

# АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ С ПРЕПЯТСТВИЕМ

К. Е. АФАНАСЬЕВ, Е. Н. БЕРЕЗИН

*Кемеровский государственный университет, Россия*

e-mail: keafa@kemsu.ru, ben@kemsu.ru

This work investigates interaction of a solitary wave with a solid body partially submerged into fluid. Kinematic characteristics of the arising flow are presented. Dynamic load variations during interaction of surface waves with a fixed solid body have been studied. Main attention is paid to investigation of the fluid flow arising behind the solid. The problem in the fully nonlinear formulation is solved by the boundary element method.

## Введение

Теория движения жидкости со свободными границами является одним из наиболее бурно развивающихся направлений современной гидродинамики. Вопросам взаимодействия поверхностных волн с препятствиями посвящено множество работ [1–7]. Задачи такого класса могут находить многочисленные технические приложения при проектировании морских сооружений типа плавучих доков, волноломов и платформ. Одной из важнейших задач является определение воздействия поверхностных волн на эти объекты. Инженерные методы расчета воздействия поверхностных волн на частично погруженные тела основаны на большом количестве допущений и имеют значительную погрешность. Аналитические методы могут дать достаточно точное решение, однако при их использовании трудно надеяться на точное описание локальных характеристик течения [4]. Поэтому вычислительный эксперимент на основе математической модели представляет практический интерес, с его помощью можно достаточно точно воспроизводить волновую картину течения и рассчитать динамические характеристики.

В настоящей работе приведены результаты расчетов волнового движения жидкости при набегании уединенной волны на тело прямоугольного сечения, частично погруженное в жидкость и не касающееся дна. Исследуется влияние ширины тела и расстояния между дном бассейна и дном тела, а также амплитуды набегающей волны на высоту заплеска. Рассматривается волновая картина возникающего течения перед телом и за ним. Задача решается в полной нелинейной постановке. Для решения поставленной задачи используется метод граничных элементов (МГЭ) на основе интегральной формулы Грина [8, 9].

Методика решения нестационарных задач гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами методом граничных элементов изложена в работах [8, 10, 11]. Для описания траекторий частиц (точек) свободной границы применяется метод Лагранжа.

При этом интеграл Коши — Лагранжа и кинематическое условие на свободных границах жидкости записываются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Задача является нестационарной, и для ее решения применяется метод Эйлера с автоматическим выбором шага по времени. Начальная форма уединенной волны и распределение потенциала на ней получены из численного решения нелинейной стационарной задачи [1]. Работоспособность метода и достоверность полученных результатов проверяются на тестовых расчетах.

## 1. Постановка задачи

В расчетной области  $D$  (рис. 1), ограниченной поверхностями  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , решается уравнение Лапласа

$$\Delta\phi = 0, \quad \mathbf{x}(x, y) \in D. \quad (1)$$

Границы  $C_1$ ,  $C_2$  являются свободными поверхностями жидкости,  $\Gamma_1$  — твердые границы бассейна,  $\Gamma_2$  — твердые границы погруженного тела. На твердых границах выставляется условие непротекания

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x}(x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2. \quad (2)$$

На свободной границе выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla\phi, \quad \mathbf{x}(x, y) \in C_1, C_2; \quad (3)$$

$$\frac{d\phi}{dt} - \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + y = 0, \quad \mathbf{x}(x, y) \in C_1, C_2. \quad (4)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) граница  $C_1$  соответствует уединенной волне, на которой распределение потенциала задается из решения нелинейной стационарной задачи [1]. Краевая задача (1)–(4) для потенциала скоростей записана в безразмерном виде, где в качестве характерных величин выбираются ускорение свободного падения  $g$  и глубина бассейна  $H$ . Все геометрические размеры и обозначения показаны на рис. 1.

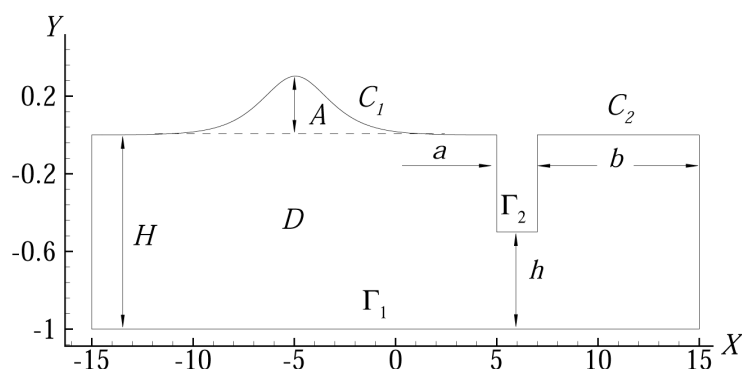


Рис. 1. Схема расчетной области.

## 2. Алгоритм движения по времени

Краевая задача (1)–(4) является нестационарной, но в отличие от традиционных задач математической физики время явно входит только в граничные условия (3), (4), представляющие собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, для интегрирования которых используется явный метод Эйлера с автоматическим выбором шага по времени.

Пусть в некоторый момент времени  $t_k$  заданы положение свободной границы  $C = C_1 \cup C_2$  и распределение потенциала  $\phi^k$  на ней. Необходимо решить уравнение Лапласа (1) с условием  $\phi^k$  на  $C$  и условием (2) на  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . Новое положение свободной границы и распределение потенциала на ней для момента времени  $t_k + \tau$  можно вычислить, используя условия (3) и (4), дискретный аналог которых расписывается по схеме Эйлера следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + (\nabla\phi)^k \tau, \\ \phi^{k+1} &= \phi^k + (0,5 |(\nabla\phi)^k|^2 - y^k) \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{x}^k, \phi^k$  — значения функций на  $k$ -м шаге по времени. В результате на каждом шаге по времени  $t_k$  решается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа (1) с граничными условиями (2) и (5). Описанный алгоритм представляет собой явную схему Эйлера первого порядка точности, которая, как известно из теории численных методов, является условно устойчивой и требует наличия некоторых дополнительных условий на выбор шага по времени. В данной работе используется хорошо зарекомендовавший себя алгоритм выбора шага по времени описанный в работах [8, 11, 12].

## 3. Численное моделирование

Поскольку нелинейная краевая задача (1)–(4) на каждом шаге по времени сводится к смешанной линейной краевой задаче (1), (2), (5) для уравнения Лапласа, для ее решения используется метод граничных элементов [9]. В силу того что потенциал течения идеальной несжимаемой жидкости является гармонической функцией, можно воспользоваться известной из теории гармонических функций функцией Грина, которая является фундаментальным решением уравнения Лапласа (1) и для плоских задач имеет вид

$$G(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r), \quad (6)$$

где  $r$  — расстояние между точками  $\xi$  и  $x$ . В этом случае справедливо следующее интегральное уравнение:

$$\varepsilon(\xi) \phi(\xi) + \int_{\Gamma} \phi(x) \frac{\partial G(\xi, x)}{\partial n(x)} d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(x)}{\partial n(x)} G(\xi, x) d\Gamma(x), \quad (7)$$

где  $\Gamma(x)$  — граница области  $D$ ;  $\phi(x)$  — гармоническая функция;  $n(x)$  — внешняя по отношению к области  $D$  единичная нормаль поверхности  $\Gamma(x)$ . Параметр  $\varepsilon(\xi)$  определяется следующим образом:  $\varepsilon(\xi) = 1$  для внутренней точки,  $\varepsilon(\xi) = 0.5$  для точки на гладкой границе,  $\varepsilon(\xi) = \alpha/2\pi$  для угловой точки границы ( $\alpha$  — телесный угол, под которым видна поверхность из точки  $\xi$ ). Значение функции в произвольной точке области определяется из

уравнения (7) по известным на границе значениям функции  $\phi$  и нормальной производной  $\partial\phi/\partial n$ .

Для численного решения интегрального уравнения (7) граница заданной области разбивается на ряд граничных элементов, в пределах которых функции  $\phi$  и  $\partial\phi/\partial n$  изменяются по линейному закону. В результате решение граничного интегрального уравнения сводится к системе линейных алгебраических уравнений размерности  $N \times N$

$$AX = B, \quad (8)$$

где  $N$  — число узлов по границе области  $D$ ;  $A$  — полнозаполненная матрица;  $X$  — вектор неизвестных для определения  $\partial\phi/\partial n$  на  $C_1, C_2$  и  $\phi$  на  $\Gamma_1, \Gamma_2$ ,  $B$  — вектор правой части. Для решения системы (8) используется метод Гаусса с выбором ведущего элемента [13]. Методика решения интегрального уравнения, выбор шага по времени, дифференцирование функций, заданных на границе, и учет особенности при смене типа граничных условий изложены в работах [8, 11].

