Вычислительные технологии **Том 8, № 5, 2003**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА МАССОПЕРЕНОСА В СРЕДАХ СО СЛОЖНЫМ ХАРАКТЕРОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ*

М. В. Зарецкая
Кубанский государственный университет, Краснодар, Россия
e-mail: zarmv@mail.ru

Main factors affecting transfer and settling of admixture are being analyzed. The consideration of these factors results in a solution of the transfer problem for the case of layered inhomogeneity in the vertical plane. The methods for the solution of boundary-value problems in multi-layered air or aqueous medium are developed.

Современная теория турбулентной диффузии показывает, что распространение загрязнений в виде концентраций тех или иных веществ осуществляется за счет переноса их сносящим потоком и диффузии, обусловленной турбулентными флуктуациями скорости сносящего потока. Молекулярным потоком, обусловленным тепловым движением молекул, можно пренебречь [1, 2]. В процессе переноса загрязняющее вещество может претерпевать изменения, вступая в физическое и химическое взаимодействие с частицами окружающей среды и другими примесями, которые изменяют механические, физические и химические свойства загрязняющих веществ.

Количественная сторона изменения содержания загрязняющих веществ в среде во времени и в пространстве описывается уравнением переноса [1]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial (u\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (v\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial (w\varphi)}{\partial z}+\sigma\varphi-\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=f\left(x,y,z,t\right),$$

где $\varphi(x,y,z,t)$ — интенсивность (концентрация) загрязняющих веществ, мигрирующих вместе с потоком среды (воды или воздуха); μ, ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно; σ — коэффициент поглощения (это величина, обратная интервалу времени, за который концентрация субстанции по сравнению с начальной интенсивностью φ_0 уменьшится в e раз); f — функция, описывающая внутренние источники выброса загрязняющих веществ.

В настоящее время появились новые требования к математическим методам исследования турбулентной диффузии. Возникла необходимость изучения турбулентных потоков на больших высотах, рассеивания примесей от источников на больших расстояниях, учета большого числа параметров. Толщина слоя воздуха, в котором происходит рассеяние примеси от промышленного предприятия, может быть весьма значительной, особенно в

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты р2003юг № 03-01-96519, 03-01-96587, 03-05-96630.

случаях мощных источников с высотой труб 200...300 м, выбросы от которых распространяются на большие расстояния. В таком слое изменения скорости ветра и составляющих коэффициента обмена имеют сложный характер. Необходимо принять их реальное распределение по всему слою распространения примеси.

В границах приземного слоя скорость и температура являются логарифмическими функциями высоты, а коэффициент турбулентного обмена возрастает пропорционально высоте. Выше приземного слоя под влиянием силы Кориолиса и изменения напряжения трения с высотой профиль скорости ветра отличается от логарифмического, наблюдается поворот ветра, особенно в дневное время [2]. Предложенные полуэмпирические зависимости имеют ошибку порядка 25 % [2, 3].

Проблемы, связанные с неоднородностью атмосферы по высоте, приводят к необходимости создания моделей, которые при описании рассеивания примесей будут представлять атмосферу как среду, состоящую из нескольких слоев, в каждом из которых физические параметры изменяются незначительно и приближенно могут считаться величинами постоянными. Это позволяет при постановке задач использовать уравнение с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим случай распространения аэрозольной субстанции в атмосферном слое, поделенном по высоте на Nподслоев. Для каждого подслоя характерны свои значения ветровых потоков и коэффициентов турбулентной диффузии. Учитываются процессы переноса, турбулентного перемешивания, гравитационного оседания, естественного разложения аэрозольной субстанции.

Источник аэрозольной субстанции постоянной мощности находится в произвольной точке i-го слоя с координатами (x_0, y_0, z_0). Процесс считаем установившимся во времени, толщины слоев h_i — $(i = 1, 2, ..., N)$ не равными между собой и источник выброса расположенным в произвольной точке i-го слоя.

