения тела в слое раздела пикноклина, представляющего собой непрерывный аналог двуслойной жидкости. В ходе экспериментов варьировалось соотношение толщины высокоградиентной прослойки пикноклина и диаметра тела. Представлены данные о качественной картине течения, отмечена тенденция к формированию (в случае, когда толщина прослойки меньше диаметра тела) близких к стационарным внутренних волн конечной амплитуды; выполнены теоретические оценки наблюдаемых внутренних волн.

В работе Voropaev et al. [14] исследуются крупные вихревые структуры, образующиеся при маневрировании самодвижущегося тела в стратифицированной среде; определены условия формирования вихревых структур в следах, получены данные об основных характеристиках вихрей.

Весьма значительная часть исследований безымпульсных турбулентных следов в стратифицированной жидкости выполнена в рамках упрощенных представлений — в плоской постановке. В лабораторных условиях в бассейне с неподвижной стратифицированной жидкостью с помощью разного рода турбулизаторов создавалась плоская область турбулентных возмущений, время развития которой предполагалось равным времени жизни следа.

Автором одной из наиболее ранних экспериментальных работ, в которых изучался двумерный нестационарный аналог трехмерного турбулентного следа за движущимся телом в линейно стратифицированной среде, был Schooley [15] (ссылки на другие ранние работы имеются, например, в [3]). Трохан и Чашечкин [16] провели исследование фазовой картины внутренних волн. В экспериментах Kao, Pao [17] рассматривалось течение, генерируемое турбулизованной областью в пикноклине: изучалась волновая картина течения, в частности, были получены данные о возникновении в пикноклине уединенных внутренних волн.

Экспериментальному изучению развития области турбулизованной жидкости в тонкослоистой среде посвящена работа Попова [18]. Исследовано изменение формы турбулентного пятна в зависимости от его расположения относительно прослоек жидкости с большими градиентами плотности. Как установлено в [18], основной особенностью рассматриваемого течения является преимущественное растекание пятна в виде узких языков вдоль высокоградиентных прослоек, а именно — вдоль расположенных внутри этих прослоек горизонтальных плоскостей, соответствующих равновесному положению частиц перемешанной жидкости.

Качественное представление о рассматриваемом течении дают многочисленные исследования ламинарных перемешанных областей в стратифицированных средах. Наиболее полные обзоры работ этого направления (как экспериментальных, так и численно-теоретических) можно найти в [19, 20]. Из экспериментальных работ в первую очередь необходимо упомянуть лабораторные опыты Wu [21], посвященные изучению коллапса однородного по плотности пятна в линейно стратифицированной среде. Maxworthy [22] изучал внутренние волны, формирующиеся при развитии перемешанных областей в пикноклине, включая стационарные волновые образования. В опытах Мадерича, Кулика [23] изучались закономерности растекания интрузий в тонкослоистой среде. Основное внимание уделялось установлению характера зависимости течения в пикноклине от соотношения характерного размера интрузии и толщины слоя раздела (слоя с максимальными градиентами плотности). В частности, было продемонстрировано (вслед за [24], где проводилось численное моделирование течения на основе уравнений Эйлера в приближении Обербека — Буссинеска) формирование уединенных внутренних волн при эволюции перемешанной области в “узком” слое раздела, когда размер области значительно превосходит толщину слоя раздела.

Данные, полученные в ходе лабораторных экспериментов (дополнительные ссылки можно найти в приводимой литературе), имеют важное значение для понимания процессов, происходящих при эволюции турбулентных следов. Следует отметить, однако, что количественное, а зачастую и качественное воспроизведение результатов этих исследований является затруднительным для численного моделирования из-за недостатка исходных данных об условиях проведения экспериментов (во многих экспериментах турбулизующее устройство оставалось в зоне смешения во все время их проведения). В большинстве из них также отсутствуют более или менее полные количественные данные о поведении основных характеристик течения (в особенности это относится к измерениям характеристик турбулентности). Это обстоятельство, по-видимому, служит подтверждением того факта, что экспериментальное исследование данного класса течений, так же как и его численное моделирование, представляет собой весьма трудноразрешимую задачу.

Некоторые сведения о полуэмпирических моделях турбулентности. Основным инструментом при проведении теоретических и численных исследований турбулентных следов за телами с движителями, как и многих других турбулентных течений, были и остаются до настоящего времени полуэмпирические модели турбулентности. Их подробное описание, в том числе с изложением физических аспектов и принципов построения, можно найти в [25–31]. Ниже будут приведены некоторые основные сведения, необходимые для дальнейшего изложения.

Для построения полуэмпирических моделей турбулентности мгновенные гидродинамические характеристики течения представляются в виде суммы средних и пульсационных составляющих. В результате привлекаемая для описания турбулентного течения в следе за телом, движущимся в устойчиво стратифицированной среде, система осредненных уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска (для статистически стационарного класса течений) записывается в следующем виде [31]:

$$U_k\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\langle p_1\rangle}{\partial x_i} + \nu\Delta U_i + g_i\frac{\langle\rho_1\rangle}{\rho_0} - \frac{\partial\langle u_i'u_k'\rangle}{\partial x_k}; \tag{0.1}$$

$$U_k\frac{\partial\langle\Theta\rangle}{\partial x_k} = -\frac{\partial\langle u_k'\Theta'\rangle}{\partial x_k} + \chi\Delta\langle\Theta\rangle; \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0,\ i,k = 1,\ 2,\ 3. \tag{0.3}$$

Здесь и ниже штрихом помечены пульсационные составляющие; угловые скобки $\langle\ \rangle$ — символ осреднения; Δ — оператор Лапласа; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Кроме того, приняты следующие обозначения: $U_1 = U$, $U_2 = V$, $U_3 = W$ — компоненты скорости осредненного движения в направлении осей $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $u_1' = u'$, $u_2' = v'$, $u_3' = w'$ — пульсационные составляющие скорости; Θ — температура; ρ — плотность жидкости, $\langle\rho_1\rangle = \langle\rho\rangle - \rho_s$ — осредненный дефицит плотности; $\rho_s = \rho_s(z)$ — плотность невозмущенной жидкости, $\rho_0 = \rho_s(0)$; p_1 — отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией ρ_s; ν, χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности; $\boldsymbol{g} = (0,0,-g)$. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры: $\rho - \rho_0 = -\beta\rho_0(\Theta - \Theta_0)$, где $\Theta_0 = \Theta(0)$, β — коэффициент объемного расширения; стратификация предполагается устойчивой ($d\rho_s/dz \le 0$) и слабой.

Для построения замкнутой системы уравнений (0.1)–(0.3) необходимо выбрать способ аппроксимации неизвестных одноточечных корреляционных моментов второго порядка — компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u_i'u_k'\rangle$ $(i,k = 1,2,3)$ и вектора турбулентных потоков $\langle u_k'\rho'\rangle$ $(k = 1,2,3)$, фигурирующих в правых частях этих уравнений. Рассмотрим кратко иерархию полуэмпирических моделей турбулентности, привлекаемых для расчетов интересующего нас течения.

Наиболее общая модель турбулентности второго порядка включает следующие дифференциальные уравнения переноса моментов второго порядка (см., например, [25, 28, 32]). Уравнение переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений может быть записано в виде (здесь и всюду в данном пункте индексы принимают значения $i, j, k, l = 1, 2, 3$):

$$U\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial y} + W\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial z} = D_{ij} + P_{ij} + G_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \tag{0.4}$$

Слагаемые P_{ij} и G_{ij} представляют собой порождение за счет осредненного движения и архимедовых сил соответственно (здесь и ниже также по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$P_{ij} = -\left\{\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j'u_k'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right\},\quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0}(\langle u_i'\rho'\rangle g_j + \langle u_j'\rho'\rangle g_i),$$

$$2P = P_{ii},\ 2G = G_{ii}.$$

В правой части (0.4) D_{ij}, ε_{ij} — диффузионные и диссипативные слагаемые, Π_{ij} — слагаемые с турбулентными пульсациями давления. Их точные представления содержат новые неизвестные двойные и тройные корреляции пульсационных величин, что требует привлечения дополнительных гипотез. Приведем наиболее часто применяемые [33, 34]:

$$D_{ij} \approx -\frac{\partial}{\partial x_l}\langle u_l'u_i'u_j'\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_l}\langle u_l'u_i'u_j'\rangle^0 = \frac{\partial}{\partial x_l}c_s\frac{e}{\varepsilon}\langle u_k'u_l'\rangle\frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_k}; \tag{0.5}$$

$$\Pi_{ij} = -c_1\frac{\varepsilon}{e}\left(\langle u_i'u_j'\rangle - \frac{2}{3}\delta_{ij}e\right) - c_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P\right) - c_3\left(G_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}G\right); \tag{0.6}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon. \tag{0.7}$$

Энергия турбулентности по определению равна $e = (\langle u'^2\rangle + \langle v'^2\rangle + \langle w'^2\rangle)/2$.

Дифференциальные уравнения переноса компонент вектора турбулентных потоков $\langle u_i'\rho'\rangle$ и величины дисперсии турбулентных флуктуаций плотности $\langle\rho'^2\rangle$ могут быть записаны (с учетом достаточно общепринятых аппроксимаций) в следующем виде:

$$U\frac{\partial\langle u_i'\rho'\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle u_i'\rho'\rangle}{\partial y} + W\frac{\partial\langle u_i'\rho'\rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_l}c_{s\varphi}\frac{e}{\varepsilon}\langle u_k'u_l'\rangle\frac{\partial\langle u_i'\rho'\rangle}{\partial x_k} - \left(\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k} + \langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right) +$$

$$+\frac{g_i}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle + c_{2T}P_{iT} - c_{1T}\frac{\varepsilon}{e}\langle u_i'\rho'\rangle; \tag{0.8}$$

$$U\frac{\partial\langle\rho'^2\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial\langle\rho'^2\rangle}{\partial y} + W\frac{\partial\langle\rho'^2\rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_l}c_\varphi\frac{e}{\varepsilon}\langle u_k'u_l'\rangle\frac{\partial\langle\rho'^2\rangle}{\partial x_k} - 2\langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k} - c_T\frac{\varepsilon}{e}\langle\rho'^2\rangle, \tag{0.9}$$

$$P_{iT} = \langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle.$$

Наконец, в дополнение к представленным уравнениям переноса одноточечных корреляционных моментов второго порядка должны быть привлечены соотношения, в той или иной мере характеризующие пространственный масштаб турбулентности. Одним из наиболее универсальных способов следует считать определение скорости диссипации ε из уравнения [25, 28]

$$U\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+W\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}=D_\varepsilon+c_{\varepsilon1}\frac{\varepsilon}{e}(P+G)-c_{\varepsilon2}\frac{\varepsilon^2}{e}, \tag{0.10}$$

в котором аппроксимация диффузионных слагаемых, как правило, согласуется с представлением соответствующих членов в уравнении переноса энергии турбулентности. Альтернативой уравнению (0.10) является непосредственное определение характерного масштаба турбулентности L из геометрических соображений либо из решения дифференциального уравнения для этой величины [25]. Заключительный этап в создании замкнутой математической модели — определение эмпирических постоянных c_s, c_1, c_2, c_3, $c_{s\varphi}$, c_φ, c_{1T}, c_{2T}, c_T, $c_{\varepsilon1}$, $c_{\varepsilon2}$. Наиболее употребительные наборы значений приведены в обзорной статье Rodi [25].