#### 4. Вычисление кинематических и динамических характеристик

При исследовании взаимодействия солитонов с преградами актуальными являются задачи определения давления  $P$  и динамических нагрузок  $P_s$  на твердых границах.

Для вычисления давления необходимо решить дополнительную краевую задачу:

$$\Delta\phi_t = 0, \quad \mathbf{x}(x, y) \in D; \quad (9)$$

$$\phi_t = -\frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - y, \quad \mathbf{x}(x, y) \in C_1, C_2; \quad (10)$$

$$\frac{\partial\phi_t}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x}(x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2. \quad (11)$$

Решая систему уравнений (8) для функции  $\phi_t$  с граничными условиями (10), (11), находим  $\phi_t$  на  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . После этого давление вычисляется по формуле

$$P(x, y) = -\left(\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + y\right), \quad \mathbf{x}(x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2. \quad (12)$$

На рис. 2 представлена графическая схема расчета волнового давления по аналогии с работой [14]. Нагрузка  $P_s$  волнового давления вычисляется по формуле

$$P_s = \int_a^b P_b ds, \quad (13)$$

где  $P_b = P - P_0$  — волновое давление,  $P$  — давление, создаваемое жидкостью на каждом шаге по времени, и  $P_0$  — давление, созданное покоящейся жидкостью.

Контроль за точностью численных расчетов осуществляется с помощью закона сохранения полной энергии  $E = E_k + E_p$ . Значения кинетической  $E_k$  и потенциальной  $E_p$  энергий вычисляются по формулам

$$E_k = -\frac{1}{2} \int_a^b \phi \frac{\partial\phi}{\partial n} ds = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N_g} (2\phi_i f_i + \phi_i f_{i+1} + \phi_{i+1} f_i + 2\phi_{i+1} f_{i+1}) L_i, \quad (14)$$

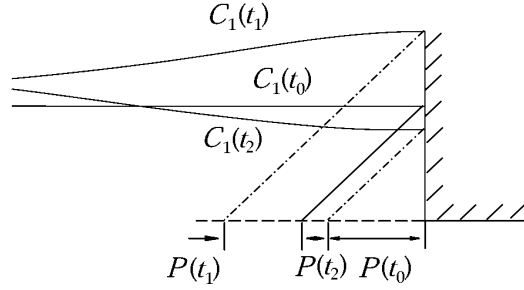


Рис. 1. Схема расчета волнового давления.

$$E_p = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{N_g} (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) (x_i - x_{i+1}). \quad (15)$$

Здесь  $L_i$  — длина  $i$ -го элемента;  $N_g$  — количество точек на свободной границе;  $f_i = (\partial\phi/\partial n)_i$  — производная по нормали.

Хорошим критерием контроля точности метода для задач со свободными границами является закон сохранения массы, который в плоском случае равносильен закону сохранения площади фигуры, совпадающей с областью течения  $D$ . Площадь  $M$  области течения  $D$  вычисляется по формуле

$$M = \frac{1}{2} \left( \oint_{\Gamma} y dx - \oint_{\Gamma} x dy \right) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N ((y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1}) - (x_i + x_{i+1})(y_i - y_{i+1})), \quad (16)$$

где  $N$  — число узлов по границе.

## 5. Численные результаты

### 5.1. Тестирование МГЭ методом пробных функций

Точность аппроксимации в плоском случае граничного интегрального уравнения (??) демонстрируется при помощи теста, предложенного в работе [15]. Требуется найти решение уравнения Лапласа в области  $D = \{0 \leq x \leq 2\pi; -1 \leq y \leq 0.5 \sin(x)\}$ . На дне и вертикальных стенках задается условие непротекания:  $\partial\phi(x, y)/\partial n = 0$ , а на верхней границе — условие вида  $\phi(x, y) = \cos(x) \cos h(y + 1)$ , правая часть в котором является гармонической функцией. Численные значения нормальной производной  $\phi_n = \partial\phi(x, y)/\partial n$  сравниваются с точным решением  $\phi_n^A$ :

$$\phi_n^A(x, y) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 + 0.25 \cos^2(x)}} (0.5 \sin(x) \cos h(y + 1) - \sin(y + 1)).$$

Данный тест можно интерпретировать как расчет на одном временном шаге задачи о движении жидкости в прямоугольном бассейне. Аналитические выражения для компонент вектора скорости имеют следующий вид:

$$V_x^A = \frac{\partial\phi}{\partial x} = -\sin(x) \cos h(y + 1), \quad V_y^A = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \cos(x) \sin h(y + 1).$$

Т а б л и ц а 1

$N/N_g$	$\varepsilon(\phi_n)$	$\varepsilon(V_x)$	$\varepsilon(V_y)$	$K(A)$
100/43	6.83E-03	2.27E-03	8.55E-03	133
200/87	4.54E-03	1.11E-03	6.00E-03	273
400/175	2.51E-03	6.26E-04	3.73E-03	561
800/351	1.21E-03	6.90E-04	2.24E-03	1189
1500/659	5.90E-04	8.17E-04	1.44E-03	2395

Относительная погрешность точного и численного значений исследуемых функций имеет вид  $\varepsilon(f) = \max |f^A - f| / \max |f^A|$ , где  $f$  — численное,  $f^A$  — аналитическое значение функции. В табл. 1 приведены погрешности нормальной производной потенциала и компонент  $V_x, V_y$  вектора скорости и числа обусловленности  $K(A)$  матрицы  $A$  системы линейных алгебраических уравнений (8). Значения приведены в зависимости от дискретизации области ( $N$  — число узлов на всей границе,  $N_g$  — число узлов на свободной границе области).

## 5.2. Тест по движению уединенной волны по бассейну постоянной глубины

Известно, что уединенная волна в процессе движения должна сохранять амплитуду, скорость, форму и полную энергию. Были выполнены численные расчеты по движению уединенной волны амплитуды  $A = 0.5$  по бассейну постоянной глубины  $H = 1$ . Для расчета была выбрана область  $D = \{-15 \leq x \leq 75; -1 \leq y \leq y_0\}$ , где  $y_0 = y_0(x)$  описывает форму уединенной волны. Вершина волны при  $t = 0$  находится в точке  $x = -5, y = 0.5$ . Расчеты проводятся до момента безразмерного времени  $t = 50$ , когда вершина волны перешла в точку с абсциссой  $x = 56$ . К этому моменту времени волна прошла путь, равный  $5.5$  длин волны  $l$ , которая определяется величиной отрезка по оси  $x$ , где выполняется условие  $y(t) \leq 0.01A(t)$ ,  $\mathbf{x}(x, y) \in C_1$  [2].

Рост погрешности основных характеристик волны имеет линейный характер. В табл. 2 приводятся данные (в процентах) по изменению амплитуды, массы и полной энергии на длину пробега волны в зависимости от количества точек разбиения области ( $N$  — число узлов на всей границе,  $N_g$  — число узлов на свободной границе области). Отсутствие диспергирующего хвоста из волн малой амплитуды позади основной волны объясняется достаточно точным заданием начальной поверхности солитона и распределением потенциала на ней, полученным на основе численного решения стационарной нелинейной задачи об уединенной волне [1]. Использование в качестве начальных параметров волны известных приближений уединенных волн [6] дает заметный диспергирующий след, что оказывает влияние как на характеристики основной волны, так и на волны, образованные при ее взаимодействии с различными препятствиями.