Перенос аэрозольной субстанции в этом случае описывается дифференциальным уравнением

$$u_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + v_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + (w_n - w_{gn}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} + \sigma_0 \varphi_n - \nu_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} -$$

$$-\mu_n \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right) = \delta_{ni} C \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0). \qquad (1)$$

Здесь $\varphi_n(x, y, z)$ — функция концентрации загрязняющего вещества в n-м слое; u_n, v_n, w_n — компоненты вектора скорости в направлениях x, y, z для n-го слоя; w_{gn} — абсолютная величина вертикальной скорости под действием силы тяжести в n-м слое; σ_0 — коэффициент поглощения; ν_n, μ_n — коэффициенты диффузии в вертикальном и горизонтальном направлениях для n-го слоя; $\delta_{ni} = \begin{cases} 1, & n = i \\ 0, & n \neq i \end{cases}$ показывает, что точечный источник находится в i-м слое; $n = 1, 2, \ldots, N$ — номер слоя; C — постоянная, характеризующая мощность источника выброса загрязняющих веществ.

Граничные условия:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \lambda \varphi_1 = q_1, \ z = 0; \ \varphi_N = q_2, \ z = h_N, \qquad (2)$$

где q_1 — мощность некоторого площадного источника, в общем случае зависящая от координат; q_2 — концентрация на верхней границе слоя, как правило, близкая к нулю.

В граничных условиях предполагается, что на поверхности $z = 0$ имеют место частичное поглощение и частичное отражение аэрозольной субстанции, интенсивность процесса взаимодействия с подстилающей поверхностью определяется эмпирическим коэффициентом λ. На верхней границе слоя $z = h_N$ концентрация тяжелых аэрозольных субстанций должна быть близка к нулю.

Введение стратификации фактически предполагает введение поверхности разрыва. Поэтому необходимо выписать условия на поверхностях разрыва, которые далее будем называть условиями сопряжения. Условия сопряжения на границах слоев выражаются в равенстве значений концентрации и скорости изменения концентрации на границе двух соседних слоев:

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_{i-1}, \\ \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z} = \dfrac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial z}, \end{cases} \quad i = 2, 3, \ldots, N-1, z = h_{i-1}\ . \tag{3}$$

Постановка задачи (1)–(3) является достаточно общей. Варьируя различные физические данные, можно получить конкретные задачи для случаев оседания тяжелой примеси от точечного источника распространения примеси, от площадного поверхностного источника (лесные пожары), некоторые виды задач для легкой примеси (в этом случае $q_2 \neq 0$).

Метод, используемый в данной работе, состоит в применении интегральных преобразований с последующим численным анализом полученных соотношений [4]. Определенные удобства, предоставляемые методом интегральных преобразований, состоят в возможности формулирования смешанных краевых задач в терминах интегральных уравнений. Это позволяет аналитически построить образ Фурье решения исходной задачи.

Применение к исходному уравнению, граничным условиям и условиям сопряжения двумерного преобразования Фурье позволяет свести уравнение в частных производных к обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_n}{dz^2} - \frac{w_n - w_g}{\nu_n}\frac{d\bar{\varphi}_n}{dz} - \frac{1}{\nu_n}\big[-i(\alpha u_n + \beta v_n) + \mu_n(\alpha^2 + \beta^2) + \sigma_0\big]\bar{\varphi}_n =$$

$$= -\delta_{ni}\frac{C}{\nu_n}\exp(i(\alpha x_0 + \beta y_0))\delta(z - z_0). \tag{4}$$

Граничные условия принимают вид

$$\frac{d\bar{\varphi}_1}{dz} - \lambda_1\bar{\varphi}_1 = q_1,\ z = 0,\ \bar{\varphi}_N = q_2,\ z = h_N. \tag{5}$$

Условия сопряжения

$$z = h_{i-1}, \frac{d\bar{\varphi}_i}{dz} = \frac{d\bar{\varphi}_{i-1}}{dz},\ \bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}_{i-1}. \tag{6}$$

Затем к полученному решению в образах применяется обратное преобразование Фурье

$$\varphi_n(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{\varphi}_n(\alpha, \beta, z)e^{-i(\alpha x + \beta y)}d\alpha d\beta \tag{7}$$

и решение исходной задачи получается в результате численного обращения интеграла (7).

