

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД, ОСЛАБЛЕННОГО КВАДРАТНОЙ ВЫРАБОТКОЙ*

В. Д. КУРГУЗОВ

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирск, Россия*

e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru

A stress-strain state near a horizontal square-section development has been investigated by the finite-element method. The distribution of principal stresses has been obtained in the vicinity of the corner point, where the stress field has an integrable singularity. It has been found that tensile stresses, which occur at the top of the development, often disintegrate rocks, since the latter possess poor resistance to tension.

Введение

Исследование напряженно-деформированного состояния вокруг подземных горизонтальных выработок и в связи с этим определение давления горных пород, действующего на крепь, является одной из основных задач практики горного дела [1]. Сложность данной задачи объясняется разнообразием свойств горных пород, условиями проведения и залегания самих выработок, геометрией выработки и пр. В [2] методами теории функций комплексного переменного исследуется деформирование массива пород, моделируемого полуплоскостью, ослабленной круговым отверстием, с учетом сил тяжести. В [3] методом конечных элементов исследуются плоская деформация и концентрация напряжений вокруг круговой выработки глубокого залегания в однородном изотропном горном массиве при различных значениях коэффициента бокового давления. В настоящей работе рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния в окрестности выработки квадратного поперечного сечения. Для расчета напряженно-деформированного состояния применяется метод конечных элементов, причем используются треугольные конечные элементы второго порядка аппроксимации. Применение таких элементов позволяет повысить точность определения напряжений в окрестности угловых точек, когда поле напряжений имеет интегрируемую особенность.

В угловых точках полигональных отверстий наблюдается, как известно, концентрация напряжений. Для решения указанных задач применяются методы конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов с различными модификациями, целью которых является получение как можно более точного описания распределения напряжений

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-00873, и Президента РФ, грант № НШ-319.2003.1.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2003.

в окрестности угловой точки, например, использование конечного элемента с сингулярностью [4].

Для линейной трещины в упругом поле количественной мерой особенности является коэффициент интенсивности напряжений, который исчерпывающим образом характеризует поле напряжений вблизи вершины трещины. Зная коэффициент интенсивности напряжений, можно сказать, является ли данное состояние тела (включающего в основном упругий материал) критическим. Задача определения коэффициента интенсивности напряжений для малых трещин в телах конечных размеров хорошо изучена. Для углового выреза все значительно сложнее: коэффициент сингулярности зависит от угла раскрытия выреза и только в пределе совпадает с коэффициентом интенсивности напряжений, когда угловой вырез переходит в двусторонний разрез (трещину). В случае сложного напряженного состояния для углового выреза поле напряжений имеет две сингулярные составляющие, поэтому остается открытым вопрос, что же понимать под коэффициентом интенсивности напряжений в данном случае? Ситуация усугубляется еще и тем, что коэффициенты сингулярности не являются константами материала, так как зависят от угла раскрытия, следовательно, не могут быть определены экспериментально. В любом случае для разработки критерия хрупкой прочности необходимо получить как можно более точное описание полей напряжений в окрестности углового выреза.

Цель данной работы — показать возможность применения элементов высокого порядка аппроксимации для выделения сингулярной составляющей напряженно-деформированного состояния в окрестности углового концентратора.

1. Постановка задачи

В массиве горных пород со средним удельным весом γ вертикальная составляющая горного давления на глубине h равна γh , а горизонтальная — $\alpha\gamma h$, где α — коэффициент бокового давления, т. е. $-\sigma_y = \gamma h$, $-\sigma_x = \alpha\gamma h$, $0.25 \leq \alpha \leq 2.0$. Расчетную схему механической модели работы горного массива с горизонтальной квадратной выработкой выберем, следуя рекомендациям, изложенным в монографии [5]. Весомую среду с отверстием будем моделировать при помощи невесомой среды, для которой на бесконечности заданы усилия γh , создающие эквивалентное состояние у выработки (рис. 1). Исследуется случай плоской деформации. Данная схема дает удовлетворительные результаты для выработок, залегающих на достаточно большой глубине от поверхности, точнее, при $h/r \geq 50$ (r — радиус выработки).