С целью получения упрощенных моделей для части или всех корреляционных моментов второго порядка вместо дифференциальных уравнений (0.4), (0.8), (0.9) привлекаются алгебраические представления, являющиеся результатом усечения этих уравнений (например, в модельном приближении локального равновесия — малости производных искомой величины по времени и пространственным переменным [25, 35]). Достаточно широко известны алгебраические локально-равновесные [35] аппроксимации компонент тензора рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\langle u_i'u_j'\rangle}{e}=-\frac{2}{3}\frac{(1-c_2-c_1)}{c_1}\delta_{ij}+\frac{(1-c_2)}{c_1}\frac{P_{ij}}{\varepsilon}+\frac{(1-c_3)}{c_1}\frac{G_{ij}}{\varepsilon}, \tag{0.11}$$

а также упрощенные неравновесные представления [26] для этих величин

$$\frac{\langle u_i'u_j'\rangle}{e}=\frac{2}{3}\delta_{ij}+\frac{1-c_2}{c_1}\left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{P}{\varepsilon}\right)+\frac{1-c_3}{c_1}\left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{G}{\varepsilon}\right). \tag{0.12}$$

Важным следствием (0.12) является изотропное соотношение

$$\langle u_i'u_j'\rangle=2/3\delta_{ij}e, \tag{0.13}$$

справедливое для бессдвиговых течений в отсутствие силы тяжести. В случае использования алгебраических представлений для нормальных напряжений Рейнольдса модель турбулентности дополняется уравнением переноса энергии турбулентности, являющимся прямым следствием уравнений (0.4) (согласно определению величины e):

$$U\frac{\partial e}{\partial x}+V\frac{\partial e}{\partial y}+W\frac{\partial e}{\partial z}=D_e+P+G-\varepsilon,\quad D_e=D_{ii}/2. \tag{0.14}$$

Для компонент вектора турбулентных потоков вместо (0.8) могут быть привлечены алгебраические неравновесные [36]

$$-\langle u_i'\rho'\rangle=\Phi_T\frac{e}{\varepsilon}\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k}-\Phi_T'\frac{e}{\varepsilon}P_{iT}, \tag{0.15}$$

$$\Phi_T=\left(c_{1T}+\frac{1}{2}\left(\frac{P+G}{\varepsilon}-1\right)\right)^{-1},\quad \Phi_T'=(1-c_{2T})\Phi_T$$

или локально-равновесные [35] усечения этих уравнений

$$-\langle u_i'\rho'\rangle = \frac{e}{c_{1T}\varepsilon}\left[\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k} + (1-c_{2T})\left(\langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{g_i}{\rho_0}\langle\rho'^2\rangle\right)\right]. \tag{0.16}$$

Наконец, локально-равновесное усечение уравнения (0.9) переноса величины дисперсии турбулентных флуктуаций поля плотности приводит к выражению

$$\langle\rho'^2\rangle = -\frac{2}{c_T}\frac{e}{\varepsilon}\langle u_k'\rho'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k}. \tag{0.17}$$

Наиболее простые модели турбулентности второго порядка, включающие одно (e-модель) или два (($e-\varepsilon$) или ($e-L$)-модели) дифференциальных уравнения для характеристик турбулентности, получаются, в частности, в случае одновременного использования упрощенных алгебраических аппроксимаций (0.12), (0.16) при пренебрежении ролью средней скорости и архимедовых сил.

1. Схематизированная плоская модель безымпульсных турбулентных следов в устойчиво стратифицированной среде

В литературных источниках имеются ссылки на сравнительно небольшое число работ, посвященных численному моделированию безымпульсных турбулентных следов в стратифицированой среде. Согласно публикациям как за рубежом, так и в нашей стране исследования в этом направлении ведутся с начала 70-х годов. В целом ряде работ [1, 2, 37–44] безымпульсные турбулентные следы изучались с применением схематизированной плоской модели (по аналогии с экспериментальными работами [3, 15–18]). В них рассматривалась плоская нестационарная задача об эволюции локальной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной жидкости. Исходная постановка задачи в данном модельном приближении может быть представлена в следующем общем виде. В области конечных размеров, расположенной в безграничной несжимаемой устойчиво стратифицированной жидкости, задаются турбулентные возмущения. Для описания возникающего турбулентного течения привлекается система осредненных уравнений, полученная из (0.1)–(0.3) в предположении малости членов с молекулярной вязкостью и диффузией, а также производных по x в правых частях (0.1), (0.2) и левой части (0.3). Дополнительно полагается: $U \equiv U_\infty$, $t = x/U_\infty$.

1.1. Линейная стратификация

В первых работах по численному моделированию эволюции плоской зоны турбулентного смешения в устойчиво стратифицированной среде [1, 2], выполненных Васильевым, Кузнецовым, Лыткиным, Черных, исходные уравнения движения записывались в пренебрежении конвективными слагаемыми. Для расчетов привлекалась простейшая e-модель, в которой полагалось справедливым соотношение (0.13), и в уравнении переноса энергии турбулентности (0.14) не учитывалось порождение энергии турбулентности за счет осредненного движения и архимедовых сил ($P = G = 0$). В качестве масштабов турбулентности использовались линейные размеры L_y и L_z турбулизованной области (в данном разделе обозначения соответствуют избранной в настоящей работе системе координат, в которой ось z направлена вверх, против силы тяжести). Компоненты вектора турбулентных потоков аппроксимировались простейшими градиентными гипотезами, причем коэффициенты турбулентной диффузии и вязкости в этой модели полагались идентичными и равными:

$$K_y = æ\sqrt{e}L_y, \quad K_z = æ\sqrt{e}L_z, \quad æ = \mathrm{const}.$$

Были получены данные, иллюстрирующие развитие области турбулентных возмущений и генерируемых внутренних волн, продемонстрирован коллапс зоны смешения; впервые численно продемонстрировано возникновение и распространение конвективных вихрей, соответствующих внутренним волнам.

Эти результаты подтверждены расчетами тех же авторов [37] на основе модели, в которой использовался значительно более совершенный способ определения нормальных напряжений Рейнольдса: вместо простейшего изотропного соотношения (0.13) привлекались дифференциальные уравнения переноса этих величин, аналогичные (0.4), с аппроксимацией Π_{ij} простейшей гипотезой Ротта (первого слагаемого в правой части (0.6)). При этом была сделана попытка уточнить также коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии:

$$K_y = æ_1\frac{\langle v'^2\rangle e}{\varepsilon}, \quad K_z = æ_1\frac{\langle w'^2\rangle e}{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

В [37] $\varepsilon = \alpha e^{3/2}/\sqrt{S}$, $\alpha = \mathrm{const}$, а характерный пространственный масштаб S вычислялся с привлечением интеграла от распределения энергии турбулентности. Остальные аппроксимации аналогичны тем, что использовались в [2].

Лыткиным и Черных [38] с использованием модифицированной модели работы [37] (привлекалась полная аппроксимация (0.6) "обменных" слагаемых в уравнениях переноса нормальных напряжений) был проведен численный анализ течения, на основе которого сделан вывод о существовании в линейно стратифицированной среде подобия характеристик турбулентности и внутренних волн по плотностному числу Фруда при больших значениях этого параметра. Помимо этого, в [38] представлены некоторые данные, свидетельствующие о слабом влиянии используемой модели турбулентности на характеристики внутренних волн; получено качественное, а по фазовой картине внутренних волн и количественное согласие результатов расчетов с лабораторными измерениями Трохана, Чашечкина [16].

По результатам анализа поведения суммарных энергий турбулентности и внутренних волн, генерируемых при эволюции зоны турбулентного смешения, в работах Лыткина, Черных [38] и Черных, Лыткина, Стуровой [39] сделан вывод о независимом развитии при больших значениях времени в линейно стратифицированной среде внутренних волн и турбулентности (т. е. о расщеплении течения на волновой и диффузионный процессы). При этом расчет параметров внутренних волн при $t/T \geq 1$ может быть выполнен с применением уравнений Эйлера в приближении Обербека — Буссинеска (при соответствующем задании перемешивания и размера области возмущений). С использованием результатов расчетов задачи в полной постановке в [39] И.В. Стуровой построена простая линейная аналитическая модель волновой картины для больших значений времени вырождения. Результаты расчетов по полной и аналитической моделям оказались весьма близкими. Позже аналогичная модель была получена Voisin [11].

Продолжением численных экспериментов [38, 39], демонстрирующих расщепление течения на волновой и диффузионный процессы, явилась работа Черных [40], в которой показана применимость диффузионной модели к расчету характеристик турбулентности при описании динамики турбулизованной области в линейно стратифицированной среде для больших значений времени. В расчетах [40] использовалась модель работы [38] с дифференциальными уравнениями для нормальных напряжений. Исследовался также вопрос о постановке граничных условий для волновых характеристик течения на внешних границах расчетной области: привлекались "открытые" краевые условия и условия невозмущенного потока. Было продемонстрировано, что влияние типа граничных условий оказывается несущественным для расчетов характеристик турбулентности.

Численный анализ применимости ряда моделей, представляющих собой модификацию модели работы [38], к описанию эволюции зоны турбулентного смешения в линейно стратифицированной среде выполнен Черных [41]: продемонстрированы разумность подхода, предполагающего бессдвиговость течения (при введении в модель дополнительного дифференциального уравнения вида (0.4) трансформации касательного напряжения $\langle v'w'\rangle$), а также несостоятельность простейшей e-модели [1, 2] при больших значениях времени. Слабая зависимость картины внутренних волн от рассмотренных в данной работе моделей турбулентности обусловлена тем фактом, что формирование внутренних волн в линейно стратифицированной среде происходит при небольших значениях времени ($t/T \leq 1$), где работают даже простейшие модели.