Т а б л и ц а 2

$N/N_g$	$\varepsilon(A)$	$\varepsilon(M)$	$\varepsilon(E)$
310/151	3.30	0.55	0.78
514/301	1.98	0.47	1.00
718/451	1.56	0.46	1.10
922/601	1.49	0.48	1.12
1126/751	1.35	0.50	1.17
1330/901	1.38	0.52	1.18

### 5.3. Взаимодействие уединенной волны с частично погруженным в жидкость телом

#### 5.3.1. Тело расположено далеко от правой стенки бассейна

Расчеты волнового движения идеальной несжимаемой жидкости в бассейне постоянной глубины  $H = 1$ , возникающего в результате набегания уединенной волны на частично погруженное закрепленное тело (см. рис. 1), проводились для области  $D \in [-15, 30]$ . Вершина волны для всех расчетов находится при  $t = 0$  в точке  $x = -5$ . Варьируемыми параметрами задачи выбираются величины:  $A$  — амплитуда волны,  $h$  — расстояние от дна до препятствия,  $a = x_r - x_l$  — ширина тела, где  $x_l$  и  $x_r$  — абсциссы левой и правой

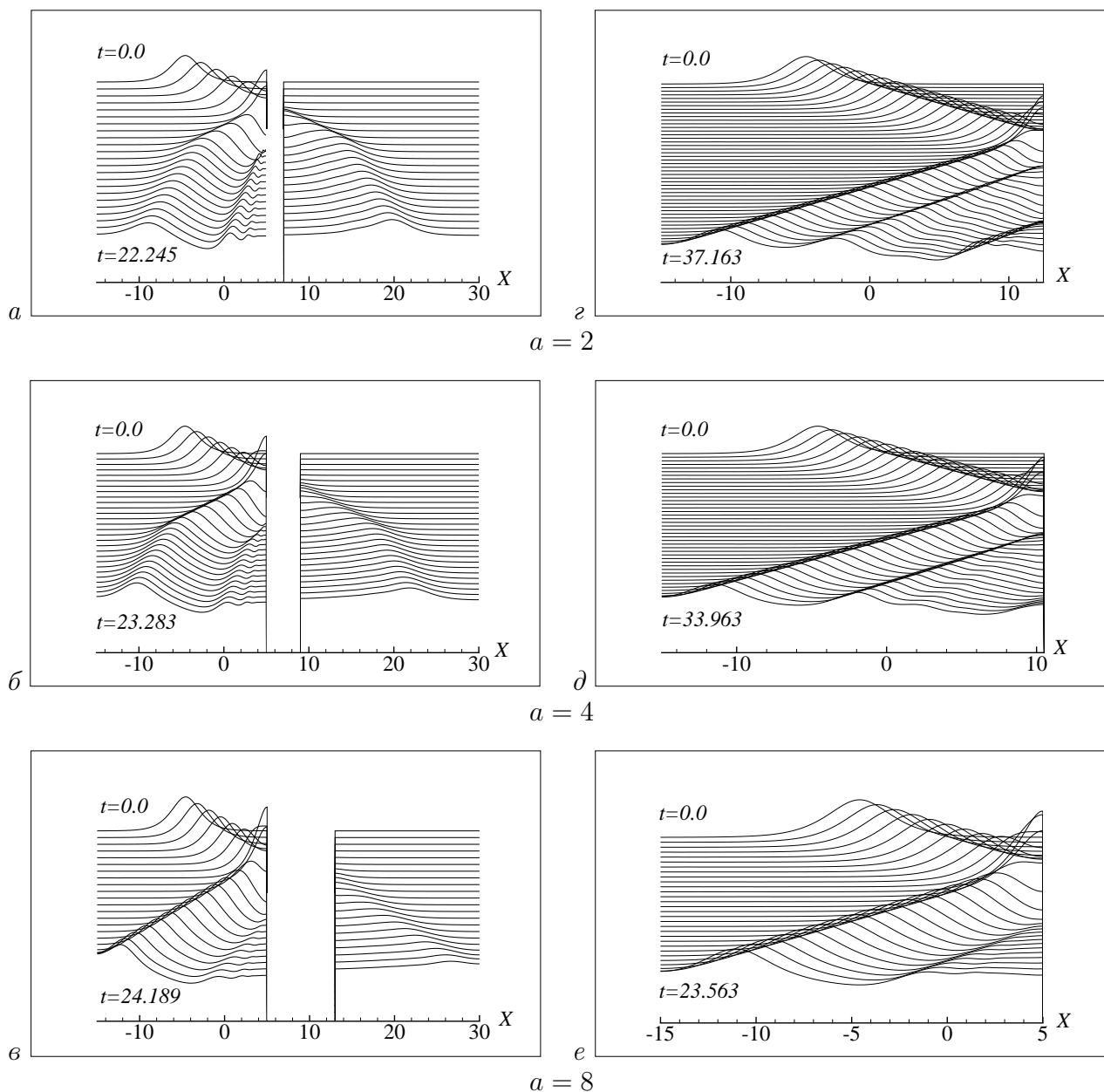


Рис. 3. Формы свободной поверхности при взаимодействии уединенной волны с частично погруженным телом;  $A = 0.3$ ,  $h = 0.4$ .

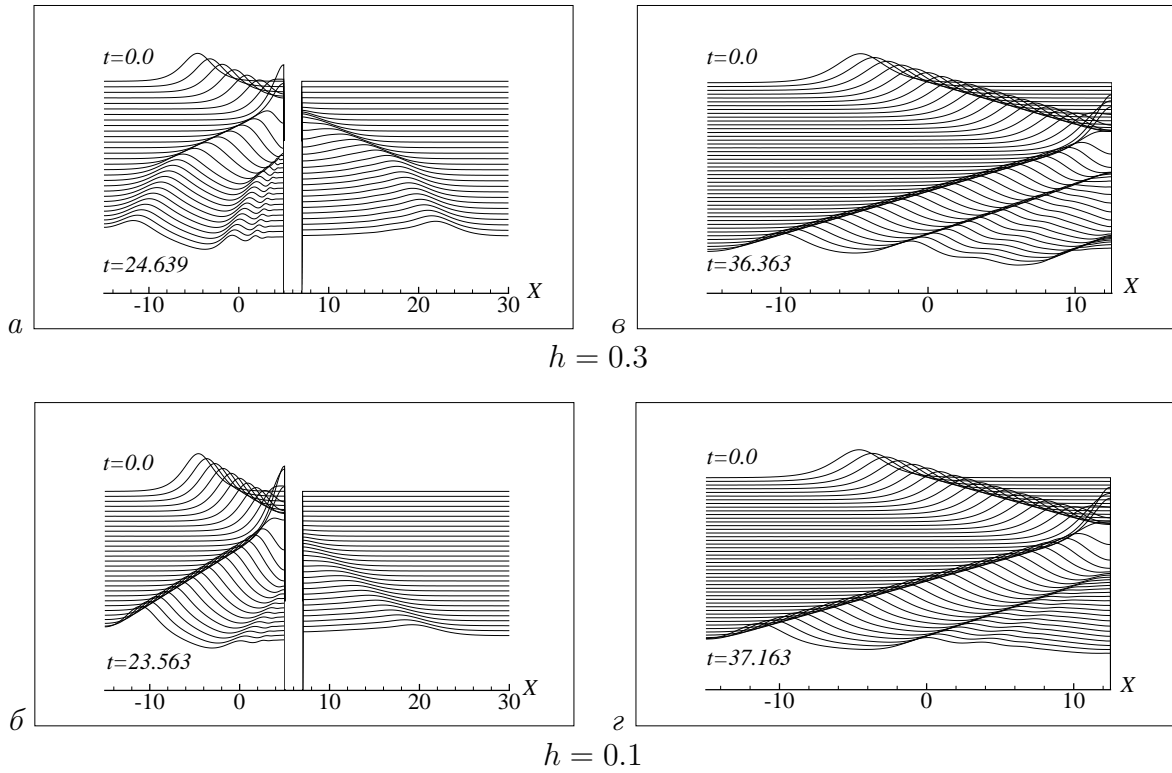


Рис. 4. Формы свободной поверхности при взаимодействии уединенной волны с частично погруженным телом расположенным вблизи правой стенки бассейна;  $A = 0.3$ ,  $a = 2$ .

