ОБ ОДНОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ТЕПЛА В СТЕРЖНЕ

М. Тухтасинов
Национальный университет Узбекистана, Ташкент
e-mail: mumin51@mail.ru

An optimisation problem of a start control of differential equations system, obtained by discretization of the equation of heat dissemination in a rod is considered. Some components of the solution change according to the law (regime) defined beforehand.

Решается оптимизационная задача в дискретизированном варианте распределения тепла в ограниченном стержне. Цель управления — гарантировать изменение температуры заданных точек стержня по определенному закону (режиму). При этом в качестве функционала, который надо минимизировать, берется норма управляющего параметра, характеризующая начальное состояние распределения тепла в стержне [1–4].

Как известно, распространение тепла в однородном стержне длины ℓ описывается уравнением следующего вида [5]:

$$z_t = a^2 z_{xx} + f(t,x), \quad t > 0, \quad 0 < x < \ell, \tag{1}$$

с граничными

$$z(t,0) = z(t,\ell) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

и начальными

$$z(0,x) = u(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{3}$$

условиями.

Если отрезок $[0,\ell]$ разбить равномерно на $N+1$ частей и ввести обозначение $h = \ell/(N+1)$, то имеем

$$z_{xx}(t,ih) \approx (z_{i-1}(t) - 2z_i(t) + z_{i+1}(t))/h^2,$$

где $z_i(t) = z(t,ih),\ i = 1,...,N,\ z_0(t) = z_{N+1}(t) = 0,\ t \geq 0$. Тогда задаче (1)–(3) можно поставить в соответствие следующую систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= -2z_1 + z_2 + f_1(t),\\
\dot z_2 &= z_1 - 2z_2 + z_3 + f_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dot z_{N-1} &= z_{N-2} - 2z_{N-1} + z_N + f_{N-1}(t),\\
\dot z_N &= z_{N-1} - 2z_N + f_N(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

с начальным условием

$$z_i(0) = u_i,\ i = 1, ..., N, \tag{5}$$

где $u_i = u(ih),\ f_i(t) = h^2/^2 f(t, ih),\ i = 1, ..., N,\ t \geq 0$. (Здесь коэффициент a^2/h^2 считается равным 1; этого можно добиться путем изменения масштаба времени t.)

Определение. Функция $m(t),\ 0 \leq t \leq T$, называется *реализуемой* для индекса i_0 системы (4), если существует вектор $u = (u_1, ..., u_N)$, такой, что решение $z(t) = (z_1(t), ..., z_N(t))$, $0 \leq t \leq T$, задачи (4), (5) удовлетворяет условию

$$z_{i_0}(t) = m(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Пусть теперь индекс i_0 и время T фиксированы, $m(t),\ 0 \leq t \leq T-$ любая функция. Через G_m обозначим множество векторов $u = (u_1, ..., u_N)$, таких, что решение $z(t),\ 0 \leq t \leq T$, задачи (4), (5) удовлетворяет условию $z_{i_0}(t) = m(t),\ 0 \leq t \leq T$.

Задача. При заданной функции $m(t),\ 0 \leq t \leq T$, найти

$$inf_{u \in G_m} \|u\| \quad (\|u\| = (u_1^2 + ... + u_N^2)^{1/2}).$$

Если $G_m = \emptyset$, то положим $inf_{u \in G_m} \|u\| = +\infty$. В дальнейшем будем считать, что функция $m(t),\ 0 \leq t \leq T$, реализуема.

Лемма 1. *Для того чтобы множество G_m состояло из единственного элемента, необходимо и достаточно, чтобы $(i_0, N+1) = 1$ (здесь (i_0, i_1) означает наибольший общий делитель (НОД) чисел i_0 и i_1).*

Доказательство. Необходимость. Пусть G_m состоит из единственного элемента, но $(i_0, N+1) = p > 1$. Рассмотрим следующую однородную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \quad -2z_1 + z_2,\\
\dot{z}_2 &= z_1 - 2z_2 + z_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dot{z}_{p-2} &= z_{p-3} - 2z_{p-2} + z_{p-1},\\
\dot{z}_{p-1} &= z_{p-2} - 2z_{p-1}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Очевидно, что эта система имеет решение при произвольных начальных условиях

$$z_i(0) = u_i,\ i = 1, ..., p-1.$$

Рассмотрим некоторое нетривиальное решение $(\bar{z}_1(t), ..., \bar{z}_{p-1}(t)),\ 0 \leq t \leq T$, системы (6). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что $\bar{z}(t) = (\bar{z}_1(t), ..., \bar{z}_{p-1}(t), 0, -\bar{z}_{p-1}(t), ..., -\bar{z}_1(t), 0, \bar{z}_1(t), ..., \bar{z}_{p-1}(t), 0, ...)$ является решением системы (4).