Анализируя используемые в работах [1, 2, 37–41] модели турбулентности, можно отметить, что в них реализуются как простейшие (изотропные), так и достаточно полные аппроксимации нормальных рейнольдсовых напряжений. Привлечение дифференциальных уравнений переноса этих величин (в комплексе с более совершенным способом определения масштаба) делает возможным проведение расчетов для достаточно больших значений времени. Вместе с тем, как видно из расчетов [38, 40], слабым местом разработанного в [38] варианта модели с уравнениями для нормальных напряжений остается неудовлетворительное описание анизотропного вырождения нормальных напряжений — при $t/T \geq 2$ величина интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости вырождается чрезмерно быстро в сравнении с интенсивностью турбулентных флуктуаций горизонтальных компонент скорости. Это противоречит экспериментальным данным [8] и указывает на необходимость модификации модели. В этой связи остается открытым ряд вопросов, в частности — о роли более детальных аппроксимаций компонент вектора турбулентных потоков. Рассмотрению этого и других аспектов в численных моделях динамики плоской турбулизованной области в стратифицированной жидкости посвящены работы [42–44].

Систематическое исследование применимости различных моделей турбулентности к расчетам турбулентных следов в устойчиво стратифицированных жидкостях (в схематизированной плоской постановке) проведено в работах [42, 43]. Для замыкания исходной осредненной системы уравнений привлекается иерархия полуэмпирических моделей турбулентности, аналогичная описанной во введении: наиболее сложная из них составляется из дифференциальных уравнений переноса моментов второго порядка вида (0.4), (0.8), (0.9) (с учетом принятых в данной постановке упрощений); в простейшей полагается $\langle u_i'^2\rangle = 2/3e$ $(i = 1, 2, 3)$. Общим местом рассмотренной в [42, 43] иерархии моделей является определение скорости диссипации ε из уравнения вида (0.10), а также привлечение (из соображений, связанных с упрощением численного алгоритма) дифференциального уравнения переноса касательного напряжения $\langle v'w'\rangle$. Основное внимание в этих работах уделялось исследованию применимости алгебраических аппроксимаций моментов второго порядка вида (0.11), (0.12), (0.15)–(0.17). Из анализа результатов расчетов следует: во-первых, алгебраические представления моментов второго порядка дают результаты, весьма близкие к полученным с применением дифференциальных уравнений переноса этих величин; во-вторых, простейшей из пригодных для расчетов рассматриваемого течения аппроксимаций компонент вектора турбулентных потоков можно считать локально-равновесное представление вида (0.16). Полученная волновая картина течения слабо зависит от применяемой модели турбулентности, что подтверждает данные ранних исследований [38, 41].

Несколько слов о методах решения в работах [1, 2, 37–44]. Они основываются на использовании переменных функция тока — завихренность и методов расщепления по пространственным переменным [45]. В [1, 2, 37–41] используются равномерные конечно-разностные сетки, в [42–44] — неравномерные ортогональные сетки, сгущающиеся в окрестности особенностей течения. При решении модельных задач в [44] применялись адаптивные подвижные сетки.

Простая аналитическая квазиодномерная модель эволюции области турбулентных возмущений в следе за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде построена Скуриным [46]. Получено удовлетворительное согласие с измерениями [8] в части описания размеров следа.

1.2. Нелинейная стратификация

Математическая модель динамики плоской области турбулентного смешения в пикноклине представлена в [44]. Данная модель базируется на модифицированной $(e-\varepsilon)$-модели турбулентности, включающей алгебраические аппроксимации для моментов второго порядка вида (0.12), (0.16), (0.17). Для введения коэффициентов турбулентной вязкости в уравнениях переноса касательного напряжения $\langle v'w' \rangle$ (0.4), энергии турбулентности (0.14) и скорости диссипации (0.10) используются соотношения (1.1). В [44] впервые дано основанное на численных расчетах описание особенностей развития течения в пикноклине — интенсивного горизонтального растекания области смешения вдоль высокоградиентной прослойки и формирования уединенных внутренних волн. Результаты расчетов качественно согласуются с экспериментальными данными [17, 18] (согласование качественное, а не количественное, поскольку в [17, 18] отсутствуют необходимые данные об условиях проведения экспериментов и не измерялись характеристики турбулентности). В [44] идея о расщеплении течения при больших значениях времени на волновой и диффузионный процессы была перенесена на случай нелинейного распределения плотности.

Анализ применимости иерархии моделей турбулентности к расчетам эволюции зоны турбулентного смешения в пикноклине выполнен в [42, 44]. Представленные данные свидетельствуют о слабой зависимости характеристик турбулентности и волновой картины течения от применяемой модели турбулентности не только в случае линейной стратификации, но и в пикноклине, когда формируются внутренние волны значительной амплитуды.

1.3. Диффузия пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения

Численному моделированию процесса турбулентной диффузии пассивной примеси от произвольно расположенного мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в однородной и устойчиво стратифицированной средах посвящена серия работ

[47–49]. Расчеты проводились с использованием модифицированных $(e-\varepsilon)$-моделей, основанных на алгебраических представлениях моментов второго порядка (0.12), (0.16), (0.17). Дополнительно привлекалось уравнение переноса осредненной концентрации C:

$$\frac{\partial C}{\partial t}+V\frac{\partial C}{\partial y}+W\frac{\partial C}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial y}\langle v'C'\rangle-\frac{\partial}{\partial z}\langle w'C'\rangle,\ -\langle v'C'\rangle=K_{cy}\frac{\partial C}{\partial y},\ -\langle w'C'\rangle=K_{cz}\frac{\partial C}{\partial z},\quad (1.2)$$

где K_{cy}, K_{cz} задавались в виде соотношений, подобных применяемым для определения коэффициентов турбулентной диффузии $K_{\rho y}$, $K_{\rho z}$ (последние получены в результате приведения соотношений (0.16) к градиентному виду). Исследованы особенности распространения пассивной примеси в случаях, когда положение источника примеси не совпадает с центром турбулизованной области. Показано, что в однородной и линейно стратифицированной средах [47, 48] процесс распространения примеси характеризуется смещением положения максимума осредненной концентрации к центру турбулизованной области, однако это смещение происходит чрезвычайно медленно в сравнении с вырождением турбулентности. Наблюдаемая тенденция устремления положения максимума концентрации к началу координат в однородной жидкости может быть объяснена свойствами замкнутого дифференциального уравнения переноса осредненной концентрации пассивной примеси (1.2). При больших значениях времени распределения концентрации для различных вариантов начальных данных становятся автомодельными и идентичными, если только в начальный момент времени суммарный запас примеси был одинаков. В [49] рассмотрены варианты расположения зоны турбулентного смешения в окрестности высокоградиентной прослойки пикноклина. Показано, что существенную роль в этом случае играет не только начальное расположение источника примеси, но и конвективное течение, индуцируемое коллапсом зоны турбулентного смешения.

Результаты численного анализа эволюции локальных областей турбулизованной жидкости, выполненного в упомянутых в данном разделе работах, имеют важное методологическое значение для численного моделирования спутных турбулентных течений в стратифицированной среде. Кроме того, исследование динамики турбулизованных областей представляет интерес в связи с весьма важной ролью подобных объектов в формировании тонкой микроструктуры гидрофизических полей океана [31, 50]. Ниже будут представлены численные модели и результаты исследований турбулентных следов и генерируемых ими внутренних волн, в которых след рассматривается как пространственное турбулентное течение (без применения схематизированной плоской постановки).

2. Безымпульсный турбулентный след в устойчиво стратифицированной среде

2.1. Линейная стратификация

Начальная диффузионная (до коллапса) стадия развития турбулентного следа за самодвижущимся телом в линейно стратифицированной среде изучена теоретически Онуфриевым [51] с использованием разработанной алгебраической модели рейнольдсовых напряжений и потоков. Проведены оценки формы турбулентного следа, согласующиеся с результатами ранних экспериментальных работ [7].

Численное моделирование турбулентного следа за самодвижущимся телом и генерируемых при коллапсе следа внутренних волн в линейно стратифицированной среде проведено

Levellen, Teske, Donaldson [52]. Была разработана численная модель с дифференциальными уравнениями для моментов второго порядка, дополненная рядом масштабов пульсационного движения. Эта модель послужила основой для модели, включающей локально-равновесные усечения дифференциальных уравнений переноса всех моментов второго порядка. Согласно [35], последняя применялась для численного моделирования в случае линейной стратификации. Масштаб турбулентности определялся с использованием характерных линейных размеров области турбулентного течения. В [35, 52] представлены данные, иллюстрирующие собственно турбулентный след и генерируемые внутренние волны. Сопоставление расчетных данных с экспериментальными данными Lin & Pao [8] показало удовлетворительное согласие в поведении размеров следа для значений времени $t \leq T$.

Работа Hassid [9] содержит достаточно подробное численное исследование следов за самодвижущимся и буксируемым телами в линейно стратифицированной среде, проведенное на основе модифицированной модели локально-равновесного приближения с привлечением уравнений переноса энергии турбулентности и скорости диссипации. В [9] алгебраические соотношения вида (0.11) использовались для получения анизотропных выражений для коэффициентов турбулентной вязкости, при этом вопрос о применимости (0.11) для анализа поведения нормальных напряжений остался открытым. Было выполнено сопоставление с экспериментальными данными Lin & Pao по изменению характерных размеров следа и значений дефекта продольной компоненты осредненной скорости и энергии турбулентности на оси следа. Согласие с данными для буксируемого тела весьма хорошее. В случае самодвижущегося тела выявились трудности с описанием дефекта скорости — влияние стратификации оказалось более выраженным, чем в эксперименте (см. также критический обзор [53]); можно отметить и более медленное, чем в эксперименте, вырождение энергии турбулентности. Имеющиеся погрешности, возможно, связаны с неудачным выбором метода расчета. Это в определенной мере подтверждают численные эксперименты, выполненные позже Мошкиным и др. [54]. В расчетах [54] использовались локально-равновесная модель, аналогичная разработанной в [9], и метод расщепления по физическим процессам. Полученные данные в случае безымпульсного следа оказались достаточно близкими к экспериментальным данным по всем характеристикам, анализировавшимся в [9].