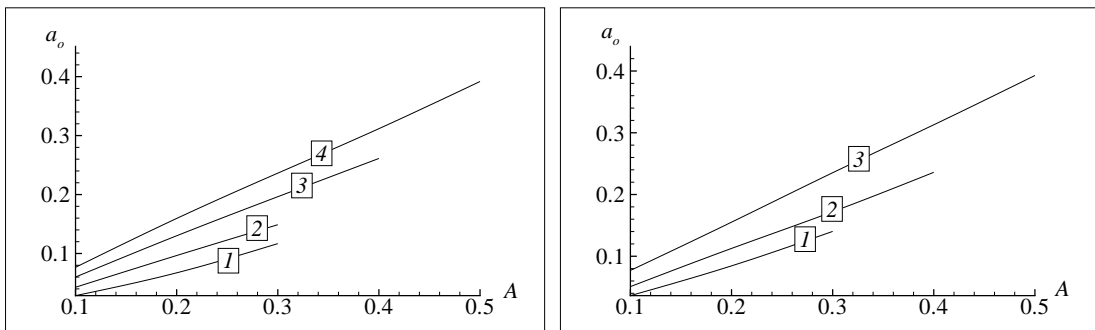


Рис. 5. Амплитуды отраженной волны  $a_o$ .

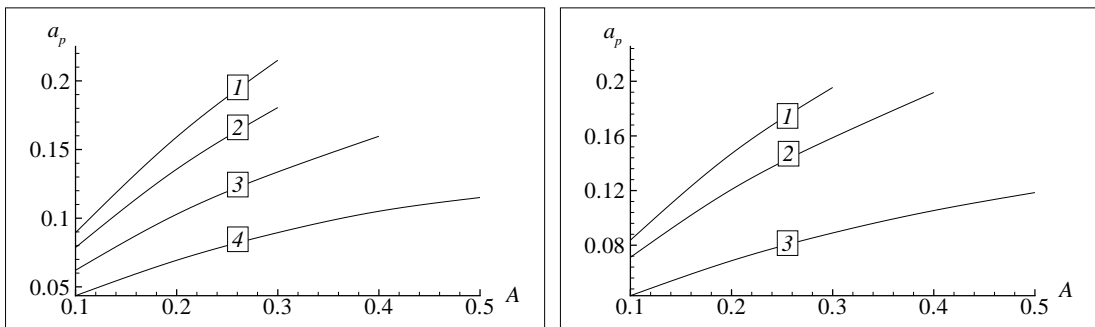


Рис. 6. Амплитуды прошедшей волны  $a_p$ .



вертикальных стенок тела,  $b$  — расстояние между правой стенкой тела при  $(x = x_r)$  и правой границей бассейна. Контроль точности решения осуществляется по закону сохранения полной энергии и массы. Для всех расчетов относительная ошибка полной энергии не превышает 1.5 % и массы 0.06 %. Численные расчеты, проводимые для диапазона варьируемых параметров  $A \in [0.1 : 0.5]$ ,  $h \in [0.1 : 0.7]$ ,  $a \in [1 : 8]$ , показали, что во время отражения волны от левой стенки тела при  $(x = x_l)$  за телом формируется прошедшая волна. Формы свободной поверхности при взаимодействии уединенной волны с телом показаны на рис. 3,  $a - в$  и 4,  $a, б$ . Отметим, что при уменьшении ширины тела  $a$  и увеличении расстояния  $h$  за основной отразившейся волной формируется ряд вторичных волн достаточно большой амплитуды. Если же ширина тела  $a$  увеличивается и уменьшается расстояние  $h$ , то амплитуда отраженной волны может превысить амплитуду прошедшей волны (рис. 5, 6), при этом образование вторичных волн незначительно.

Для различных значений амплитуды  $A$  набегающей волны изучалось влияние ширины тела  $a$  и расстояния от дна до препятствия  $h$  на величину максимального заплеска  $Y_l$  на левую стенку тела (рис. 7), максимального заплеска  $Y_r$  на правую стенку тела (рис. 8), амплитуды отраженной волны  $a_o$  (см. рис. 5), амплитуды прошедшей волны  $a_p$  (см. рис. 6) и динамической нагрузки  $P_s$  волнового давления (13) на левой (рис. 9) и правой (рис. 10) стенках тела. В левой части этих рисунков линии, обозначенные цифрами 1–4, соответствуют ширине тела  $a = 1, a = 2, a = 4, a = 8, h = 0.4$ . На рисунках справа представлены зависимости для трех значений  $h$  и фиксированной ширины тела  $a = 2$ . Цифры 1–3 соответствуют значению расстояния от дна бассейна до нижней границы тела  $h = 0.5, h = 0.3, h = 0.1$ . Численные расчеты показали, что при увеличении ширины тела и уменьшении расстояния  $h$  величины заплесков на левой стенке тела, амплитуда отраженной волны и динамическая нагрузка на левой стенке тела возрастают, а заплески на правой стенке тела,

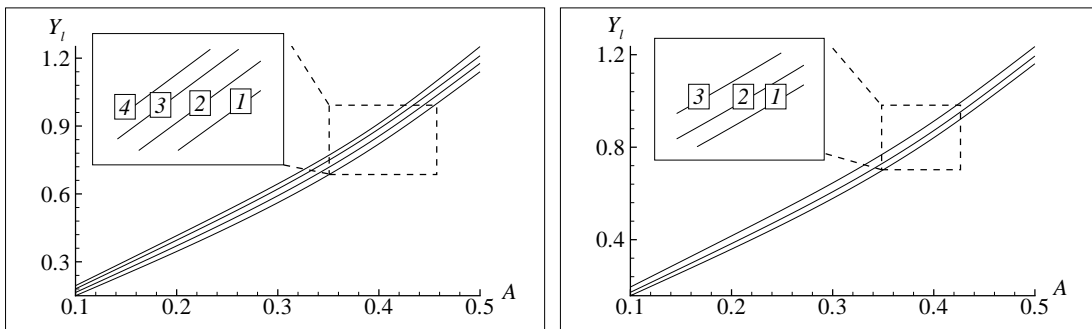


Рис. 7. Максимальный заплеск  $Y_l$  на левую стенку тела.

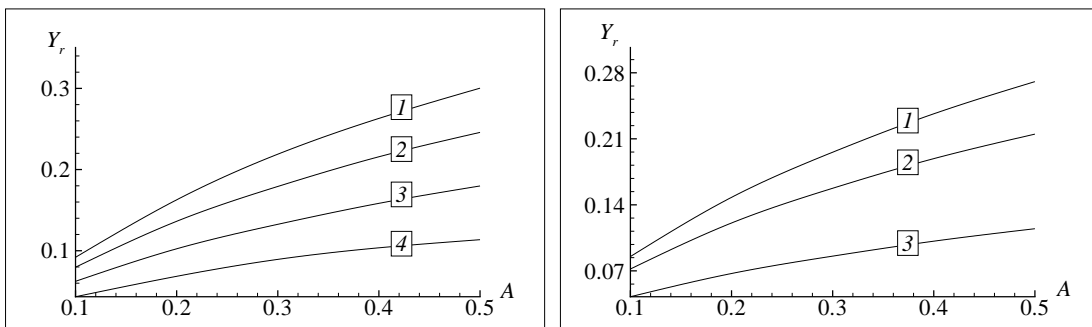


Рис. 8. Максимальный заплеск  $Y_r$  на правую стенку тела.

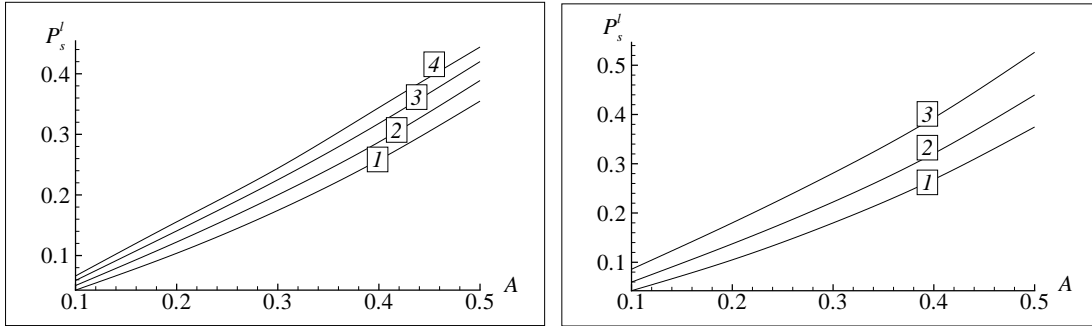


Рис. 9. Максимальное значение динамической нагрузки  $P'_s$  на левой стенке тела в момент максимального заплеска.