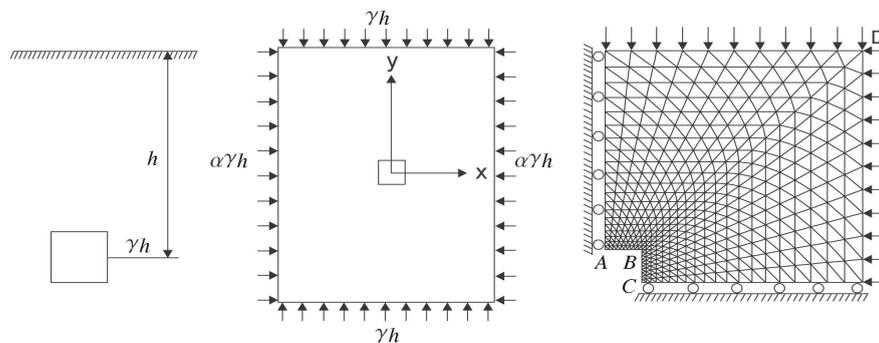


Рис. 1. Расчетная схема.

2. Метод решения

Для решения поставленной задачи будем использовать метод конечных элементов, который получил наибольшее применение в практике инженерных расчетов. Наглядность, простота математического аппарата, гибкость сделали его популярным инструментом расчетчиков. Следуя [4], введем в рассмотрение шестиузловой треугольный элемент с прямолинейными границами второго порядка аппроксимации.

Пусть перемещения любой точки внутри элемента задаются вектор-столбцом

$$\mathbf{f} = \mathbf{N}\boldsymbol{\delta}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_4 & \mathbf{N}_5 & \mathbf{N}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где компоненты \mathbf{N} являются в общем случае функциями положения, а $\boldsymbol{\delta}^e$ представляют собой перемещения узловых точек рассматриваемого элемента.

В случае плоской деформации вектор-столбец

$$\mathbf{f} = [u(x, y) \quad v(x, y)]^T$$

содержит горизонтальное и вертикальное перемещения типичной точки внутри элемента, а столбец

$$\boldsymbol{\delta} = [u_i \quad v_i]^T$$

содержит соответствующие перемещения узла i .

Функции формы N_i ($i = 1, \dots, 6$) должны быть выбраны таким образом, чтобы при подстановке в (1) координат узлов получались соответствующие узловые перемещения. Очевидно, что в общем случае $N_i(x_i, y_i) = 1$, тогда как $N_i(x_j, y_j) = 0$ при $i \neq j$. Для шестиузловой треугольной элемента второго порядка аппроксимации функции формы N_i имеют вид

$$\begin{aligned} N_1 &= 2L_1^2 - L_1, & N_4 &= 4L_2L_3, \\ N_2 &= 2L_2^2 - L_2, & N_5 &= 4L_1L_3, \\ N_3 &= 2L_3^2 - L_3, & N_6 &= 4L_1L_2, \end{aligned}$$

где L_1, L_2, L_3 — L -координаты треугольника.

Если известны перемещения во всех точках элемента, то в них можно определить также и деформации. Они находятся с помощью соотношения, которое в матричной форме может быть записано как

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e. \quad (2)$$

В случае плоской деформации представляют интерес деформации в плоскости, которые определяются через перемещения с помощью хорошо известных соотношений

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Матрица \mathbf{B} легко может быть получена из соотношения (1), если известны функции формы N_i ($i = 1, \dots, 6$).

В предположении упругого поведения соотношения между напряжениями и деформациями будут линейными:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

где \mathbf{D} — матрица упругости, содержащая характеристики материала; $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]^T$.