Пусть $z_i^0(t),\ 0 \leq t \leq T,\ i = 1, ..., N,$ — решение системы (4), которое соответствует единственному элементу G_m. Тогда $z_i(t) = z_i^0(t) + \bar{z}_i(t),\ 0 \leq t \leq T,\ i = 1, ..., N$, также является решением системы (4) и $z_{i_0}(t) = m(t),\ 0 \leq t \leq T,$ т. е. $z(0) \in G_m$, но $z(0) \neq z^0(0)$, что противоречит одноэлементности множества G_m.

Достаточность. Пусть $(i_0, N+1) = 1$. Покажем, что G_m состоит из единственного элемента. Допустим противное, т. е. G_m содержит более одного элемента. Решения системы (4), соответствующие двум различным элементам множества G_m, обозначим через $z'(t), z''(t),\ 0 \leq t \leq T$ (заметим, что по определению $G_m : z'_{i_0}(t) = z''_{i_0}(t) = m(t),\ 0 \leq t \leq T$).

Разность этих функций обозначим через $\varphi(t)$, $0 \le t \le T$. Покажем, что $\varphi(t) \equiv 0$, $0 \le t \le T$. После подстановки $\varphi(t)$, $0 \le t \le T$, в (4) имеем

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_1 &= \quad -2\varphi_1 + \varphi_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\varphi}_{i_0-1} &= \varphi_{i_0-2} - 2\varphi_{i_0-1}, \\
0 &= \varphi_{i_0-1} + \varphi_{i_0+1}, \\
\dot{\varphi}_{i_0+1} &= -2\varphi_{i_0+1} + \varphi_{i_0+2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{\varphi}_N &= \varphi_{N-1} - 2\varphi_N.
\end{aligned} \tag{7}$$

В силу симметрии можно предположить, что $i_0 \le (N+1)/2$. Сложив уравнения с номерами i_0-k и i_0+k, где $k = 1, ..., i_0-1$, из (7) получим $\varphi_{i_0-k}+\varphi_{i_0+k} = 0,\ k = 1, ..., i_0-1$ и $\varphi_{2i_0} = 0$. Повторив эти же рассуждения, имеем $\varphi_{ki_0} = 0,\ k = 1, ..., N_1$, где $(N_1+1)i_0 > N+1$. Отсюда следует, что $p_1 = N + 1 - N_1 i_0 < i_0$ и $\varphi_{N_1 i_0-k} + \varphi_{N_1 i_0+k} = 0,\ k = 1, ..., p_1 - 1$, $\varphi_{N_1 i_0-p_1} = 0$. Применяя метод индукции, находим, что $\varphi_{N+1-kp_1} = 0,\ k = 1, ..., N_2$, где $(N_2 + 1)p_1 > N + 1$.

В силу того что $(i_0, N+1) = 1$, равенства $N+1-N_2p_1 = 0,\ N+1-kp_1 = i_0$, одновременно не могут выполняться ни при каком натуральном k. Если нарушается первое равенство, положим $p_2 = N+1-N_2p_1(< p_1)$. Тогда, повторив предыдущие рассуждения, имеем $\varphi_{kp_2} = 0$, $k = 1, ..., N_3$. Если нарушается второе равенство, то положим $p_2 = N + 1 - kp_1 - i_0(< p_1)$, здесь $N+1-(k+1)p_1 < i_0$. Тогда имеем $\varphi_{i_0+kp_2} = 0,\ k = \pm 1, \pm 2, ...$ Таким образом, каждый раз появляются новые равенства вида $\varphi_i = 0$. Следовательно, продолжив этот процесс, имеем $\varphi_i = 0,\ i = 1, ..., N$, т. е. $z'(t) \equiv z''(t),\ 0 \le t \le T$. Это противоречит допущению о неодноэлементности множества G_m. Лемма 1 доказана. ■

Пусть G_m состоит из одного элемента. Как определить этот элемент, зная функцию $m(t),\ 0 \le t \le T$?