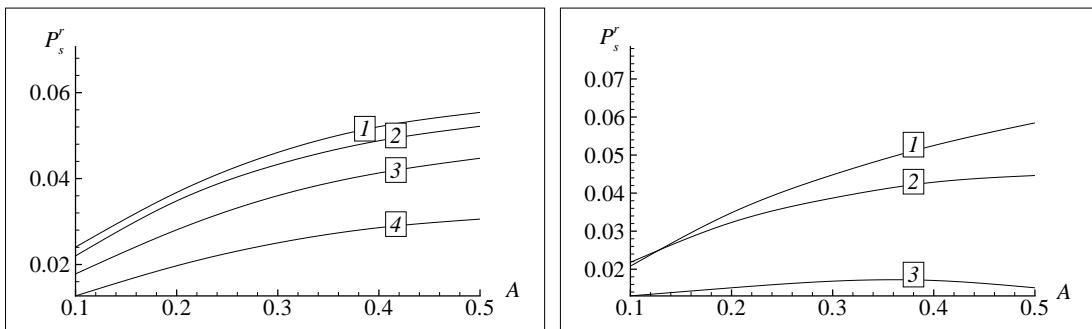


Рис. 10. Максимальное значение динамической нагрузки  $P'_s$  на правой стенке тела в момент максимального заплеска.

амплитуда прошедшей волны и динамическая нагрузка на правой стенке тела убывают. Такое поведение характеристик также отмечается в работе [4].

В табл. 3 и 4 приведены результаты расчетов, представленных на рис. 5–10. Здесь  $a_o$  и  $a_p$  — амплитуды отраженной и прошедшей волн; ячейки с прочерком означают, что расчет при соответствующих значениях параметров не был проведен до конца. Это объясняется тем, что при малой ширине тела  $a$  и большом значении амплитуды  $A$  волны в момент отражения основной волны происходит обрушение при формировании вторичных волн.

### 5.3.2. Тело расположено вблизи правой вертикальной стенки бассейна

Расчеты проводились для области  $D \in [-15, 15]$ . Расстояние  $b$  от правой стенки тела при ( $x = x_r$ ) было равно 0.5. Остальные параметры взяты из предшествующей задачи.

На рис. 3,  $z - e$  и 4,  $v - z$  показаны формы свободной поверхности в случае, если тело расположено вблизи правой вертикальной стенки бассейна. В данной постановке задачи, как и в задаче, описанной выше, при уменьшении ширины тела  $a$  и увеличении расстояния  $h$  за основной отразившейся волной формируется ряд вторичных волн достаточно большой амплитуды. Если же ширина тела  $a$  увеличивается и уменьшается расстояние  $h$ , то при этом образование вторичных волн незначительно. Необходимо отметить, что на форму вторичных волн сильно влияет расположение тела вблизи правой стенки бассейна.

При различных значениях амплитуды  $A$  набегающей волны изучалось влияние ширины тела  $a$  и расстояния от дна до препятствия  $h$  на величину максимального заплеска  $Y_l$  на левую стенку тела (рис. 11), максимального заплеска  $Y_r$  на правую стенку тела (рис. 12) и динамической нагрузки  $P'_s$  волнового давления (13) на левой (рис. 14) и правой (рис. 15)

Т а б л и ц а 3  
 Результаты расчетов, представленных на рис. 5–10

$a$	$A$	$Y_l$	$Y_r$	$a_o$	$a_p$	$P_s^l$	$P_s^r$
1	0.1	1.501E-1	9.189E-2	2.853E-2	8.947E-2	4.295E-2	2.404E-2
	0.2	3.456E-1	1.627E-1	6.720E-2	1.591E-1	1.037E-1	3.676E-2
	0.3	5.611E-1	2.189E-1	1.167E-1	2.150E-1	1.744E-1	4.608E-2
	0.4	8.211E-1	2.630E-1	—	—	2.577E-1	5.208E-2
	0.5	1.139E+0	3.003E-1	—	—	3.548E-1	5.539E-2
2	0.1	1.644E-1	7.967E-2	4.277E-2	7.866E-2	5.049E-2	2.201E-2
	0.2	3.703E-1	1.362E-1	9.655E-2	1.356E-1	1.222E-1	3.480E-2
	0.3	5.919E-1	1.791E-1	1.488E-1	1.805E-1	1.999E-1	4.329E-2
	0.4	8.552E-1	2.157E-1	—	—	2.873E-1	4.88E-2
	0.5	1.177E+0	2.458E-1	—	—	3.888E-1	5.216E-2
4	0.1	1.805E-1	6.231E-2	6.008E-2	6.207E-2	5.885E-2	1.781E-2
	0.2	3.954E-1	1.023E-1	1.300E-1	1.028E-1	1.405E-1	2.806E-2
	0.3	6.216E-1	1.325E-1	1.963E-1	1.336E-1	2.249E-1	3.601E-2
	0.4	8.873E-1	1.583E-1	2.612E-1	1.596E-1	3.18E-1	4.129E-2
	0.5	1.210E+0	1.798E-1	—	—	4.201E-1	4.473E-2
8	0.1	1.945E-1	4.331E-2	7.654E-2	4.357E-2	6.629E-2	1.269E-2
	0.2	4.155E-1	6.847E-2	1.594E-1	6.934E-2	1.555E-1	1.970E-2
	0.3	6.444E-1	8.934E-2	2.362E-1	8.947E-2	2.440E-1	2.503E-2
	0.4	9.113E-1	1.035E-1	3.117E-1	1.050E-1	3.441E-1	2.857E-2
	0.5	1.251E+0	1.135E-1	3.917E-1	1.150E-1	4.441E-1	3.057E-2

Т а б л и ц а 4  
 Результаты расчетов, представленных на рис. 5–10

$h$	$A$	$Y_l$	$Y_r$	$a_o$	$a_p$	$P_s^l$	$P_s^r$
0.5	0.1	1.577E-1	8.516E-2	3.626E-2	8.366E-2	4.225E-2	2.081E-2
	0.2	3.591E-1	1.479E-1	8.445E-2	1.469E-1	1.048E-1	3.482E-2
	0.3	5.781E-1	1.957E-1	1.402E-1	1.954E-1	1.798E-1	4.479E-2
	0.4	8.408E-1	2.365E-1	—	—	2.682E-1	5.249E-2
	0.5	1.161E+0	2.706E-1	—	—	3.746E-1	5.845E-2
0.3	0.1	1.723E-1	7.197E-2	5.087E-2	7.113E-2	5.979E-2	2.181E-2
	0.2	3.831E-1	1.207E-1	1.126E-1	1.207E-1	1.374E-1	3.228E-2
	0.3	6.071E-1	1.575E-1	1.721E-1	1.586E-1	2.223E-1	3.870E-2
	0.4	8.716E-1	1.889E-1	2.359E-1	1.917E-1	3.209E-1	4.285E-2
	0.5	1.194E+0	2.149E-1	—	—	4.396E-1	4.462E-2
0.1	0.1	1.951E-1	4.256E-2	7.703E-2	4.305E-2	8.586E-2	1.299E-2
	0.2	4.163E-1	6.719E-2	1.552E-1	6.863E-2	1.801E-1	1.511E-2
	0.3	6.454E-1	8.562E-2	2.352E-1	8.896E-2	2.809E-1	1.686E-2
	0.4	9.123E-1	1.014E-1	3.129E-1	1.053E-1	3.933E-1	1.704E-2
	0.5	1.235E+0	1.146E-1	3.927E-1	1.185E-1	5.263E-1	1.512E-2

стенках тела. В левой части этих рисунков линии, обозначенные цифрами 1–4, соответствуют ширине тела  $a = 1$ ,  $a = 2$ ,  $a = 4$ ,  $a = 8$ ;  $h = 0.3$ . На правых рисунках представлены зависимости для трех значений  $h$  и при фиксированной ширине тела  $a = 2$ . Цифры 1–3 соответствуют  $h = 0.5$ ,  $h = 0.3$ ,  $h = 0.1$ . Видно, что при увеличении ширины тела и уменьшении расстояния  $h$  величины заплесков на левой стенке тела амплитуда отра-

женной волны, величины опускания жидкости и динамическая нагрузка на левой стенке тела возрастают, а заплески на правой стенке тела, амплитуда прошедшей волны и динамическая нагрузка на правой стенке тела убывают. В табл. 5 и 6 приведены значения численных расчетов, соответствующие рис. 11–15. Ячейки с прочерком означают, что при соответствующих значениях наблюдались режимы обрушения при формировании вторичных волн или осушение нижней границы тела.