Пусть столбец

$$\mathbf{F}^e = [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2 \ \mathbf{F}_3 \ \mathbf{F}_4 \ \mathbf{F}_5 \ \mathbf{F}_6]^T$$

определяет узловые силы, которые статически эквивалентны граничным напряжениям и действующим на элемент распределенным нагрузкам. Каждая из сил \mathbf{F}_i должна иметь столько же компонент, сколько и соответствующее узловое перемещение δ_i , и действовать в соответствующем направлении. Распределенные нагрузки \mathbf{p} определяются как нагрузки, приходящиеся на единицу объема материала элемента и действующие в направлениях, соответствующих направлениям перемещений \mathbf{f} в этой точке. В частном случае плоской деформации узловые силы записываются в виде

$$\mathbf{F}_i = [U_i \ V_i]^T,$$

где U и V — компоненты, отвечающие перемещениям u и v . Распределенная нагрузка имеет вид

$$\mathbf{p} = [X \ Y]^T,$$

где X и Y — компоненты объемных сил.

Простейший способ сделать узловые силы статически эквивалентными действующим граничным напряжениям и распределенным нагрузкам состоит в задании произвольного (виртуального) узлового перемещения и приравнении внешней и внутренней работ, совершаемых различными силами и напряжениями на этом перемещении.

Пусть $d\delta^e$ — виртуальное перемещение в узле. С помощью соотношений (1) и (2) получим соответственно перемещения и деформации в виде $d\mathbf{f} = \mathbf{N}d\delta^e$ и $d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}d\delta^e$. Работа, совершаемая узловыми силами, равна сумме произведений компонент каждой силы на соответствующие перемещения, т. е. в матричном виде $d\delta^{eT} \cdot \mathbf{F}^e$. Аналогично внутренняя работа напряжений и распределенных сил, приходящихся на единицу объема, равна $d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - d\mathbf{f}^T \mathbf{p}$ или $d\delta^{eT}(\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{p})$.

Приравнявая работу внешних сил суммарной внутренней работе, получаемой интегрированием по объему элемента, имеем

$$d\delta^{eT} \mathbf{F}^e = d\delta^{eT} \left(\int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV \right).$$

Так как это соотношение справедливо для любого виртуального перемещения, коэффициенты в правой и левой частях должны быть равны. После подстановки (2) и (3) получаем

$$\mathbf{F}^e = \left(\int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \boldsymbol{\delta}^e - \int \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV.$$

Эта зависимость является одной из основных характеристик любого элемента. Матрица жесткости принимает вид

$$\mathbf{K}^e = \int \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV.$$

а узловые силы, обусловленные распределенными нагрузками, выражаются так

$$\mathbf{F}_p^e = - \int \mathbf{N}^T \mathbf{p} dV.$$

Составление ансамбля и дальнейшее решение производятся с помощью простой процедуры, описанной ниже. В общем случае в узлах могут быть приложены сосредоточенные внешние силы. Тогда для сохранения равновесия в узлах следует дополнительно ввести матрицу сил $\mathbf{R} = [\mathbf{R}_1 \ \mathbf{R}_2 \ \dots \ \mathbf{R}_n]^T$.

Сделаем еще замечание по поводу элементов, соприкасающихся с границей. Если на границе заданы перемещения, то никаких затруднений не возникает. Рассмотрим, однако, случай, когда на границе задана распределенная внешняя нагрузка, скажем, нагрузка \mathbf{g} на единицу площади. Тогда в узлах граничного элемента следует приложить дополнительную нагрузку. Это просто сделать, используя принцип виртуальной работы:

$$\mathbf{F}_b^e = - \int \mathbf{N}^T \mathbf{g} dS$$

(интегрирование проводится по границе элемента). Заметим, что для того чтобы записанное выше выражение было справедливо, \mathbf{g} должно иметь такое же число компонент, как и \mathbf{f} .

После того как из решения общей системы уравнений определены узловые перемещения, из соотношений (2) и (3) могут быть найдены напряжения в любой точке элемента $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{B}\boldsymbol{\delta}^e$.

