

ОГРАНИЧЕНО ЛИ ДОПУСТИМОЕ МНОЖЕСТВО РЕШЕНИЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ?

И. А. ШАРЯЯ

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия

e-mail: shary@ict.nsc.ru

<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/irash>

A criterion is proved for the tolerable solution set to be unbounded.

Введение

В работе используются обозначения интервального анализа, предложенные в [1], и классическая интервальная арифметика (см., например, [2, 3]).

Для интервальной системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ — интервальная матрица размерности $m \times n$; $\mathbf{b} \in \mathbb{IR}^m$ — интервальный вектор длины m ; $x \in \mathbb{R}^n$ — вещественный вектор длины n , допустимое множество решений Ξ описывается так [4]:

$$\Xi = \{x \mid (\forall A \in \mathbf{A}) (\exists b \in \mathbf{b}) (Ax = b)\}.$$

Критерий принадлежности вектора x допустимому множеству решений на языке интервальной арифметики имеет вид (см., например, [5])

$$x \in \Xi \iff \mathbf{A}x \subseteq \mathbf{b}. \quad (1)$$

Легко показать [6], что Ξ — выпуклое многогранное множество в \mathbb{R}^n . Можно ли по виду матрицы \mathbf{A} судить об ограниченности множества Ξ ? Этот вопрос поставил в переписке профессор Зенон Кульпа (<http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/>) — автор диаграмматического метода исследования множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений [7, 8]. Поблагодарим его за интересную постановку и попробуем ответить.

1. Критерий неограниченности

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Первое позволяет по специальному виду матрицы сказать, что допустимое множество решений неограничено, а второе, наоборот, показывает, что если допустимое множество решений неограничено, то матрица имеет этот специальный вид.

В соответствии с [9] будем называть конечное множество $\{a_j\}$ вещественных векторов линейно зависимым, если существует соответствующее множество $\{c_j\}$ вещественных чисел, не все из которых равны нулю, такое, что $\sum_j a_j c_j = 0$. Заметим, что множество из одного вектора линейно зависимо тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

Утверждение 1. Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Если в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы, то Ξ неограничено.

Доказательство. В силу (1) непустота Ξ означает, что существует $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\mathbf{A}\tilde{x} \subseteq \mathbf{b}$. Расписав произведение $\mathbf{A}\tilde{x}$ по столбцам $\mathbf{A}_{:j}$, получим

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \quad (2)$$

Пусть J — множество номеров линейно зависимых вещественных столбцов $\mathbf{A}_{:j}$. Тогда (2) можно переписать в виде

$$\sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}, \quad (3)$$

а линейную зависимость вещественных столбцов выразить формулой

$$\sum_{j \in J} A_{:j} c_j = 0, \quad (4)$$

где $c_j \in \mathbb{R}$ и $\sum_{j \in J} |c_j| > 0$.

Домножая (4) на произвольное вещественное t , добавляя к (3) и пользуясь законом дистрибутивности для вещественных чисел, получим

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j \in J} \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + t c_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \mathbf{A}_{:j} \tilde{x}_j \subseteq \mathbf{b}. \quad (5)$$

Введем вектор $c = (c_1, \dots, c_n)$, дополнив множество коэффициентов линейной зависимости нулевыми для $j \notin J$. Тогда (5) можно переписать в виде

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} (\tilde{x}_j + t c_j) \subseteq \mathbf{b},$$

что в матричной форме выглядит так:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbf{A}(\tilde{x} + t c) \subseteq \mathbf{b}.$$

По критерию принадлежности (1) это означает, что вместе с решением \tilde{x} в множество Ξ попадает прямая, проходящая через \tilde{x} и параллельная вектору c . Значит, Ξ неограничено. \square

Утверждение 2. Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Если оно неограничено, то в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы.

Доказательство. Как упоминалось во введении, Ξ — это выпуклое многогранное множество. Если Ξ неограничено, значит, неограничено его пересечение с каким-нибудь ортантом. Тогда в этом ортанте лежит выпуклое многогранное неограниченное подмножество Ξ , из которого можно выбрать какой-нибудь луч $(\tilde{x} + tc)$, где \tilde{x} — начало луча, c — вектор направления, $t \in \mathbb{R}^+$ — параметр, задающий точки луча.

Так как луч $(\tilde{x} + tc)$ целиком лежит в Ξ , по критерию принадлежности (1)

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}(\tilde{x} + tc) \subseteq \mathbf{b}. \quad (6)$$

С другой стороны, луч $(\tilde{x} + tc)$ целиком лежит в одном ортанте, поэтому

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad x_j c_j \geq 0$$

и в (6) можно раскрыть скобки по правилу дистрибутивности [2, 3]:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}\tilde{x} + \mathbf{A}(tc) \subseteq \mathbf{b}. \quad (7)$$

Для произвольных интервальных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ имеет место очевидное свойство

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \subseteq \mathbf{y} \\ \mathbf{x} + \mathbf{z} \subseteq \mathbf{y} \end{array} \right\} \implies |\mathbf{z}| \leq \text{wid } \mathbf{y},$$

где $|\cdot|$ — модуль, wid — ширина интервальных векторов. Используя это свойство в (7) для $\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{A}(tc)$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, получим, что должно выполняться неравенство