Допустим, что решение $z(t),\ 0 \le t \le T$, системы (4) порождается этим элементом. По условию $z_{i_0}(t) = m(t),\ 0 \le t \le T$. Подставив это решение в (4), имеем

$$z_{i_0-1}(t) + z_{i_0+1}(t) = \dot{m}(t) + 2m(t) = \psi_1(t),\ z_{i_0-2}(t) + z_{i_0+2}(t) = \dot{\psi}_1(t) + 2\psi_1(t) + 2m(t) =$$

$$= \psi_2(t), ..., z_{i_0}(t) = \psi_{i_0}(t),\ 0 \le t \le T.$$

Повторив рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1, определим решение, выраженное через функцию $m(\cdot)$ и ее производные: $z_i(t) = \psi_i(t),\ 0 \le t \le T,\ i = 1, ..., N$. Отсюда получим тот единственный элемент $u^0 = (\psi_1(0), ..., \psi_N(0))$ множества G_m. В рассматриваемом случае поставленная задача решена: $\|u^0\|$ — значение функционала.

Теперь изучим структуру множества G_m, когда имеется более одного элемента. Из леммы 1 следует, что $(i_0, N + 1) = p > 1$. Допустим, что $np = N + 1$ и, не нарушая общности, предположим, что n — нечетное число.

Пусть $z'(t), z''(t),\ 0 \le t \le T$, — два решения системы (4), соответствующие двум различным элементам множества G_m. Если положить $\varphi(t) = z'(t) - z''(t),\ 0 \le t \le T$, то после подстановки $\varphi(t)$ в систему (4) легко убедиться, что $\varphi_{kp}(t) = 0,\ 0 \le t \le T,\ k = 1, 2, ...$ Кроме того, функции $\varphi_1(t), ..., \varphi_{p-1}(t),\ 0 \le t \le T$, удовлетворяют тождествам $\varphi_i(t) = -\varphi_{2p-i}(t) = \varphi_{2p+i}(t) = ... = -\varphi_{(n-1)p-i}(t) = \varphi_{(n-1)p+i}(t),\ i = 1, ..., p-1$. Из этих тождеств, положив $t=0$, заключаем, что любые два элемента множества G_m отличаются друг от друга на вектор вида

$$a=(a_1,...,a_{p-1},0-a_{p-1},...,-a_1,0,a_1,...,a_{p-1},0,...,a_1,...,a_{p-1}), \quad (8)$$

где $a_i,\ i=1,...,p-1,$ — действительные числа. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Множество* G_m *состоит из векторов, разность любых двух из которых имеет вид* (8).

Таким образом, если известен элемент множества G_m, то остальные можно определить исходя из утверждения леммы 2, т. е. прибавлением к нему вектора вида (8).

Пусть G_m содержит более одного элемента, т. е. числа i_0 и $N+1$ имеют НОД, равный $p>1$. Из системы (4) имеем

$$z_{i_0-1}(t)+z_{i_0+1}(t)=\dot{m}(t)+2m(t),\ z_{i_0-2}(t)+z_{i_0+2}(t)=\dddot{m}(t)+4\dot{m}(t)+2m(t),..., \quad (9)$$

где $z_i=z_i(t),\ 0\le t\le T,\ i=1,...,N,$ — решение системы (4), соответствующее элементу G_m. Если в (9) правые части обозначить через $\psi_i(t),\ 0\le t\le T,\ i=1,...,(n-1)p$, то при $t=0$ имеем

$$z_i+z_{2p-i}=\psi_{(i-1)(n-1)+1},\ z_{2p-i}+z_{2p+i}=\psi_{(i-1)(n-1)+2},...,z_{(n-1)p-i}+z_{(n-1)p+i}=$$
$$=\psi_{(i-1)(n-1)+n-1},\ i=1,...,p-1,\ z_{kp}=\psi_{(n-1)(p-1)+k},\ k=1,...,n-1, \quad (10)$$

где $(z_1,...,z_N)\in G_m,\ \psi_i=\psi_i(0),\ i=1,...,(n-1)p.$

Теорема. *Решение сформулированной выше задачи имеет вид*

$$u_{kp-j}=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}i\psi_{(j-1)(n-1)+i}/n+\sum_{i=k}^{n-1}(-1)^{i}\psi_{(j-1)(n-1)+i},$$