Выше принцип виртуальной работы был применен к отдельному элементу и введено понятие эквивалентной узловой силы. Для ансамбля в целом, очевидно, можно использовать подход, основанный непосредственно на представлении о равновесии. Идею описания взаимодействия элементов с помощью узловых сил математически трудно обосновать, хотя она очень привлекательна с точки зрения инженеров и допускает наглядную интерпретацию. Тем не менее нет необходимости рассматривать каждый элемент в отдельности; изложенные выше рассуждения можно непосредственно применить ко всему сплошному телу.

Можно считать, что соотношение (1) относится ко всей конструкции, т. е. что $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{N}}\boldsymbol{\delta}$, где столбец $\boldsymbol{\delta}$ содержит все узловые точки, а $\bar{\mathbf{N}}_i = \mathbf{N}_i^e$, если рассматриваемая точка принадлежит элементу e , т. е. точка i сопряжена с этим элементом. Если точка i не принадлежит рассматриваемому элементу, то $\bar{\mathbf{N}}_i = 0$.

Аналогично определяется матрица $\bar{\mathbf{V}}$. Затем принцип виртуальной работы может быть применен ко всей конструкции. Теперь нет необходимости рассматривать силы взаимодействия между элементами и внешняя работа на виртуальных перемещениях $d\boldsymbol{\delta}$ всех узлов становится равной

$$d\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{R} - \int_V d\mathbf{f}^T \mathbf{p} dV - \int_S d\mathbf{f}^T \mathbf{g} dS,$$

а внутренняя виртуальная работа принимает вид

$$\int_V d\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV,$$

где интеграл берется по всей области. После учета $d\mathbf{f} = \bar{\mathbf{N}}d\delta$, $d\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}}d\delta$, а также выражения (3) и приравнивания внутренней и внешней работ получаем

$$\mathbf{K}\delta + \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_b - \mathbf{R} = 0. \tag{4}$$

Произвольный элемент матрицы жесткости имеет вид

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_V \bar{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{D} \bar{\mathbf{B}}_j dV, \tag{5}$$

где интеграл берется по всей области. Учитывая соотношения между $\bar{\mathbf{B}}_i$ и \mathbf{B}_i , имеем $\mathbf{K}_{ij} = \sum \mathbf{K}_{ij}^e$, где оценивается вклад каждого элемента, как это описано выше. Легко показать справедливость аналогичных выражений для различных компонент сил, входящих в уравнение (4). Решение уравнения (4) дает смещения узловых точек элементов. Внутренние усилия в узлах элемента получаются умножением матрицы жесткости (5) на вектор перемещений.

3. Полученные результаты

Численные расчеты проводились при следующих значениях констант материала горной породы: модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^5$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, $\gamma = 2500$ кг/м³, $\alpha = 0.25$. Размеры выработки 2×2 м, $h = 500$ м. Сходимость метода проверялась на последовательности сгущающихся сеток, содержащих 3200, 6400, 8122 элемента, использовались как квадратичные треугольные элементы, так и четырехугольные элементы с кубической аппроксимацией. Результаты, представленные на рис. 2–7, получены на сетке, содержащей 8122 шестнадцатиузловых четырехугольных элементов и 73 555 узлов.

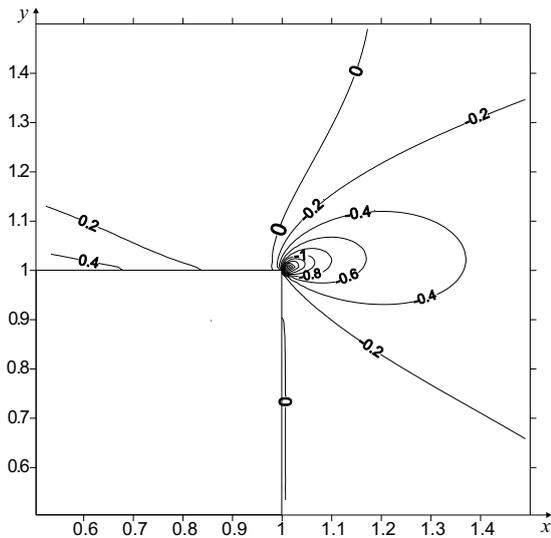


Рис. 2. Изолинии наибольшего главного напряжения σ_1 .