В ряде работ задача об эволюции безымпульсного турбулентного следа в однородной и линейно стратифицированной среде рассматривалась как пример для демонстрации разработанных авторами методов и подходов. Так, в монографии О.М. Белоцерковского [55] описаны результаты решения задачи статистическим методом частиц в ячейках, выполненного Белоцерковским, Ерофеевым, Яницким, Славяновым. В модели применяется релаксационное кинетическое уравнение для одноточечной функции распределения, аналогичное уравнению Больцмана. Метод решения основывается на использовании "жидких" частиц в ячейках и расщеплении эволюции модели на следующие физические процессы: конвективный перенос, диссипацию турбулентной энергии и перераспределение энергии по степеням свободы. Модель демонстрирует достаточно хорошее согласие с экспериментальными данными Naudascher [4] (однородная жидкость) — по изменению характерного размера, распределению энергии турбулентности на оси следа и в его поперечном сечении, а также с лабораторными измерениями Lin & Pao [8] (линейная стратификация) — в осевых значениях интенсивности турбулентных пульсаций продольной составляющей скорости.

Как пример применения неявного варианта метода расщепления по физическим процессам к расчету стратифицированных течений турбулентный след в однородной и линейно стратифицированной средах рассмотрен Даниленко, Костиным, Толстых [56]. Замыкание трехмерной параболизованной системы осредненных уравнений Рейнольдса проводилось с использованием полной дифференциальной модели второго порядка, аналогичной [52]. Получено удовлетворительное согласие рассчитанных значений энергии турбулентности на оси следа с экспериментальными данными Naudascher [4], а также осевых значений дефекта продольной компоненты осредненной скорости и энергии турбулентности — с данными Lin & Pao для следа за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде [9].

В работе Даниленко [57] разработана модифицированная $(e-\varepsilon)$-модель турбулентности с поправкой на анизотропию течения в стратифицированной среде. В эту модель включены, кроме дифференциальных уравнений для энергии турбулентности e и скорости диссипации ε, уравнения переноса вертикальной компоненты вектора турбулентных потоков $\langle w'\rho'\rangle$ и дисперсии флуктуаций плотности $\langle \rho'^2\rangle$, уточняющие вертикальную турбулентную диффузию. Проведена серия численных экспериментов, в которых варьировались параметр, регулирующий степень анизотропии нормальных напряжений Рейнольдса, и начальная степень перемешивания жидкости в следе в линейно стратифицированной среде. Получено удовлетворительное согласие с экспериментальными и расчетными данными из работы [9] по поведению размеров следа.

Численному моделированию безымпульсных турбулентных следов за шарообразными телами в стратифицированной среде посвящена также работа Глушко, Гумилевского, Полежаева [58]. Предлагаемая модель турбулентного следа основывается на уравнениях Рейнольдса в приближении пограничного слоя, замкнутых с помощью $(e-\varepsilon)$-модели турбулентности с привлечением для коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии формул, аналогичных предложенным в [9]. Авторы [58] провели оценку роли начальной закрутки при эволюции безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде.

Из анализа перечисленных работ следует, что значительная часть используемых в них моделей турбулентных следов основывается на дифференциальных уравнениях переноса моментов второго порядка вида (0.4), (0.8), (0.9) или идее их локально-равновесного усечения. В то же время в этих работах экспериментальные данные Lin & Pao [8, 9] воспроизводятся лишь в части описания линейных размеров, осевых значений энергии турбулентности (или одного из нормальных напряжений Рейнольдса [55]) и дефекта продольной составляющей осредненной скорости. При этом за рамками исследований остается проблема анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе, представляющая интерес в связи с изучением турбулентной диффузии в устойчиво стратифицированной среде. Не проводилось численное моделирование турбулентных следов в случае нелинейной стратификации. Рассмотрению этих и других вопросов посвящены работы [59–64], являющиеся логическим продолжением исследований [42–44], выполненных с применением схематизированной плоской модели.

Для описания течения в дальнем безымпульсном турбулентном следе за телом вращения в стратифицированной среде в [59–64] привлекается параболизованная система осредненных уравнений движения, неразрывности и несжимаемости в приближении дальнего следа, полученная из (0.1)–(0.3):

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} + V\frac{\partial U_d}{\partial y} + W\frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\langle u'v'\rangle + \frac{\partial}{\partial z}\langle u'w'\rangle; \tag{2.1}$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \langle p_1\rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'^2\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle u'w'\rangle; \tag{2.2}$$

$$U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \langle p_1\rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\langle v'w'\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle w'^2\rangle - g\frac{\langle \rho_1\rangle}{\rho_0}; \tag{2.3}$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle\rho_1\rangle}{\partial x} + V\frac{\partial \langle\rho_1\rangle}{\partial y} + W\frac{\partial \langle\rho_1\rangle}{\partial z} + W\frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y}\langle v'\rho'\rangle - \frac{\partial}{\partial z}\langle w'\rho'\rangle; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{2.5}$$

Здесь $U_d = U_\infty - U$ — дефект продольной компоненты скорости, $U_\infty = \text{const}$ — скорость набегающего потока. Уравнения (2.1)–(2.5) записаны с учетом следующих упрощающих гипотез: в правых частях (2.1)–(2.4) опущены в силу малости слагаемые, содержащие производную по переменной x, а также сомножители в виде коэффициента ламинарной вязкости или диффузии. Так же, как и в [9], в (2.5) в предположении малости отброшено слагаемое $\partial U/\partial x$. Правомерность использования "двумерного" уравнения несжимаемости (3.5) обоснована результатами детальных численных экспериментов [65, 66] и физическими соображениями [4, 5].

Система уравнений (2.1)–(2.5) незамкнута. Четыре модели турбулентности, каждая из которых вместе с уравнениями (2.1)–(2.5) образует замкнутую модель безымпульсного турбулентного следа (для наглядности одна из них приводится ниже полностью), рассмотрены в [61]. В модели 1 интересующие нас компоненты тензора рейнольдсовых напряжений аппроксимировались соотношениями (0.12), компоненты вектора турбулентных потоков и дисперсия турбулентных флуктуаций поля плотности — локально-равновесными соотношениями (0.16), (0.17). Эти выражения упрощаются (по аналогии с [9]) с учетом физических особенностей рассматриваемого течения — спутного струйного турбулентного течения в поле силы тяжести на больших расстояниях от тела — и представляются в следующем виде:

$$\langle u'v'\rangle = \frac{1-c_2}{c_1}\frac{e\langle v'^2\rangle}{\varepsilon}\frac{\partial U_d}{\partial y} = K_y\frac{\partial U_d}{\partial y}; \tag{2.6}$$

$$\langle u'w'\rangle = \frac{\left[(1-c_2)e\langle w'^2\rangle - \dfrac{(1-c_3)(1-c_{2T})}{c_{1T}}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\langle w'\rho'\rangle\right]}{c_1\varepsilon\left(1-\dfrac{(1-c_3)}{c_1c_{1T}}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}\right)}\frac{\partial U_d}{\partial z} = K_z\frac{\partial U_d}{\partial z}; \tag{2.7}$$

$$\langle \rho'^2\rangle = -\frac{2}{c_T}\frac{e}{\varepsilon}\langle w'\rho'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}; \tag{2.8}$$

$$-\langle u'\rho'\rangle = \frac{1}{c_{1T}}\frac{e}{\varepsilon}\left[\langle u'w'\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} + (1-c_{2T})\langle w'\rho'\rangle\frac{\partial U}{\partial z}\right]; \tag{2.9}$$

$$-\langle v'\rho'\rangle = \frac{1}{c_{1T}}\frac{e}{\varepsilon}\langle v'^2\rangle\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y} = K_{\rho y}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial y}; \tag{2.10}$$

$$-\langle w'\rho'\rangle = \frac{e\langle w'^2\rangle}{c_{1T}\varepsilon\left(1-2\dfrac{1-c_{2T}}{c_{1T}c_T}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}\right)}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z} = K_{\rho z}\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial z}. \tag{2.11}$$

Для определения значений энергии турбулентности e, скорости диссипации ε и касательного напряжения $\langle u_2'u_3'\rangle = \langle v'w'\rangle$ привлекаются дифференциальные уравнения переноса вида (0.14), (0.10) и (0.4), в которых коэффициенты турбулентной вязкости определялись в согласии с (2.6), (2.7). Использование представлений (2.6), (2.7), (2.10), (2.11) в градиентной форме записи позволяет привести уравнения переноса (2.1) и (2.4) к диффузионному виду. В уравнениях и соотношениях (2.1)–(2.11) эмпирические постоянные c_1, c_2, c_3, c_{1T}, c_{2T}, c_T, $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, c_s, σ равны соответственно 2.2, 0.55, 0.55, 3.2, 0.5, 1.25, 1.45, 1.90, 0.25, 1.3 [25].

Иерархия моделей работы [61] включает также следующие модели турбулентности. Модель 2 аналогична используемой в [9] (разница в отсутствии в уравнении движения (2.1) величины $\partial\langle p_1\rangle/\partial x$). Ее основное отличие от модели 1 заключается в использовании для определения компонент тензора рейнольдсовых напряжений вместо "изотропных" соотношений (0.12) локально-равновесного приближения (0.11). Следует заметить, что соотношения (0.12) представляются более предпочтительными в связи с тем, что в безымпульсных следах в однородной жидкости на расстояниях порядка $10D$ и более достаточно точно выполняется соотношение $\langle u_i'^2\rangle = 2/3e$ (см., например, [5]). В модель 3 включены дифференциальные уравнения переноса величин $\langle u_i'^2\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$, $\langle v'w'\rangle$, аналогичные (0.4), с аппроксимацией основных слагаемых в правых частях в виде (0.5)–(0.7), причем для диффузионных слагаемых используются упрощенные представления:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_l} c_s \frac{e}{\varepsilon} \langle u_l'u_l'\rangle \frac{\partial\langle u_i'u_j'\rangle}{\partial x_l},\ l = 2, 3. \tag{2.12}$$

Величины $\langle u'v'\rangle$, $\langle u'w'\rangle$, $\langle u_i'\rho'\rangle$, $\langle\rho'^2\rangle$ вычисляются из соотношений (2.6)–(2.11). Наконец, отличие модели 4 от модели 3 состоит в отказе от локально-равновесного приближения для определения турбулентных потоков (0.16) и привлечении вместо них неравновесных алгебраических аппроксимаций вида (0.15).