$k=2,4,...,n-1,\ j=1,2,...,p-1;$

$$u_{kp+j}=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}i\psi_{(j-1)(n-1)+i}/n+\sum_{i=k+1}^{n-1}(-1)^{i+1}\psi_{(j-1)(n-1)+i}, \quad (11)$$

$k=0,2,...,n-1,\ j=1,2,...,p-1,$

$$u_{kp}=\psi_{(n-1)(p-1)+k},$$

$k=1,...,n-1.$

Доказательство. Пусть $(z_1,...,z_N)\in G_m$. Тогда по лемме 2 любые другие элементы множества G_m имеют вид

$$\bar{z}_i=z_i+a_i,\bar{z}_{2p-i}=z_{2p-i}-a_i,...,\bar{z}_{(n-1)p-i}=$$
$$=z_{(n-1)p-i}-a_i,\ \bar{z}_{(n-1)p+i}=z_{(n-1)p+i}+a_i,\ i=1,2,...,p-1, \quad (12)$$
$$\bar{z}_{kp}=\psi_{(n-1)(p-1)+k},\ k=1,...,n-1,$$

где $a_1,...,a_{p-1}$ — произвольные действительные числа. Так как

$$\|\bar{z}\|^2=\sum_{i=1}^{p-1}[(z_i+a_i)^2+(z_{2p-i}-a_i)^2+...+$$

$$+(z_{(n-1)p-i}-a_i)^2+(z_{(n-1)p+i}+a_i)^2]+\sum_{k=1}^{n-1}\psi^2_{(n-1)(p-1)+k}, \qquad (13)$$

для минимизации функционала $\|\bar{z}\|$ достаточно найти наименьшее значение каждой квадратной скобки в (13), которая является квадратным трехчленом относительно a_i. Легко определить критическую точку: $a_i = -(z_i - z_{2p-i} + ... + z_{(n-1)p+i})/n,\ i = 1, ..., p-1$.

Подставив эти значения в (12), находим требуемый элемент множества G_m; он будет иметь вид (11). Теорема доказана. ■

Замечание 1. Можно решить аналогичную задачу при неоднородных граничных условиях (2) приведением этого случая путем несложных преобразований к однородному [5].

Замечание 2. Можно получить аналогичные результаты и в случае, когда даны реализуемые функции для нескольких различных индексов системы (4) соответственно.

Пример. Рассмотрим систему (4) при $N = 11,\ i_0 = 4$ и реализуемой функции $m(t) = -e^{-t},\ 0 \le t \le T$.

Так как $(i_0, N+1) = 4$ и $n = 3$, из леммы 1 следует, что G_m содержит более одного элемента. Можно показать, что функции $z_1 = e^{-t} + e^{-2t},\ z_2 = e^{-t},\ z_3 = -e^{-2t},\ z_4 = -e^{-t},\ z_5 = -e^{-t} + e^{-2t},\ z_6 = 0,\ z_7 = e^{-t} - e^{-2t},\ z_8 = e^{-t},\ z_9 = e^{-2t},\ z_{10} = -e^{-t},\ z_{11} = e^{-t} - e^{-2t},\ 0 \le t \le T$, составляют решение рассматриваемой системы, соответствующее начальному вектору $u = (2, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 1, 1, -1, -2) \in G_m$. Легко определить числа $\psi_i,\ i = 1, ..., 8,:\ \psi_1 = 2,\ \psi_2 = 1,\ \psi_3 = 1,\ \psi_4 = -1,\ \psi_5 = -1,\ \psi_6 = -2,\ \psi_7 = -1,\ \psi_8 = 1$. Используя формулу (1), получим решение нашей задачи: $u^0_1 = 1,\ u^0_2 = 1,\ u^0_3 = 0,\ u^0_4 = -1,\ u^0_5 = -1,\ u^0_6 = 0,\ u^0_7 = 1,\ u^0_8 = 1,\ u^0_9 = 0,\ u^0_{10} = -1,\ u^0_{11} = -1$.

Отсюда $inf_{u \in G_m}\|u\| = \|u^0\| = 2\sqrt{2}$.

Список литературы

[1] Авдонин С.А., Иванов С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМКВО, 1989.

[2] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.

[3] Черноусько Ф. Л. Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 810–826.

[4] Тухтасинов М. О некоторых задачах в теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1995. Т. 59, вып. 6. С. 979–984.

[5] Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976.

Поступила в редакцию 26 июня 2003 г.