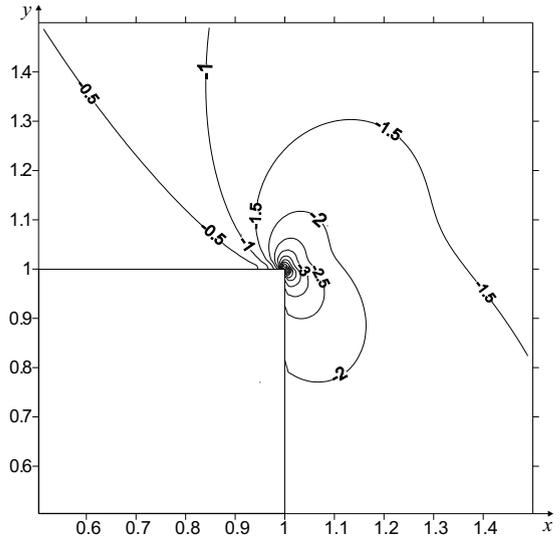


Рис. 3. Изолинии наименьшего главного напряжения σ_2 .

На рис. 2–4 показаны изолинии наибольшего главного напряжения σ_1 , наименьшего главного напряжения σ_2 и наибольшего касательного напряжения τ_{\max} в окрестности угла (точка B).

В угловых точках, как известно, имеет место концентрация напряжений, поэтому при решении такого рода задач важное значение приобретает удачный выбор конечно-элементной аппроксимации. Разбиение на недостаточно мелкие конечные элементы приводит к значительному отклонению приближенного решения от точного на контуре выработки. Поэтому необходимо сгущать сетку в областях высоких градиентов напряжений. Степень приближенности решения методом конечных элементов оценивалась путем сопоставления с точным решением для изотропной пластины с круговым отверстием [6]. Максимальное отклонение приближенного решения от точного не превышало 6 %.

Анализ представленных на рис. 2–4 результатов обнаруживает в окрестности точки B область концентрации напряжений, которая представляет опасную зону, где породы подвергаются сжатиям, которые могут превзойти предел прочности. По мере углубления в массив эта концентрация быстро снижается, и уже на расстояниях порядка двух диаметров выработки отклонения σ_1 , σ_2 , τ_{\max} от начального напряженного состояния не превышают 15 %. Особенно следует отметить появление на кровле выработки (линия AB) растягивающих напряжений, которые нередко вызывают нарушение сплошности пород, поскольку последние плохо сопротивляются растяжению.

На рис. 5–7 приведены эпюры главных напряжений на линиях AB , BC и BD соответственно. Заметим, что распределение напряжений на контуре квадратной выработки существенно отличается от аналогичного для круговой выработки, приведенного в работах [2, 3]. Наибольшее главное напряжение σ_1 имеет положительный максимум в точке $x = 0.95$, затем резко падает до отрицательных значений при приближении к точке B (рис. 5). Такой же максимум наблюдается и на линии BC (рис. 6). На линии BD , наклоненной к оси Ox под углом 45° , почти линейное распределение главных напряжений

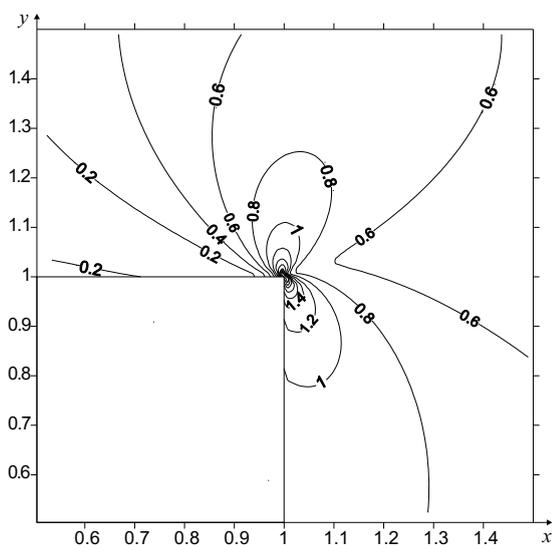


Рис. 4. Изолинии наибольшего касательного напряжения τ_{\max} .