При численном решении задачи переменная x в дифференциальных уравнениях моделей играет роль времени: $t = x/U_\infty$. В качестве начальных данных на расстоянии $x = x_0$ от тела задается автомодельное решение задачи, соответствующее однородной жидкости и согласующееся с экспериментальными данными Lin & Pao [8, 9]. При $r \to \infty$ ставятся условия невозмущенного потока. В основе алгоритма расчета лежит использование переменных функция тока — завихренность, неравномерных ортогональных конечно-разностных сеток и методов расщепления по пространственным переменным. Его подробное изложение и результаты тестирования можно найти в [59–61]. Отметим лишь, что поскольку рассматривается безымпульсное спутное турбулентное течение, одним из важных пунктов алгоритма является строгое выполнение закона сохранения суммарного избыточного импульса

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_d(x, y, z)dydz = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_d(x_0, y, z)dydz = 0.$$

Из анализа результатов расчетов следует, что построенные в [61] математические модели турбулентных следов удовлетворительно описывают экспериментальные данные Lin & Pao [8] по всем измеренным в опытах характеристикам (некоторые результаты показаны на рис. 1–4). Привлечение неравновесных аппроксимаций (0.15) для величин $\langle u_i'\rho'\rangle$ не приводит к существенным изменениям в результатах расчетов, это относится и к варьированию (в соответствии с рекомендациями [34]) значения эмпирической постоянной c_3, регулирующей вклад слагаемых с порождением за счет силы тяжести.

Расчеты [61] продемонстрировали (вслед за [38, 41, 43], где продольная компонента скорости не учитывалась) слабую зависимость характеристик внутренних волн в линейно

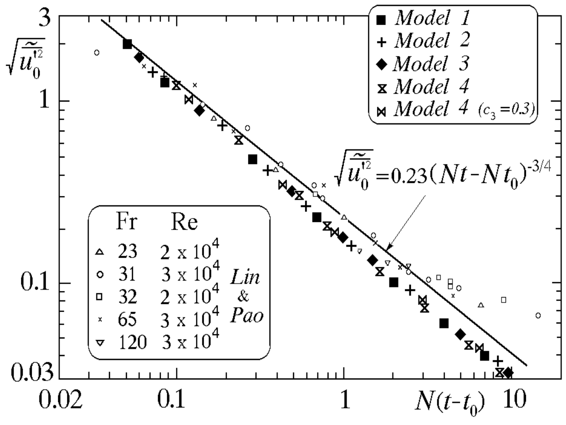


Рис. 1. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций горизонтальной компоненты скорости на оси турбулентного следа; $\widetilde{u'^2_0} = \mathrm{Fr}^{3/2}\langle u'^2(t,0,0)\rangle^*$, $(t_0 = 2/\mathrm{Fr})$.

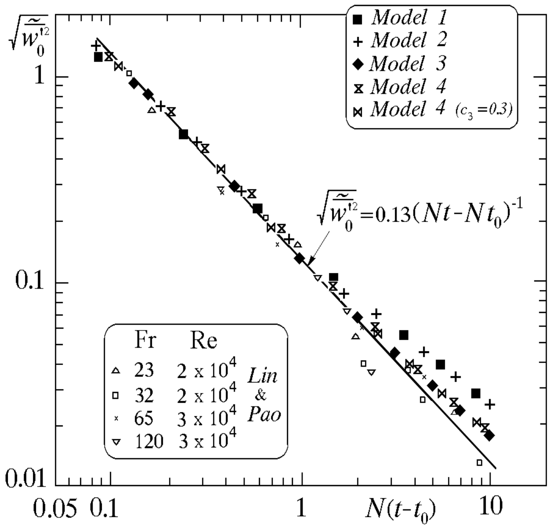


Рис. 2. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости на оси турбулентного следа, $\widetilde{w'^2_0} = \mathrm{Fr}^{3/2}\ \langle w'^2(t,0,0)\rangle^*$.

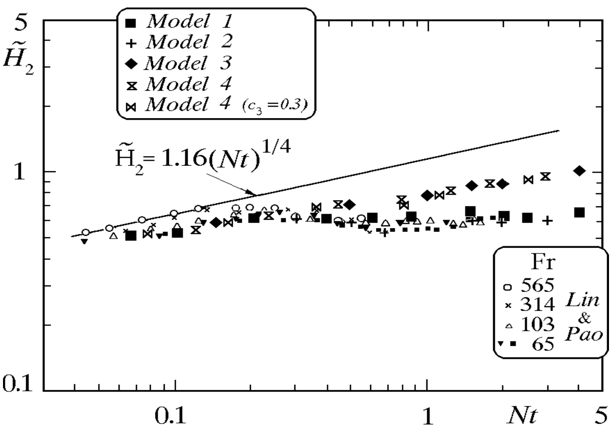


Рис. 3. Изменение в зависимости от расстояния от тела вертикального размера следа; $\tilde{H}_2 = 2H_2/D(c_D\mathrm{Fr})^{1/4}$, $H_2 : e(t,0,H_2) = 0.01e(t,0,0)$, $t = x/U_\infty$.

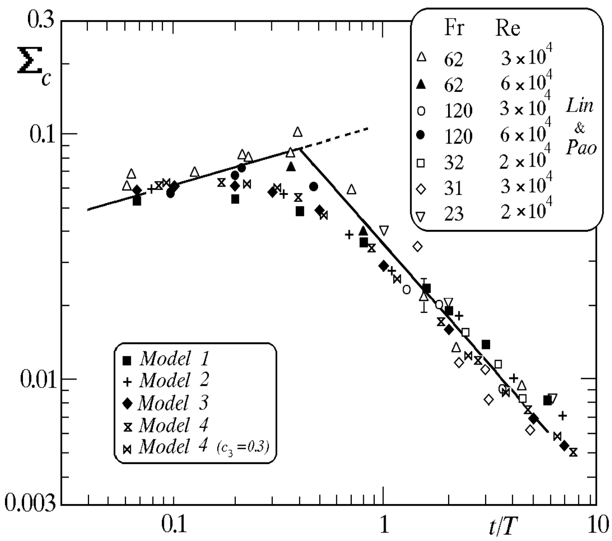


Рис. 4. Изменение интенсивности турбулентных флуктуаций плотности на оси следа; $\sum_c = \sqrt{\langle\rho'^2(t,0,0)\rangle}/aD\rho_0\mathrm{Fr}^{1/4}$.

стратифицированной среде от модели турбулентности. Как и в случае использования схематизированной плоской модели [38, 39], получено расщепление течения в дальнем следе в линейно стратифицированной среде на волновой и диффузионный процессы.

Достаточно хорошо известным [4, 5] свойством безымпульсных турбулентных следов в однородной жидкости является существенно более быстрое вырождение дефекта продольной компоненты скорости U_d в сравнении с интенсивностью турбулентных флуктуаций $\sqrt{e}$. В связи с этим представляет интерес математическая модель безымпульсного турбулентного следа, в которой $U_d = 0$. Приемлемость данного упрощения показана в [61], и, таким образом, численно обоснована применимость схематизированной плоской модели безымпульсных турбулентных следов в линейно стратифицированной среде.

Модели с усовершенствованными аппроксимациями тройных корреляций поля скорости. Детальный анализ полученных в [61] данных показывает, что изменение линейных размеров следа точнее описывают модели 1, 2 с алгебраическими аппроксимациями напряжений Рейнольдса; лучшие результаты в описании вырождения интенсивностей турбулентных флуктуаций компонент скорости дает модель 3 с дифференциальными уравнениями переноса нормальных рейнольдсовых напряжений и упрощенными неравновесными представлениями касательных напряжений $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'w' \rangle$. Разработке моделей турбулентных следов в устойчиво стратифицированной среде, соединяющих в себе положительные свойства моделей 1–4, посвящены работы [62–64]. В них для более детального описания анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе используются подходы, предложенные в [30, 67, 68] для задач атмосферного пограничного слоя. В основе подходов лежит привлечение усовершенствованных представлений тройных корреляций поля скорости, аппроксимирующих диффузионные слагаемые в уравнениях переноса напряжений Рейнольдса (0.4). В качестве исходной модели в [62–64] привлекалась содержащая эти уравнения модель 3 работы [61] (ее краткое описание приведено выше).

В работе [62] вместо аппроксимации Daly, Harlow (0.5) используется выражение

$$\langle u'_l u'_i u'_j \rangle = \frac{\langle u'_l u'_i u'_j \rangle^0}{1 - \dfrac{\lambda}{c_3 c_{3\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}}, \quad \lambda = \delta_{l3} + \delta_{i3} + \delta_{j3}. \tag{2.13}$$

В этой модели (модель 5 на рис. 5, 6) применялись также усовершенствованные с учетом (2.13) представления коэффициентов турбулентной вязкости в уравнении переноса скорости диссипации (0.10) (по аналогии с [68, 69], в которых рассматривались задачи с одним — вертикальным — диффузионным направлением):

$$K_{\varepsilon y} = \frac{c_s}{\sigma_1} \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon \left(1 - \dfrac{2}{c_3 c_{3\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}\right)}, \quad K_{\varepsilon z} = \frac{c_s}{\sigma_1} \frac{e \langle w'^2 \rangle}{\varepsilon \left(1 - \dfrac{4}{c_3 c_{3\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}\right)}.$$

В [63] использовались следующие аппроксимации (модель 6 на рис. 5, 6):

$$\langle u'_l u'_i u'_j \rangle = \frac{\langle u'_l u'_i u'_j \rangle^0 - \dfrac{\lambda}{c_3} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e}{\varepsilon} \langle u'_i u'_j \rho' \rangle}{1 - \dfrac{\lambda}{c_3 c_{3\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}}, \quad \lambda = \delta_{l3} + \delta_{i3} + \delta_{j3}, \tag{2.14}$$

где тройные корреляции $\langle u'_i u'_j \rho' \rangle$ вычислялись стандартным образом [70]:

$$-\langle u'_i u'_j \rho' \rangle = c_{s\varphi} \frac{e}{\varepsilon} \left(\langle u'_k u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rho' \rangle}{\partial x_k} + \langle u'_k u'_i \rangle \frac{\partial \langle u'_j \rho' \rangle}{\partial x_k} \right) \approx$$

$$\approx c_{s\varphi} \frac{e}{\varepsilon} \left(\langle u'_j u'_j \rangle \frac{\partial \langle u'_i \rho' \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_i \rangle \frac{\partial \langle u'_j \rho' \rangle}{\partial x_i} \right).$$