В зазоре между правой стенкой тела и правой стенкой бассейна происходит почти равномерное колебание столба жидкости. Минимальное значение уровня жидкости  $Y_r^{\min}$  (рис. 13) на правой стенке тела при ( $x = x_l$ ) может превосходить амплитуду набегающей волны. Отметим, что максимальный заплеск на правой стенке тела может превосходить величину заплеска на левой стенке тела (см. рис. 11, 12), чего не наблюдается при располо-

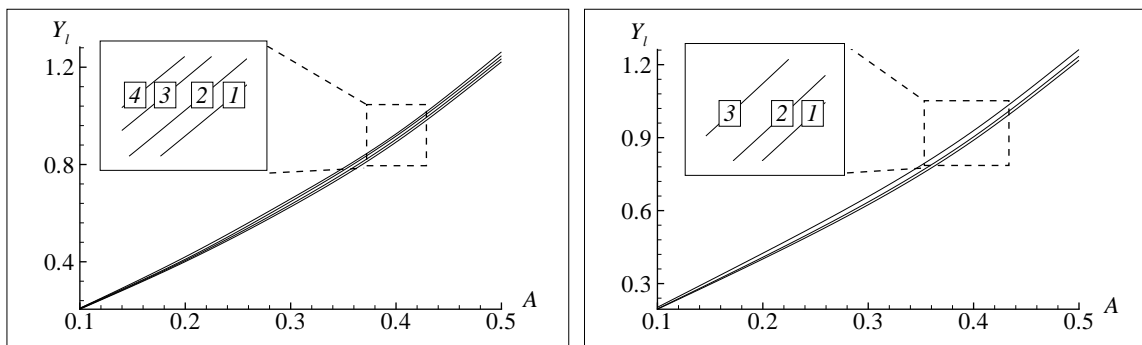


Рис. 11. Максимальный заплеск  $Y_l$  на левую стенку тела.

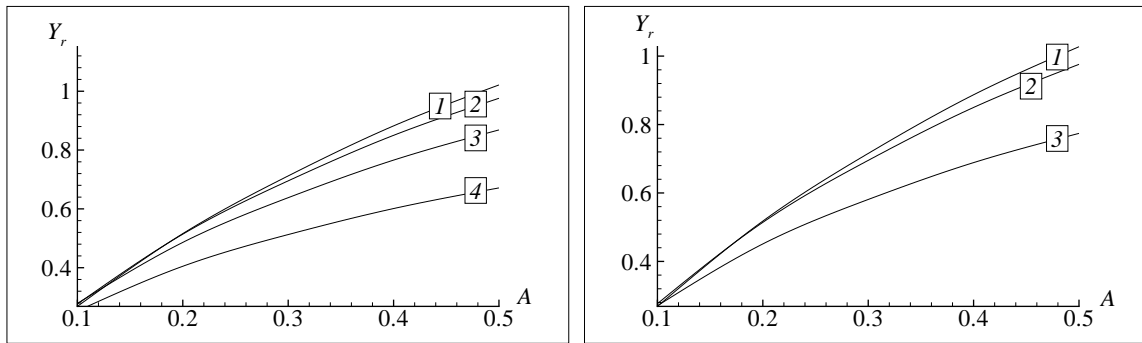


Рис. 12. Максимальный заплеск  $Y_r$  на правую стенку тела.

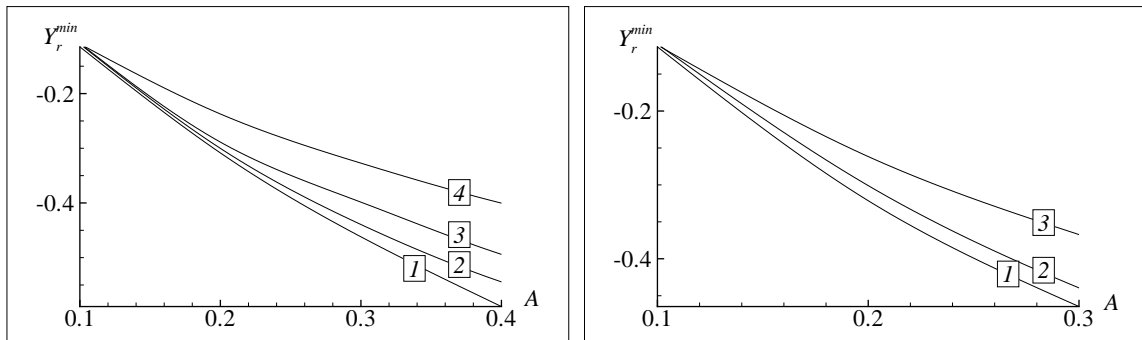


Рис. 13. Минимальный уровень жидкости  $Y_r^{\min}$  на правой стенке тела.

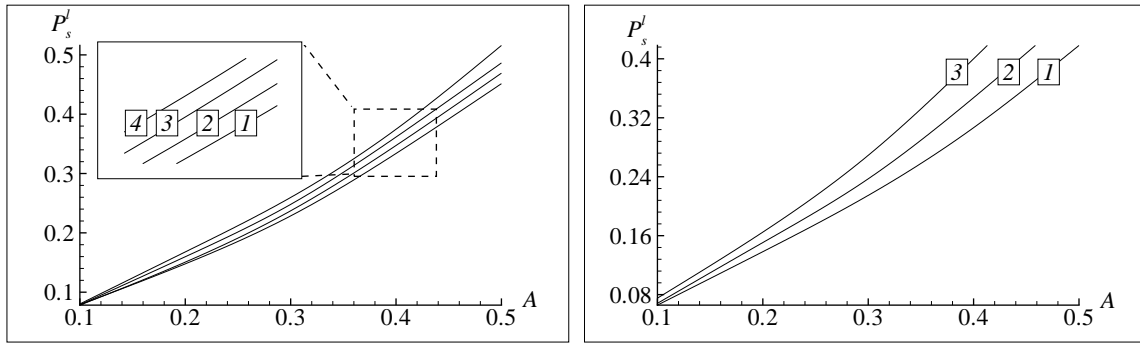


Рис. 14. Максимальное значение динамической нагрузки  $P'_s$  на левой стенке тела в момент максимального заплеска.

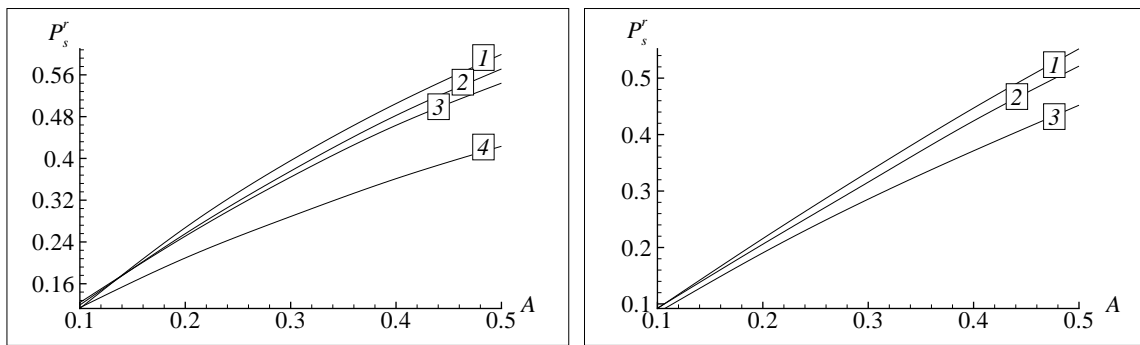


Рис. 15. Максимальное значение динамической нагрузки  $P'_s$  на правой стенке тела в момент максимального заплеска.