Уравнение (4) в i-м слое неоднородно, при $n \neq i$ — однородно. Его решение может быть получено с использованием метода разрывных решений, специально приспособленного для исследования подобных задач.

Разобьем i-й слой на два подслоя плоскостью, проходящей через точку z_0 параллельно границе. Число слоев соответственно увеличивается на единицу. Тогда уравнение (4) будет однородным для любых точек $z \neq z_0$. Можно записать решение для каждого подслоя и сшить два полученных решения на границе раздела таким образом, чтобы полученное решение удовлетворяло исходному неоднородному уравнению за счет постоянных:

$$\bar{\varphi}_i^+(z_0) = \bar{\varphi}_i^-(z_0),\ 2\Big\{\big[\bar{\varphi}_i^+(z_0)\big]' - \big[\bar{\varphi}_i^-(z_0)\big]'\Big\} = -F(\alpha,\beta), \tag{8}$$

где $F(\alpha,\beta) = C\nu^{-1}\exp(i(\alpha x_0 + \beta y_0))$.

Выпишем решения для каждого из подслоев:

$$\bar{\varphi}_n(z) = c_{n1}e^{(\sigma_n-\theta_n)z} + c_{n2}e^{(\sigma_n+\theta_n)z},\ n = 1,\ldots,N, n \neq i,$$

$$\bar{\varphi}_i^-(z) = b_{i1}e^{(\sigma_i-\theta_i)z} + b_{i2}e^{(\sigma_i+\theta_i)z},\ \bar{\varphi}_i^+(z) = b_{i3}e^{(\sigma_i-\theta_i)z} + b_{i4}e^{(\sigma_i+\theta_i)z},\ n = i. \tag{9}$$

Здесь

$$\theta_n = -0.5\nu_n^{-1}\left((w_n - w_{gn})^2 + 4\nu\big[\mu_n(\alpha^2+\beta^2) + i(\alpha u_n + \beta v_n) + \sigma_0\big]\right)^{0.5}$$

и $\sigma_n = 0.5\nu_n^{-1}(w_n - w_{gn})$ являются своими для каждого слоя.

Для нахождения фурье-образа решения задачи определяем постоянные коэффициенты $c_{nk},\ b_{nk}$, удовлетворяя условиям (5), (6) и (8). В случае N слоев имеем $2(N+1)$ коэффициентов и соответственно $2(N+1)$ уравнений.

Структура полученной системы достаточно проста и решается любым известным методом. Полученные после решения системы коэффициенты подставляются в формулы (9) для фурье-образов. Решения исходной задачи находятся путем численного обращения интеграла (7).

Разработанный механизм позволяет получить образ решения для любого количества слоев в атмосфере, максимально приближаясь к реальным характеристикам распределения скоростей воздушного потока по высоте [5].

Изучение акваторий океана и морей с помощью малоинерционных зондирующих устройств показало, что вертикальные профили температуры, солености, скорости звука характеризуются тонкослойной стратификацией с квазиоднородными слоями толщиной до десятков метров. Вертикальные профили скоростей течений и плотности воды также обладают заметной ступенчатой структурой [6]. Это позволяет применить к задаче о распространении примесей в водной среде изложенную методику для получения решения.

Список литературы

[1] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982.

[2] Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1984.

[3] Вайсблат Г.В., Петрова Е.К., Иванов Е.Н. О связи коэффициента турбулентности в пограничном слое атмосферы с некоторыми метеорологическими параметрами // Вопросы климатологии и загрязнения атмосферы. М.: Гидрометеоиздат, 1980.

[4] Бабешко В.А., Гладской И.Б., Зарецкая М.В., Косообуцкая Е.В. К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 6. С. 835–838.

[5] Бабешко В.А., Гладской И.Б., Зарецкая М.В., Косообуцкая Е.В. Моделирование распространения загрязняющих веществ в трехслойной атмосфере // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки, 1999. № 4. С. 110–112.

[6] Монин А.С., Федоров К.Н., Шевцов В.П. О вертикальной мезо- и микроструктуре океанических течений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 208, № 4. С. 833–836.

Поступила в редакцию 25 марта 2003 г.,
в переработанном виде — 26 мая 2003 г.