В [63, 64] разработана модель (модель 7 на рис. 5, 6), в которой для более детального описания вертикальной турбулентной диффузии в уравнении переноса $\langle w'^2\rangle$ привлекается дифференциальное уравнение переноса величины $\langle w'^3\rangle$ [30, 67, 68]:

$$U_\infty\frac{\partial\langle w'^3\rangle}{\partial x}+V\frac{\partial\langle w'^3\rangle}{\partial y}+W\frac{\partial\langle w'^3\rangle}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial y}C_{3332}-\frac{\partial}{\partial z}C_{3333}-$$

$$-3\left\{\langle v'w'\rangle\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial y}+\langle w'^2\rangle\frac{\partial\langle w'^2\rangle}{\partial z}\right\}-3\frac{g}{\rho_0}\langle w'^2\rho'\rangle-c_{3w}\frac{\langle w'^3\rangle\varepsilon}{e},\tag{2.15}$$

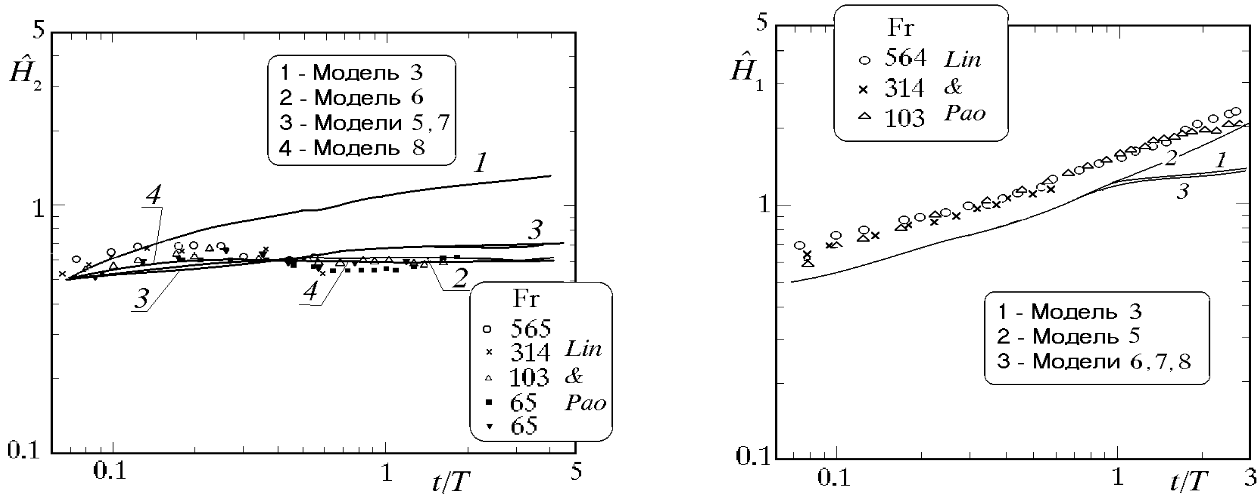


Рис. 5. Изменение горизонтального H_1 и вертикального H_2 размеров следа в плоскости, ортогональной направлению движения тела (H_1 и H_2 определялись из соотношений $e(t,H_1,0)=0.01e(t,0,0)$, $e(t,0,H_2)=0.01e(t,0,0)$; $\hat{H}_1=2H_1/D(c_D\mathrm{Fr})^{1/4}$, $\hat{H}_2=2H_2/D(c_D\mathrm{Fr})^{1/4}$, $c_D=0.22$).

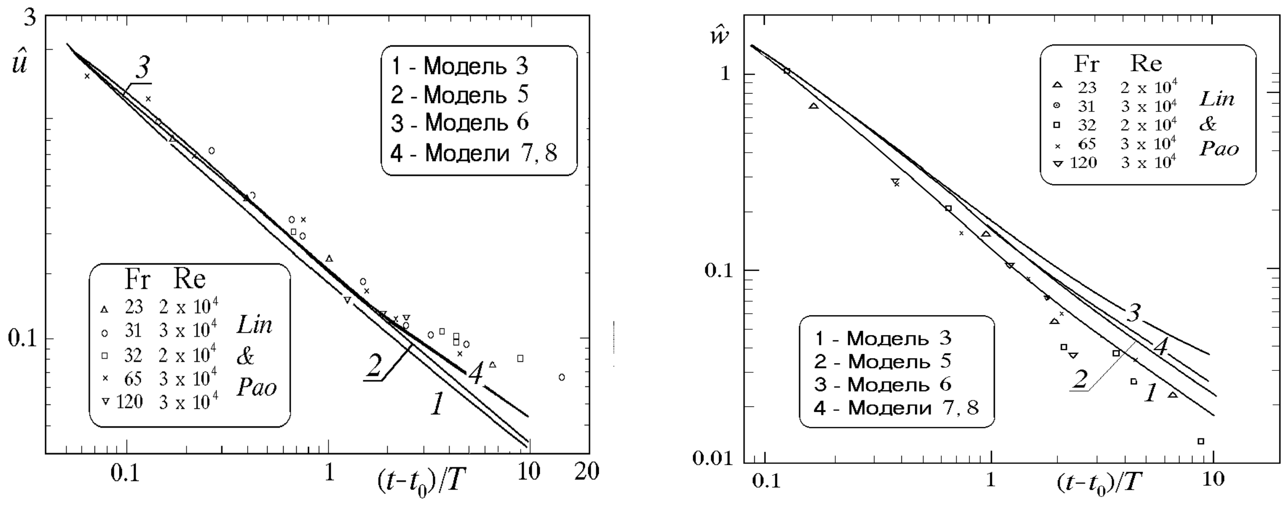


Рис. 6. Изменение во времени осевых значений интенсивности турбулентных флуктуаций продольной $\hat{u}$ и вертикальной $\hat{w}$ компонент скорости: $\hat{u}=\left(\mathrm{Fr}^{3/2}\langle u'^2(t,0,0)\rangle/U_\infty^2\right)^{1/2}$, $\hat{w}=\left(\mathrm{Fr}^{3/2}\langle w'^2(t,0,0)\rangle/U_\infty^2\right)^{1/2}$, $t_0=2/\mathrm{Fr}$.

где C_{3332}, C_{3333} — кумулянты четвертого порядка [30]:

$$C_{3332} = \langle w'^3 v' \rangle - 3\langle w'^2 \rangle \langle w'v' \rangle \approx -\frac{1}{c_4} \frac{e\langle v'^2 \rangle}{\varepsilon \left(1 - \dfrac{3}{c_4 c_{4\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}\right)} \frac{\partial \langle w'^3 \rangle}{\partial y},$$

$$C_{3333} = \langle w'^4 \rangle - 3\langle w'^2 \rangle^2 = -\frac{4}{c_4} \frac{e\langle w'^2 \rangle}{\varepsilon \left(1 - \dfrac{4}{c_4 c_{4\theta}} \dfrac{g}{\rho_0} \dfrac{e^2}{\varepsilon^2} \dfrac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}\right)} \frac{\partial \langle w'^3 \rangle}{\partial z}.$$

Остальные тройные корреляции определяются алгебраическими соотношениями (2.14).

Использованные в моделях 5–7 усовершенствованные представления тройных корреляций поля скорости приводят к существенным улучшениям в описании размеров турбулентного следа в сравнении с исходной моделью 3 (линия *1* на рис. 5, 6). Лучшее согласие с экспериментальными данными [8] по анизотропному вырождению нормальных напряжений Рейнольдса получено на основе модели 7 с дифференциальным уравнением (2.15) переноса величины $\langle w'^3 \rangle$.

В ходе работы над настоящим обзором автором была рассмотрена алгебраическая модель тройных корреляций, полученная из модели 7 в результате локально-равновесного усечения уравнения переноса (2.15) с учетом особенностей спутного течения (по аналогии с [68], где обоснованность подобной процедуры была проверена детальным анализом статей баланса исходного дифференциального уравнения при моделировании эволюции планетарного пограничного слоя). В результате в модели 8 используется следующее представление тройной корреляции $\langle w'^3 \rangle$:

$$-\langle w'^3 \rangle = \frac{3}{c_{3w}} \frac{e}{\varepsilon} \left(\langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} - \frac{g}{\rho_0} \langle w'^2 \rho' \rangle \right),$$

где

$$-\langle w'^2 \rho' \rangle = 2c_{s\varphi} \frac{e}{\varepsilon} \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle w' \rho' \rangle}{\partial z}.$$

Остальные тройные корреляции поля скорости, как и в моделях 6, 7, аппроксимируются соотношениями (2.14). Расчеты показали, что модель 8 дает лучшее согласование с экспериментальными данными [8] в описании поведения вертикального размера следа, при этом остальные характеристики близки к рассчитанным по модели 7. Таким образом, численные расчеты продемонстрировали хорошие свойства моделей турбулентных следов, основанных на идее выделения вертикального направления при полуэмпирическом моделировании моментов третьего порядка [68].

2.2. Нелинейная стратификация

Численная модель динамики дальнего безымпульсного турбулентного следа в пикноклине представлена в [59]. Для описания течения привлекается система осредненных уравнений движения, неразрывности и несжимаемости в приближении Обербека — Буссинеска (2.1)–(2.5), в которой одноточечные корреляционные моменты второго порядка аппроксимируются алгебраическими соотношениями, аналогичными описанным в модели 1. Отличие состоит в использовании для коэффициентов турбулентной вязкости вместо (2.6), (3.7) представлений, следующих из (2.12). Выполнен анализ волновой картины течения, в частности, показано формирование в пикноклине близких к стационарным уединенных внутренних волн. Получено более интенсивное, чем в случае линейного распределения плотности по глубине, горизонтальное растекание турбулентного следа в пикноклине (иллюстрирующие турбулентный след изолинии энергии турбулентности, нормированные на свои максимальные значения, приведены на рис. 7; поведение размеров следа показано на рис. 8). Эти данные согласуются с вытекающими, в частности, из экспериментов [18] представлениями о распространении следов в виде языков вдоль горизонтальных прослоек с большими градиентами плотности.

В [59] проведен численный анализ и показана применимость схематизированной плоской модели безымпульсного турбулентного следа в пикноклине (когда в исходной модели полагается $U_d = 0$). В ходе численных экспериментов установлено расщепление течения на волновой и диффузионный процессы (по аналогии с линейной стратификацией). Момент расщепления в случае пикноклина наступает существенно позже, чем в линейно стратифицированной среде, что объясняется наличием весьма продолжительного слабого взаимодействия турбулентности и генерируемых следом внутренних волн. Это позволяет делать расчеты более экономичными, привлекая на больших расстояниях от тела для численного моделирования характеристик внутренних волн уравнения Эйлера в приближении Обербека — Буссинеска, а для описания характеристик собственно турбулентного следа — диффузионную модель (в качестве начальных данных используются результаты расчетов задачи в полной постановке).