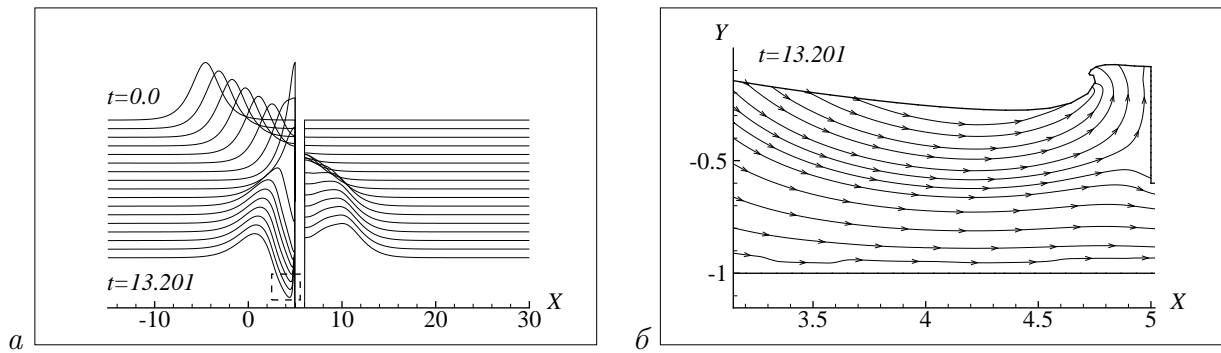


Рис. 16. Режим опрокидывания при  $A = 0.4$ ,  $a = 1$ ,  $h = 0.4$ .

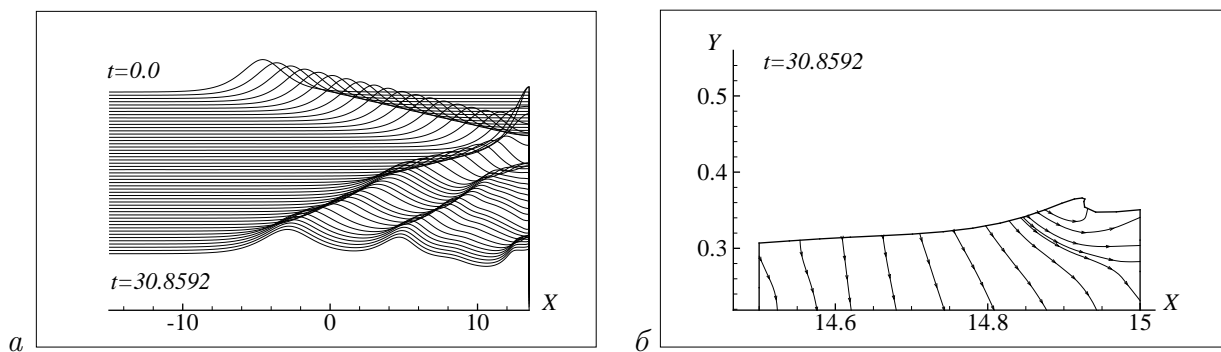


Рис. 17. Режим опрокидывания при  $A = 0.4$ ,  $a = 1$ ,  $h = 0.3$ .

Т а б л и ц а 5  
 Результаты расчетов, представленных на рис. 11–15

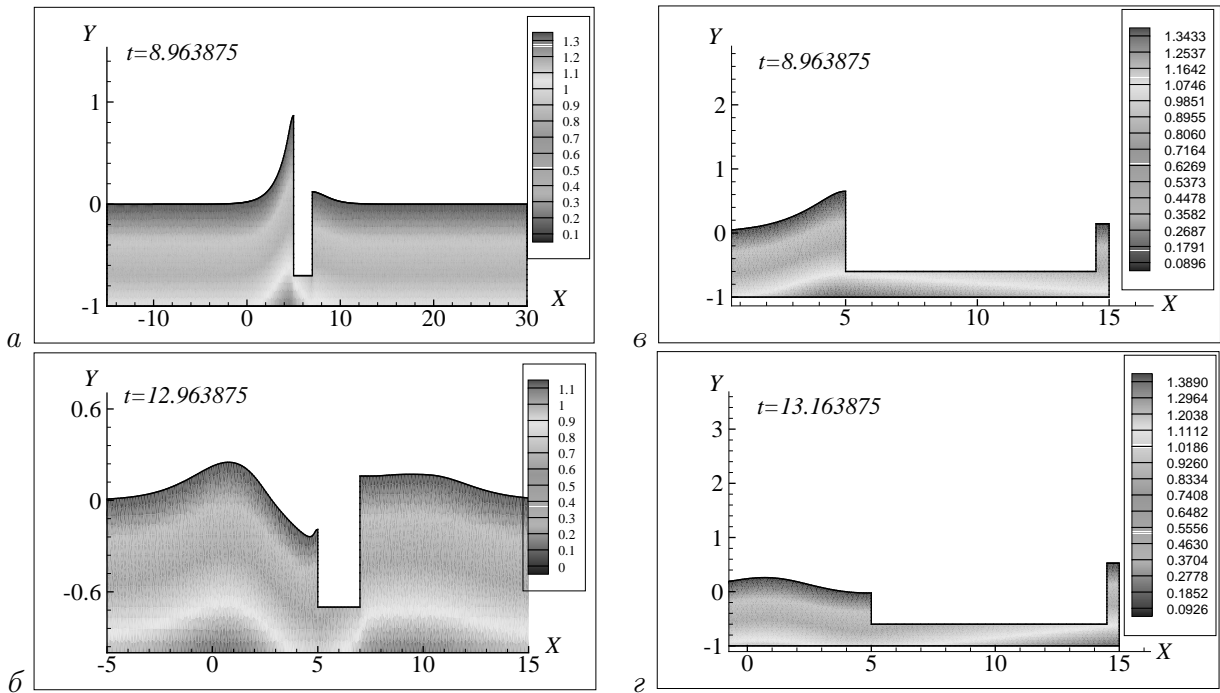
$a$	$A$	$Y_l$	$Y_r$	$Y_r^{min}$	$P_s^l$	$P_s^r$
1	0.1	2.048E-1	2.685E-1	-1.145E-1	7.889E-2	1.126E-1
	0.2	4.004E-1	5.158E-1	-3.085E-1	1.477E-1	2.673E-1
	0.3	6.258E-1	7.121E-1	-4.618E-1	2.285E-1	3.957E-1
	0.4	8.917E-1	8.821E-1	-5.894E-1	3.338E-1	5.049E-1
	0.5	1.222E+0	1.021E+0	—	4.514E-1	5.992E-1
2	0.1	2.060E-1	2.765E-1	-1.093E-1	7.82E-2	1.192E-1
	0.2	4.052E-1	5.141E-1	-3.001E-1	1.506E-1	2.557E-1
	0.3	6.352E-1	6.953E-1	-4.393E-1	2.371E-1	3.756E-1
	0.4	9.033E-1	8.499E-1	-5.443E-1	3.472E-1	4.822E-1
	0.5	1.234E+0	9.759E-1	-6.2E-1	4.691E-1	5.712E-1
4	0.1	2.088E-1	2.786E-1	-1.082E-1	7.876E-2	1.239E-1
	0.2	4.102E-1	4.861E-1	-2.887E-1	1.597E-1	2.510E-1
	0.3	6.473E-1	6.381E-1	-3.985E-1	2.479E-1	3.641E-1
	0.4	9.166E-1	7.657E-1	-4.939E-1	3.615E-1	4.633E-1
	0.5	1.247E+0	8.684E-1	-5.639E-1	4.864E-1	5.441E-1
8	0.1	2.087E-1	2.529E-1	-1.092E-1	8.017E-2	1.142E-1
	0.2	4.200E-1	4.048E-1	-2.373E-1	1.678E-1	2.093E-1
	0.3	6.584E-1	5.126E-1	-3.272E-1	2.596E-1	2.887E-1
	0.4	9.257E-1	6.011E-1	-4.003E-1	3.745E-1	3.611E-1
	0.5	1.262E+0	6.712E-1	-4.571E-1	5.158E-1	4.232E-1

Т а б л и ц а 6  
 Результаты расчетов, представленных на рис. 11–15

$h$	$A$	$Y_l$	$Y_r$	$Y_r^{min}$	$P_s^l$	$P_s^r$
0.5	0.1	1.946E-1	2.685E-1	-1.132E-1	6.576E-2	9.198E-2
	0.2	4.011E-1	5.178E-1	-3.213E-1	1.382E-1	2.157E-1
	0.3	6.241E-1	7.155E-1	-4.646E-1	2.146E-1	3.339E-1
	0.4	8.894E-1	8.870E-1	—	3.065E-1	4.4701E-1
	0.5	1.218E+0	1.027E+0	—	4.181E-1	5.519E-1
0.3	0.1	1.961E-1	2.765E-1	-1.093E-1	6.82E-2	9.243E-2
	0.2	4.082E-1	5.140E-1	-3.009E-1	1.506E-1	2.057E-1
	0.3	6.352E-1	6.952E-1	-4.393E-1	2.371E-1	3.156E-1
	0.4	9.033E-1	8.499E-1	-5.443E-1	3.472E-1	4.242E-1
	0.5	1.234E+0	9.759E-1	-6.2001E-1	4.691E-1	5.212E-1
0.1	0.1	2.024E-1	2.704E-1	-1.107E-1	7.523E-2	8.443E-2
	0.2	4.248E-1	4.511E-1	-2.616E-1	1.648E-1	1.904E-1
	0.3	6.574E-1	5.810E-1	-3.672E-1	2.690E-1	2.855E-1
	0.4	9.288E-1	6.887E-1	-4.541E-1	4.0004E-1	3.712E-1
	0.5	1.262E+0	7.741E-1	-5.208E-1	5.408E-1	4.5202E-1

жении тела далеко от правой стенки бассейна (см. рис. 7, 8). При увеличении амплитуды волны  $A$ , расстояния  $h$  от дна бассейна до тела и уменьшении ширины тела возможно осушение нижней границы тела.