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |\mathbf{A}(tc)| \leq \text{wid } \mathbf{b}. \quad (8)$$

Для вещественного t применимо правило дистрибутивности [2, 3]. Это позволяет переписать (8) в виде

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |t(\mathbf{A}c)| \leq \text{wid } \mathbf{b}.$$

Положительное t можно вынести за знак модуля и разделить на него обе части неравенства. Тогда

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad |\mathbf{A}c| \leq \frac{\text{wid } \mathbf{b}}{t}.$$

Это возможно только при $|\mathbf{A}c| = 0$, что эквивалентно

$$\mathbf{A}c = 0. \quad (9)$$

Равенство (9) означает, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{:j} c_j = 0,$$

т. е. линейная комбинация столбцов интервальной матрицы \mathbf{A} с коэффициентами, соответствующими компонентам вектора c , равна нулю. Остается заметить, что ненулевые коэффициенты в этой сумме могут стоять только при вещественных столбцах матрицы. В противном случае радиус линейной комбинации

$$\text{rad}(\mathbf{A}c) = \sum_{j=1}^n |c_j| \text{rad } \mathbf{A}_{:j} \quad (10)$$

будет отличен от нуля, что противоречит (9). □

Следствием утверждений 1 и 2 является

Критерий неограниченности. Пусть допустимое множество решений Ξ непусто. Оно неограничено тогда и только тогда, когда в матрице \mathbf{A} есть линейно зависимые вещественные столбцы.

Можно ли представить, как выглядит непустое неограниченное Ξ ? Давайте попробуем. Пусть $c \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор коэффициентов, для которого линейная комбинация столбцов интервальной матрицы \mathbf{A} равна нулю, т. е. $\mathbf{A}c = 0$. Обозначим через L пространство всех таких векторов.

В силу (10) у вектора c могут отличаться от нуля только компоненты, соответствующие вещественным столбцам матрицы \mathbf{A} . Это значит, что размерность пространства L равна $(k' - k'')$, где k' — число всех вещественных столбцов, k'' — максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы \mathbf{A} . Например, если в матрице \mathbf{A} все вещественные столбцы нулевые, то $k'' = 0$ и размерность пространства L равна числу нулевых столбцов k' .

Опираясь на доказательство утверждения 1, можно сказать, что Ξ представляет собой объединение прямых, параллельных произвольному вектору c из L . Следовательно, допустимое множество состоит из пространств, полученных параллельными сдвигами L . Для выпуклого многогранного множества это означает, что все его грани лежат в гиперплоскостях, параллельных L .

2. Выводы

На основании критерия неограниченности можно по виду матрицы \mathbf{A} судить об ограниченности допускового множества решений, если оно непусто. Делается это так.

Если в матрице \mathbf{A} нет линейно зависимых вещественных столбцов, то Ξ ограничено; если есть такие столбцы, то неограничено. В простейших случаях можно обойтись без вычислений, например:

- если в матрице \mathbf{A} нет вещественных компонент, то Ξ ограничено;
- если в матрице \mathbf{A} каждый столбец имеет не вещественную компоненту, то Ξ ограничено;
- если в матрице \mathbf{A} есть нулевые столбцы, то Ξ неограничено;
- если в матрице \mathbf{A} есть пропорциональные вещественные столбцы, то Ξ неограничено;
- если в матрице \mathbf{A} число вещественных столбцов больше числа строк этой матрицы, то Ξ неограничено.

Неограниченное допустимое множество решений представляет собой выпуклое многогранное множество, все грани которого параллельны пространству таких векторов $c \in \mathbb{R}^n$, для которых $\mathbf{A}c = 0$. Размерность этого пространства равна $(k' - k'')$, где k' — число всех вещественных столбцов, k'' — максимальное число линейно независимых вещественных столбцов матрицы \mathbf{A} .

Список литературы

- [1] KEARFOTT R.B., NAKAO M.T., NEUMAIER A. ET AL. Standardized notation in interval analysis // Reliable Computing (в печати).
(<http://www.mat.univie.ac.at/~neum/software/int>)

- [2] АЛЕФЕЛЬД Г., ХЕРЦБЕРГЕР Ю. Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987.
- [3] ШАРАЯ И.А. О дистрибутивности в классической интервальной арифметике // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 71–83.
(<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Irene/ct97.ps>)
- [4] ШАРЫЙ С.П. Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 3. С. 51–61. (<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Shary/IzvAN.ps>)
- [5] SHARY S.P. Solving the linear interval tolerance problem // Mathematics and Computers in Simulation. 1995. Vol. 39. P. 53–85.
(<http://www.ict.nsc.ru/lab1.2/Shary/LinTol.pdf>)
- [6] ШАЙДУРОВ В.В., ШАРЫЙ С.П. Решение интервальной алгебраической задачи о допусках // Красноярск, 1988 (Препр. АН. Сиб. отд-ние. Вычисл. центр. № 5).
- [7] KULPA Z. Diagrammatic analysis of interval linear equations. Pt I // Reliable Computing. 2003. Vol. 9, N 1. P. 1–20.
- [8] KULPA Z. Diagrammatic analysis of interval linear equations. Pt II // Reliable Computing. 2003. Vol. 9, N 3. P. 205–228.
- [9] ХАЛМОШ П. Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 6 февраля 2004 г.,
в переработанном виде — 9 марта 2004 г.*