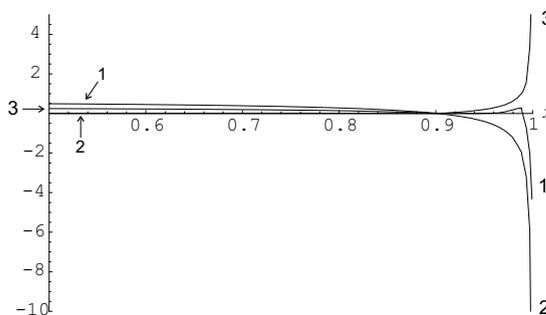


Рис. 5. Распределение напряжений на линии AB : кривая 1 — σ_1 ; кривая 2 — σ_2 ; кривая 3 — τ_{\max} .

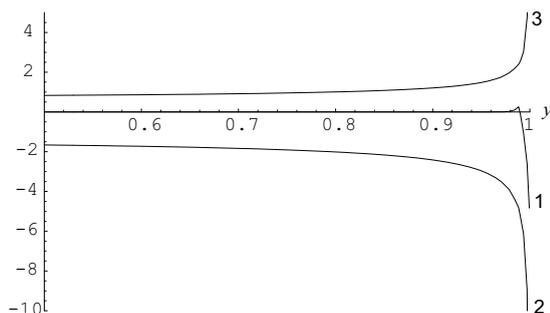


Рис. 6. Распределение напряжений на линии BC : кривая 1 — σ_1 ; кривая 2 — σ_2 ; кривая 3 — τ_{\max} .

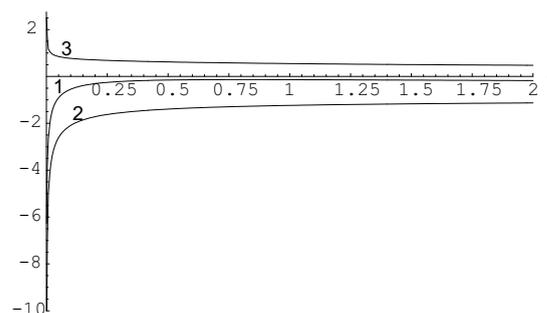


Рис. 7. Распределение напряжений на линии BD : кривая 1 — σ_1 ; кривая 2 — σ_2 ; кривая 3 — τ_{\max} .

меняется резким возрастанием сжимающих напряжений вблизи угловой точки B . Полученное распределение напряжений хорошо согласуется с решением, найденным в [7] аналитическими методами для выработки квадратного поперечного сечения с закругленными углами, за исключением окрестности угловой точки. Таким образом, увеличение кривизны контура выработки по сравнению с круговым контуром увеличивает концентрацию контурных напряжений. Изменение формы поперечного сечения выработки влияет только на распределение контурных напряжений, так как концентрация напряжений независимо от природы концентраторов охватывает небольшую область приконтурного массива и быстро затухает при удалении от контура вглубь массива. Очевидно, наиболее прочной в заданных горно-геологических условиях будет выработка с контуром, обеспечивающим постоянство контурных напряжений.

Прочностные свойства неразрушенной породы описываются огибающей кругов Мора. Особенностью теории прочности Мора является то, что она описывает разрушение в результате как сдвига, так и отрыва. В справочнике [8] приведены данные по прочностным и деформативным свойствам 48 разновидностей горных пород в широком диапазоне давлений и видов напряженных состояний. Напряжения на рис. 2–7 представлены в безразмерном виде (в единицах γh). Варьируя параметр h , можно получать распределение напряжений около выработки произвольной глубины заложения, а, пользуясь, например, справочником [8], оценивать возможность разрушения в любой точке породного массива.