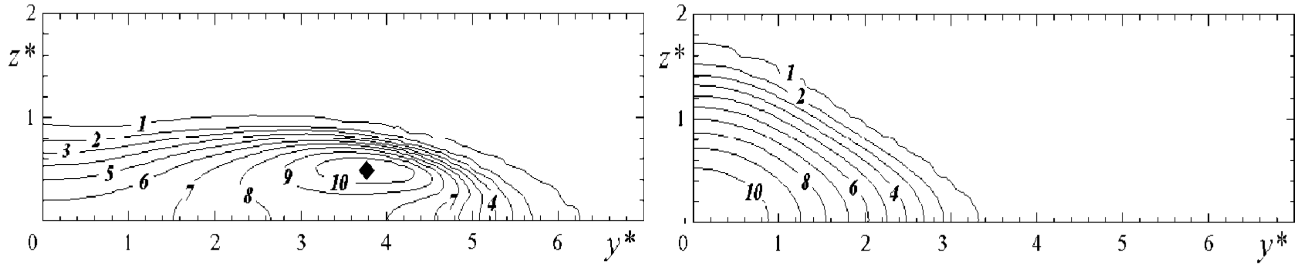


Рис. 7. Изолинии энергии турбулентности $e/e_m(t) = \mathrm{const}$, иллюстрирующие турбулентный след в случае пикноклина (слева) и линейной стратификации (справа) при $t/T = 5$. Изолинии *1–10* представлены уровнями 0,01; 0.1 и далее до 0.9 с шагом 0.1; значком $\diamond$ помечен узел сетки, в котором достигается максимум $e_m(t) = \max\limits_{y_i, z_j} e(t, y_i, z_j)$.

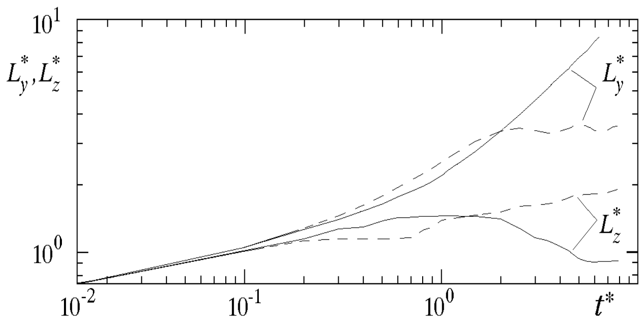


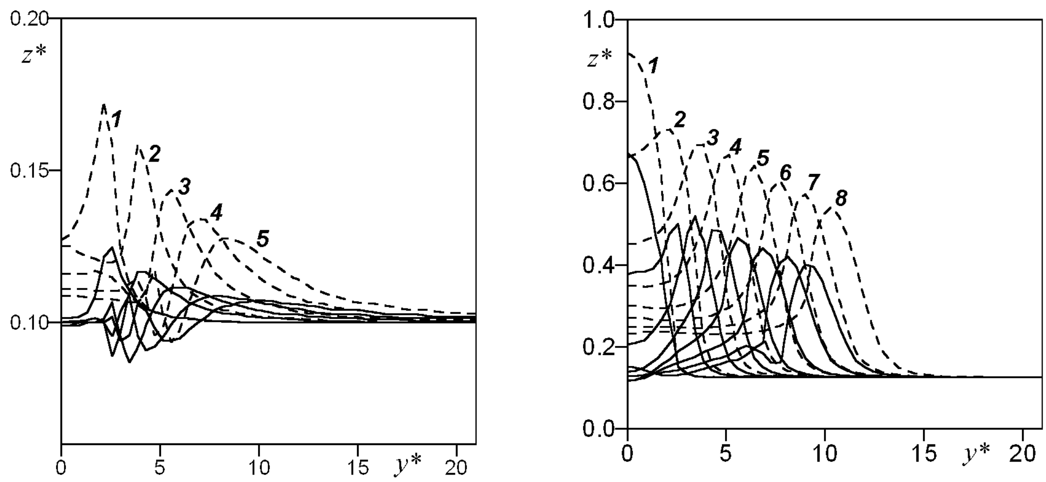
Рис. 8. Изменение характерных горизонтального $L_y^* = H_1/D$ и вертикального $L_z^* = H_2/D$ размеров турбулентного следа: сплошные кривые отвечают пикноклину, штриховые — линейной стратификации; $t^* = t/T$.

3. Численные модели внутренних волн, генерируемых турбулентным следом

Анализ волновой картины течения, генерируемого при эволюции турбулентного следа в устойчиво стратифицированной среде, осуществлен в работах [6, 59, 60, 66, 71]. Для описания течения привлекается математическая модель, основанная на алгебраических аппроксимациях моментов второго порядка (аналогичная описанной выше модели 1). В [60] рассмотрен случай линейной стратификации. Показано, в частности, что рассчитанная фазовая картина внутренних волн достаточно хорошо согласуется с полученной в лабораторном эксперименте [12], а также с решением [72] линеаризованной задачи о динамике внутренних волн, индуцируемых мгновенным точечным источником возмущений поля плотности, помещенным в начало координат.

Анализ волновой картины течения в случае нелинейной стратификации среды [59] указывает на существенное различие в динамике конвективных вихрей в пикноклине и линейной стратификации: линейной стратификации присущ процесс дробления вихрей и образования вихрей противоположной направленности [1, 2, 38]; в рассмотренном "узком" (в сравнении с начальным размером следа) пикноклине в каждом квадранте плоскости (y, z) формируется единственный вихрь, который на больших расстояниях от тела становится практически стационарным. При этом образуются близкие к стационарным уединенные внутренние волны, скорость и амплитуда которых удовлетворяют известному соотношению Бенжамина [73].

Сопоставление параметров внутренних волн, индуцируемых турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в устойчиво стратифицированных средах, осуществлено в [6, 66, 71]. Рассмотрены варианты линейного [6, 66] и нелинейного [6, 71] распределений плотности невозмущенной жидкости по глубине. Показана генерация турбулентным следом за буксируемым телом внутренних волн существенно большей амплитуды, чем в случае самодвижущегося тела (полученная в расчетах картина внутренних волн иллюстрируется на рис. 9 динамикой во времени линий равной плотности).



а *б*

Рис. 9. Динамика линий $\rho_0 - \langle\rho\rangle = \rho_0 - \rho_s(0.1D)$: *а* — $\rho_s = \rho_0(1 - az)$; *б* — $\rho_s = \rho_0(1 - a\beta\tanh(z/\beta))$, $\beta = 0.15D$. Кривые *1* — *8* соответствуют моментам времени $t/T = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$; сплошные линии — самодвижущееся тело, штриховые — буксируемое тело; $y^* = y/D$, $z^* = z/D$.

Объяснение этого факта связано с существенными различиями в эволюции осесимметричных турбулентных следов за буксируемыми и самодвижущимися телами, наблюдаемыми в однородной жидкости. Так, автомодельный след за буксируемым телом характеризуется законами вырождения $e(x,0,0) \sim x^{-4/3}$, $U_d(x,0,0) \sim x^{-2/3}$, $l(x) \sim x^{1/3}$ ($l(x)$ — характерный размер следа). Для автомодельного следа за самодвижущимся телом имеем $e(x,0,0) \sim x^{-1.5}$, $U_d(x,0,0) \sim x^{-1.5}$, $l(x) \sim x^{1/4}$. Такое различие в поведении характеристик следов обусловлено их существенно разной структурой. В следе за буксируемым телом порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного течения играет важную роль; в безымпульсном следе уже на расстояниях около $10D$ реализуется практически бессдвиговый режим течения [4, 5]. Поскольку на начальном этапе турбулентный след в стратифицированной среде развивается как в однородной жидкости, то в этом случае турбулентность в следе за буксируемым телом приводит к перемешиванию большей массы жидкости. Воздействие силы тяжести вызывает при этом генерацию внутренних волн большей амплитуды, чем в следе за самодвижущимся телом. Расчеты проводились с использованием двух существенно различающихся численных алгоритмов, основанных на методах расщепления по пространственным переменным, с одной стороны, и методе расщепления по физическим процессам с привлечением "трехмерного" уравнения несжимаемости — с другой, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Заключение

Анализ цитированной литературы показывает, что к настоящему времени разработаны численные модели динамики безымпульсных турбулентных следов и генерируемых ими внутренних волн в устойчиво стратифицированной среде, позволяющие дать удовлетворительное описание анизотропного вырождения турбулентности в дальнем следе. Дальнейшее совершенствование численных моделей, по-видимому, потребует привлечения более детальной экспериментальной информации.

Автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору Г.Г. Черных за полезные обсуждения и предоставленные материалы.

Список литературы

[1] Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Y.M., Chernykh G.G. Development of the turbulized fluid region in stratified medium // Intern. Symp. on Stratified Flows. Paper 4. Novosibirsk. 1972. 14 p.

[2] Васильев О.Ф., Кузнецов Б.Г., Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 45–52.

[3] Merrit C.E. Wake growth in stratified flow // AIAA J. 1974. Vol. 12, N 7. P. 940–949.

[4] Naudascher E. Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence // J. Fluid Mech. 1965. Vol. 22, N 4. P. 625–656.

[5] Алексенко Н.В., Костомаха В.А. Экспериментальное исследование осесимметричного безымпульсного турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. № 1. С. 65–69.

[6] Воропаева О.Ф., Мошкин Н.П., Черных Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде // Докл. РАН. 2003. Т. 12. № 10. С. 190–194.

[7] Schooley A.H., Stewart R.W. Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 15, Pt 1. P. 83–96.

[8] Lin J.T., Pao Y.H. Wakes in stratified fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 317–336.

[9] Hassid S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. Vol. 14, N 1. P. 25–32.

[10] Browand F.K., Guyomar D., Yoon S.-C. The behavior of a turbulent front in a stratified fluid: experiments with an oscillating grid // J. Geoph. Res. 1987. Vol. 92, N C5. P. 5329–5341.

[11] Voisin B. Rayonnement des ondes internes de gravité. Application aux corps en mouvement. Ph. D. Thesis, Univ. Pierre et Marie Curie, 1991.