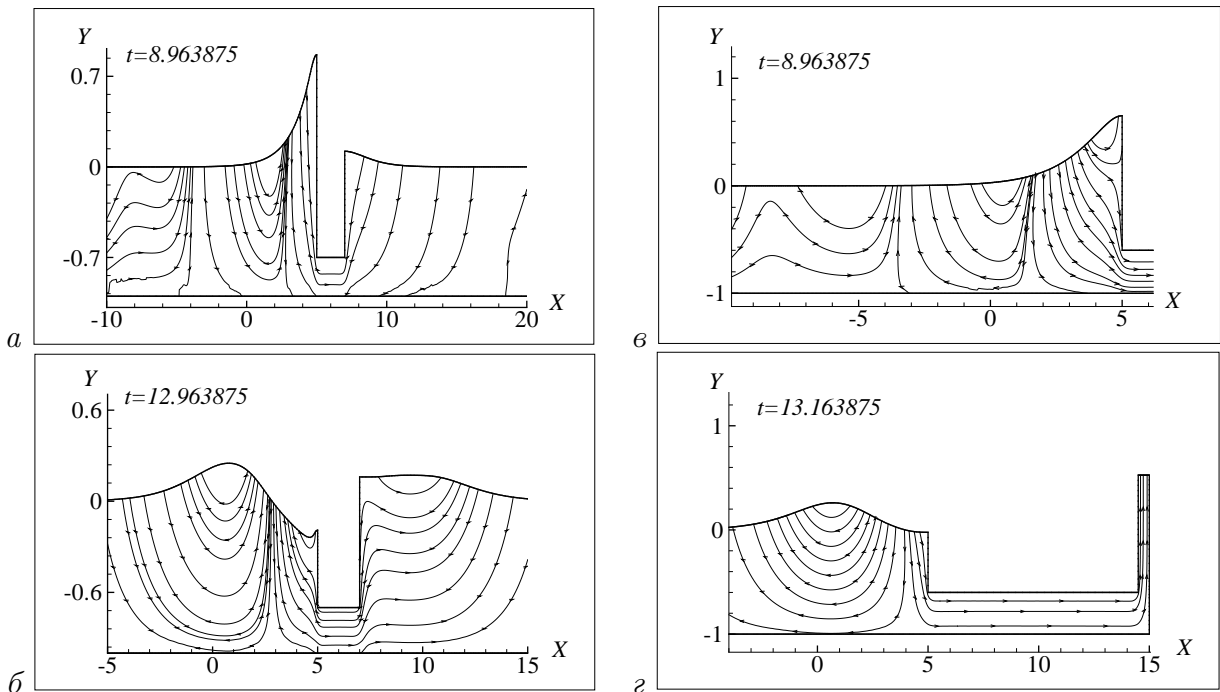
При взаимодействии уединенной волны с частично погруженным в жидкость телом наблюдались режимы обрушения волн. Примеры такого поведения волны приведены на



Тело расположено далеко от правой стенки бассейна:  $A = 0.4, a = 2, h = 0.3$

Тело расположено вблизи правой стенки бассейна:  $A = 0.3, a = 8, h = 0.4$

Рис. 18. Распределение давления.



Тело расположено далеко от правой стенки бассейна:  $A = 0.4, a = 2, h = 0.3$

Тело расположено вблизи правой стенки бассейна:  $A = 0.3, a = 8, h = 0.4$

Рис. 19. Направление течения.

рис. 16 и 17. На рис. 16, *a*, *б* волна опрокидывается назад во время отката от левой стенки тела, но в противоположном направлении относительно движения в начальный момент времени уединенной волны. На рис. 17, *a*, *б* показан случай, когда тело расположено вблизи правой стенки. Опрокидывание в виде скользящего буруна происходит при колебаниях столба жидкости между правой стенкой тела при  $x = x_l$  и бассейна (рис. 17, *б*).

На рис. 18, *a* и *в* приводятся картины изменения гидростатического давления  $P$  в момент максимального заплеска уединенной волны на левую стенку погруженного тела. Под телом во время наката волны на нижней границе бассейна формируется зона максимального гидростатического давления. Направления течения для данного момента времени показаны на рис. 19, *a*, *в*. В процессе отражения уединенной волны (рис. 18, *б* и *г*) образуются несколько зон максимального гидростатического давления, каждая из которых соответствует изменению формы свободной границы. Отметим, что при отражении волны от левой стенки тела направление течения частиц жидкости все еще устремлено за тело (рис. 19, *б*, и *г*), где формируется прошедшая волна.

## Список литературы

- [1] АФАНАСЬЕВ К.Е., СТУКОЛОВ С.В. О наличии трех решений при обтекании препятствий сверхкритическим установившимся потоком тяжелой жидкости // ПМТФ. 1999. № 1. С 27–35.
- [2] ПРОТОПОПОВ Б.Е. Численный анализ трансформации уединенной волны при отражении от вертикальной преграды // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1990. № 5. С. 115–123.
- [3] МАНОЙЛИН С.В. Некоторые экспериментально-теоретические методы определения взаимодействия волн цунами на гидротехнические сооружения и акватории морских портов. Красноярск, 1989 (Препр. ВЦ СО АН СССР. № 5).
- [4] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИН Ю.И., БАРАХНИН В.Б., ШОКИНА Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [5] ХАЖОЯН М.Г., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. Численное моделирование поверхностных волн с подводными препятствиями // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 4. С. 108–123.
- [6] ШОКИН Ю.И., РУЗИЕВ Р.А., ХАКИМЗЯНОВ Г.С. Численное моделирование плоских потенциальных течений жидкости с поверхностными волнами. Красноярск, 1990 (Препр. ВЦ СО АН СССР. № 12).
- [7] ТЕРЕНТЬЕВ А.Г., АФАНАСЬЕВ К.Е. Численные методы в гидродинамике: Учеб. пособие. Чебоксары: ЧГУ, 1987. 94 с.
- [8] АФАНАСЬЕВ К.Е., ГУДОВ А.М. Информационные технологии в численных расчетах: Учеб. пособие. Кемерово: КемГУ, 2001. 204 с.
- [9] БРЕБИЯ К., ТЕЛЛЕС Ж., ВРОУБЕЛ Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.



- [10] АФАНАСЬЕВ К.Е., АФАНАСЬЕВА М.М., ТЕРЕНТЬЕВ А.Г. Исследование эволюции свободных границ методами конечных и граничных элементов при нестационарном движении тел в идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 8–13.
- [11] АФАНАСЬЕВ К.Е., СТУКОЛОВ С.В. КМГЭ для решения плоских задач гидродинамики и его реализация на параллельных компьютерах: Учеб. пособие. Кемерово: КемГУ, 2001. 208 с.
- [12] ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1977.
- [13] БАХВАЛОВ Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
- [14] КАВАНАРА М., МИВА Т. Finite element analysis of wave motion // Intern. J. for Numer. Methods in Eng. 1984. Vol. 20. P. 1193–1210.
- [15] ПЕТРОВ А.Г., СМОЛЯНИН В.Г. Расчет нестационарных волн на поверхности тяжелой жидкости конечной глубины // ПММ. 1993. Т. 57, в. 4. С. 137–143.

*Поступила в редакцию 30 декабря 2003 г.,  
в переработанном виде — 2 апреля 2004 г.*