В отличие от теории прочности Мора, дискретно-интегральный критерий Нейбера — Новожилова [9, 10] учитывает структуру материала в вершине углового выреза и позволяет описать разрушение трещиноватых тел с иерархией структур. При построении дискретно-интегральных критериев используются понятия классической механики разрушения (механики деформируемого твердого тела) и физики твердого тела, связанные со структурой материала. Реальная трещина не является двусторонним разрезом, а может представлять собой угловой вырез, угол раскрытия которого определяется способом получения трещины. Особенности возникающих задач механики разрушения для тел с остроугольными вырезами отмечены в работах Н. Ф. Морозова [11, 12]: поле напряжений в окрестности углового выреза состоит из регулярной и сингулярной составляющих, причем коэффициент сингулярности зависит от угла раскрытия выреза. Для случая антиплоской деформации коэффициент интенсивности напряжений при модифицированном коэффициенте сингулярности получен в [13].

Заключение

Проблемы прочности и разрушения являются центральными в современной механике. Особую актуальность приобрела проблема разработки достаточно простого критерия хрупкой прочности, так как критерий Ирвина — Гриффитса успешно работает при расчете трещин, но приводит к несообразностям в случае угловых вырезов и включений. Введенный В. В. Новожиловым критерий решает указанную проблему, однако остаются невыясненными ряд аспектов, например, в задаче об угловом вырезе на границе двух сред. Возникает необходимость объединения континуального и дискретного подходов, так как макроскопическая теория не способна описать то, что происходит в зоне разрушения. Реальная трещина уже не является разрезом, а представляет собой угловой вырез, поэтому возникает задача определения напряженно-деформированного состояния в окрестности клиновидного надреза. Подобные задачи являются типичными в механике горных пород, так как проектные сечения (прямоугольные, трапециевидные, сводчатые, шалашеобразные и др.) многих выработок существенно отличаются от кругового. Для описания разрушения в окрестности углового выреза необходимо выделение сингулярной составляющей поля напряжений, что в случае сложного напряженного состояния требует применения численных методов.

Список литературы

- [1] ЕРШОВ Л.В., МАКСИМОВ В.А. Введение в механику горных пород. М.: Недра, 1976. 211 с.
- [2] КУРЛЕНЯ М.В., МИРЕНКОВ В.Е., ШУТОВ А.В. Оценка влияния собственного веса пород на деформирование их около выработок // ФТПРПИ. 2000. № 5. С. 30–35.
- [3] HÜLS W. Die Anwendung der finite-element-methode zur lozung geomechanisher antgaben // Bergakademia. 1969. Heft 10. P. 600–604.
- [4] ВАННЕ К.-J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis // Englewood Cliffs. N. J.: Prentice-Hall, 1982. 680 p.
- [5] БАКЛАШОВ И.В., КАРТОЗИЯ Б.А. Механика горных пород. М.: Недра, 1975. 271 с.
- [6] САВИН Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 214 с.
- [7] БАКЛАШОВ И.В., РУППЕНЕЙТ К.В. Прочность незакрепленных горных выработок. М.: Недра, 1965. 104 с.
- [8] КАТАЛОГ механических свойств горных пород / ВНИМИ. Л., 1972. 268 с.
- [9] НЕЙБЕР Г. Концентрация напряжений. М.: Гостехтеоретиздат, 1947.
- [10] НОВОЖИЛОВ В.В. О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикладная математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.

- [11] МОРОЗОВ Н.Ф. Проблемы хрупкого разрушения и их исследование методами теории упругости // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3: Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 54–63.
- [12] МОРОЗОВ Н.Ф., СЕМЕНОВ Б.Н. Применение критерия хрупкого разрушения В.В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 122–126.
- [13] КОРНЕВ В.М. Модификация критерия разрушения Нейбера — Новожилова для угловых вырезов (антиплоская задача) // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 153–159.

*Поступила в редакцию 5 апреля 2002 г.,
в переработанном виде — 21 мая 2003 г.*