[12] Chashechkin Yu.D. Internal waves, vortices and turbulence in a wake past a bluff body in a continuously stratified liquid // Preprints of the Fourth Intern. Symp. on Stratified Flows, Grenoble Inst. of Mech., June 29-July 2, 1994 / Ed. by E. Hopfinger, B. Voisin and G. Chavand. Grenoble: Grenoble Inst. of Mech. 1994. Vol. 2, sess. B4. N 29. 8 p.

[13] Gilreath H.E., Brandt A. Experiments on the generation of internal waves in a stratified fluid // AIAA P. 1983. Vol. 1704. 12 p.

[14] Voropaev S.I., McEachern G.B., Fernando H.J.S., Boyer D.L. Large vortex structures behind a maneuvering body in stratified fluids // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11, N 6. P. 1682–1684.

[15] Schooley A.H. Wake collapse in a stratified fluid // Science. 1967. Vol. 157. P. 421.

[16] Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д. Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // Теория дифракции и распространения волн: Краткие тексты докл. VII Всесоюз. симп. по дифракции и распространению волн. Ростов н/Д., 1977. Т. 3. С. 186–189.

[17] Kao T.W., Pao H.P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves // J. Fluid. Mech. 1980. Vol. 97, N 1. P. 115–127.

[18] Попов В.А. Развитие области частично перемешанной жидкости в тонкослоистой среде // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22, № 4. С. 389–394.

[19] Степанянц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э.В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1987. Т. 21. С. 93–179.

[20] Зудин А.Н. Численное моделирование динамики локального возмущения поля плотности в стратифицированной среде: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2001. 115 с.

[21] Wu J. Mixed region collapse with internal waves generation in a density stratified medium // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 35, N 3. P. 531–544.

[22] Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixed region in two and three dimensions // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 96, N 1. P. 47–64.

[23] Мадерич В.С., Кулик А.И. Лабораторный эксперимент по растеканию интрузий в слоистой среде // Изв. АН СССР. ФАО. 1992. Т. 28. С. 1197–1203.

[24] Зудин А.Н., Черных Г.Г. Примеры расчета нестационарных стратифицированных течений с применением эйлерово-лагранжевой системы координат. Новосибирск, 1985. (Препр. ИТПМ СО АН СССР). 50 с.

[25] Методы расчета турбулентных течений. М.: Мир, 1984. 463 с.

[26] Rodi W. Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, N C5. P. 5305–5328.

[27] Курбацкий А.Ф. Моделирование нелокального переноса турбулентного импульса и тепла. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988. 240 с.

[28] Launder B.E. Second-moment closure: present and future? Review // Intern. J. Heat and Fluid Flow. 1989. Vol. 10, N 4. P. 282–300.

[29] Онуфриев А.Т. Описание турбулентного переноса. Неравновесные модели: Учеб. пособие. М.: МФТИ, 1995. 172 с.

[30] Ilyushin B.B. Higher-moment diffusion in stable stratification. Closure strategies for turbulent and transition flows / Eds B.E. Launder, N.D. Sandham. Cambridge. Univ. Press, 2002. P. 424–448.

[31] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. Ч. 1.

[32] Launder B.E. On the effect of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum // J. Fluid Mech. 1975. Vol. 67. P. 569–581.

[33] Daly B.J., Harlow F.H. Transport equations of turbulence // J. Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. P. 2634–2649.

[34] Gibson M.M., Launder B.E. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer // J. Fluid Mech. 1978. Vol. 86. P. 491–511.

[35] Левеллен В. Метод инвариантного моделирования // Турбулентность: принципы и применения. М.: Мир, 1980. С. 262–310.

[36] Gibson M.M., Launder B.E. On the calculation of the horizontal, turbulent, free shear flows under gravitational influence // J. Heat Transfer. Trans. ASME. 1976. N 98C. P. 81–87.

[37] Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Y.M., Chernykh G.G. Development of the turbulent mixed region in a stratified medium // Intern. Seminar Turbulent Buoyant Convection. Yugoslavia, Dubrovnic, 1976. P. 123–136.

[38] Лыткин Ю.М., Черных Г.Г. Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Мат. проблемы механики сплошных сред: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, 1980. Вып. 47. С. 70–89.

[39] Lytkin Y.M., Chernykh G.G., Sturova I.V. Numerical simulation of internal waves induced by the collapse of turbulent mixed region in stratified medium // Proc. of Intern. Symp. on Refined Modelling of Flows, 7–10 Sept. 1982. Paris, 1982. P. 671–679.

[40] Черных Г.Г. О применении диффузионной модели к расчету характеристик турбулентности для больших значений времени в задаче об эволюции зоны турбулентного смешения в линейно стратифицированной среде // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, ИТПМ. 1986. Т. 17, № 1. С. 130–143.

[41] Черных Г.Г. Численный анализ применимости некоторых математических моделей к описанию эволюции турбулентных образований в линейно-стратифицированной среде // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, ИТПМ. 1987. Т. 18, № 1. С. 134–145.

[42] Chernykh G.G., Vilippova O.F., Zudin A.N. Evolution of local density perturburation in stratified medium: results of numerical experiments // Proc. I Soviet Union-Japan Symp. on Computational Fluid Dynamics, Khabarovsk, Sept. 1988. M.: Computer Center of USSR Acad. of Sci., 1989. Vol. 1. P. 128–133.

[43] Воропаева О.Ф., Черных Г.Г. О численном моделировании динамики областей турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Т. 1, вып. 1. С. 93–104.

[44] Воропаева О.Ф., Черных Г.Г. Эволюция зоны турбулентного смешения в жидкости с нелинейной стратификацией // Моделирование в механике: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ, ИТПМ. 1989. Т. 3(20), № 5. С. 3–29.

[45] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1967. 195 с.

[46] Скурин Л.И. Квазиодномерная модель эволюции в стратифицированной среде турбулентной области следа за телом // Изв. АН СССР. ФАО. 1986. Т. 22, № 4. С. 373–379.

[47] Воропаева О.Ф., Чашечкин Ю.Д., Черных Г.Г. Диффузия пассивной примеси от локализованного источника в зоне турбулентного смешения // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 1. С. 38–47.

[48] Воропаева О.Ф., Чашечкин Ю.Д., Черных Г.Г. Диффузия пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения // Докл. РАН. 1997. Т. 356, № 6. С. 759–762.

[49] Воропаева О.Ф., Черных Г.Г. Распространение пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения в пикноклине // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 4. С. 76–83.

[50] Зацепин А.Г., Федоров К.Н. Об условиях формирования тонкой структуры в океане путем коллапса перемешанных пятен // Докл. АН СССР. 1980. Т. 252, № 4. С. 989–992.

[51] Онуфриев А.Т. Турбулентный след в стратифицированной среде // ПМТФ. 1970. № 5. С. 68–72.

[52] Levellen W.S., Teske M.E., Donaldson C.D. Examples of variable density flows computed by second-order closure description of turbulence // AIAA J. 1976. Vol. 14. P. 382–387.

[53] Шец Дж. Турбулентное течение. Процессы вдува и перемешивания. М.: Мир, 1984. 247 с.

[54] Мошкин Н.П., Федорова Н.Н., Черных Г.Г. О численном моделировании турбулентных следов // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Т. 1, № 1. С. 70–92.

[55] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. 520 с.

[56] Даниленко А.Ю., Костин В.И., Толстых А.И. О неявном алгоритме расчета течений однородной и неоднородной жидкости. М., 1985 (Препр. ВЦ АН СССР) 40 с.

[57] Даниленко А.Ю. Численное моделирование некоторых океанологических задач. М., 1988. (Препр. ВЦ АН СССР). 40 с.

[58] Глушко Г.С., Гумилевский А.Г., Полежаев В.И. Эволюция турбулентных следов за шарообразными телами в устойчиво стратифицированных средах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 1. С. 13–22.

[59] Воропаева О.Ф., Черных Г.Г. Численная модель динамики безымпульсного турбулентного следа в пикноклине // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3. С. 69–86.

[60] Воропаева О.Ф., Черных Г.Г. Внутренние волны, генерируемые безымпульсным турбулентным следом в линейно стратифицированной среде // Мат. моделирование. 1998. Т. 10, № 6. С. 75–89.

[61] Chernykh G.G., Voropayeva O.F. Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28, N 3. P. 281–306.

[62] Воропаева О.Ф., Илюшин Б.Б., Черных Г.Г. Численное моделирование дальнего безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде с применением модифицированного уравнения переноса скорости диссипации // Теплофизика и аэромеханика. 2003. Т. 10, № 3. С. 389–400.

[63] Воропаева О.Ф., Илюшин Б.Б., Черных Г.Г. Анизотропное вырождение турбулентности в дальнем безымпульсном следе в линейно стратифицированной среде // Мат. моделирование. 2003. Т. 15, № 1. С. 101–110.

[64] Воропаева О.Ф., Илюшин Б.Б., Черных Г.Г. Численное моделирование дальнего безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 756–760.

[65] Воропаева О.Ф., Мошкин Н.П., Черных Г.Г. Численные модели безымпульсных турбулентных следов в стратифицированной среде // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1994. Т. 1, вып. 9. С. 18–30.

[66] Воропаева О.Ф., Мошкин Н.П., Черных Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде // Мат. моделирование. 2000. Т. 12, № 10. С. 77–94.

[67] Ilyushin B.B., Kurbatskii A.F. Modeling of turbulent transport in PBL with third-order moments // Proc. Intern. Symp. Turbulent Shear Flows, 11. France. Grenoble Inst. of Mech., 1997. P. 20–19; 20–24.

[68] Илюшин Б.Б., Курбацкий А.Ф. Новые модели для вычисления моментов третьего порядка в пограничном планетарном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34, № 6. С. 772–781.

[69] Canuto V.M., Minotti F., Ronchi C., Ypma R.M., Zeman O. Second-order closure PBL model with new third-order moments: comparison with LES data // J. Atmos. Sci. 1994. Vol. 51, N 12. P. 1605–1618.

[70] Launder B.E. Heat and mass transport. Turbulence. Chapter 6. Topics in Applied Physics / Ed. by P. Bradshow. Vol. 12. B.: Springer Verlag, 1976.

[71] Воропаева О.Ф., Зудин А.Н., Мошкин Н.П., Черных Г.Г. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, спецвыпуск. С. 36–48.

[72] Koh R.C.A. Transient motion induced by local disturbances in a linearly density-stratified fluid // J. Hydraulic Res. 1971. Vol. 9, N 3. P. 159–175.

[73] Benjamin T.B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 29, N 3. P. 559–592.

Поступила в редакцию 24 марта 2004 г.