

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА, ФОРМИРУЮЩИХ РАЗМЫВ ДНА И БЕРЕГОВ РЕК В ПАВОДОК\*

Д. И. ЛЕОНТЬЕВ, О. Н. МЕЛЬНИКОВА  
Р. В. СУЛАКОВ, В. А. ТРОФИМОВ

*Московский государственный университет, Россия*

Работа посвящена численному моделированию волн на поверхности потока переменной глубины, скорость которого меняется вдоль по течению. Моделирование проводилось методом фиктивных областей в сочетании с методом суммарной аппроксимации. Методика расчета проверялась путем сопоставления результатов численного решения линеаризованной задачи с линейными граничными условиями с известным аналитическим решением и данными лабораторного эксперимента.

## 1 Введение

В недавних экспериментальных работах [1, 2] было показано, что стационарные волны на речных потоках в основном определяют размыв дна и формирование гряд и излучин рек в паводок. Источником генерации таких волн является либо препятствие на дне потока, либо изменение его скорости вдоль по течению. Возникающая поверхностная волна движется вверх по течению с фазовой скоростью, равной скорости потока. В результате на поверхности воды возникает стационарная волна с неподвижными гребнями. Воздействие такой волны на поток заключается в торможении и ускорении течения перед гребнем стационарной волны и за ним соответственно. В области торможения происходит отрыв от дна цилиндрических вихрей с горизонтальной осью, перпендикулярной направлению потока. Вихри уносят с собой донные наносы. В результате в местах отрыва вихрей происходит размыв дна и формируется гряда, пространственная структура которой определяется длиной и крутизной волны.

Очень крутые волны, образующиеся на реках в паводок, имеют трехмерную структуру и длину, превышающую глубину потока на порядок и более [2]. Формируемые этими волнами крупные гряды, расположенные в шахматном порядке, представляют собой основной вид деформаций дна и берегов рек, возникающих в паводок. Одним из видов таких деформаций являются синусоидальные излучины, шаг которых равен длине трехмерной стационарной волны. Прогноз этих процессов требует численного моделирования

---

\* © Д. И. Леонтьев, О. Н. Мельникова, Р. В. Сулаков, В. А. Трофимов, 1997.

возбуждения стационарных волн на поверхности неравномерного потока воды. Численное моделирование генерации стационарных волн препятствиями различной формы для малых значений отношения высоты препятствия к глубине потока в последнее десятилетие предложено в ряде работ, например в [3, 4]. Моделей же возбуждения поверхностных волн в потоках переменной глубины с плоским дном пока не создавалось.

В настоящей работе впервые представлены результаты численного моделирования нестационарных волновых процессов, развивающихся на поверхности потока с плоским дном, скорость которого меняется вдоль по течению.

## 2. Постановка задачи

Рассматриваемый процесс описывается уравнением Пуассона для потенциала скорости с нелинейными граничными условиями, зависящими от времени. Для того, чтобы иметь возможность сравнения результатов численного решения задачи с известным аналитическим решением и экспериментальными данными, была решена на ЭВМ линеаризованная задача. Считая возмущения поверхности малыми и линеаризуя граничные условия, получим следующую систему уравнений, в которой переменные обезразмерены с помощью глубины потока  $h$  и скорости потока  $U$ , втекающего в область на границе  $z = 0$ :

$$\Delta\varphi = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < z < z_0,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(z, 1, t) = 0,$$

$$\text{Fr}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial t}(z, 1, t) + \xi = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(z, 0, t) = 0,$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости,  $\xi$  — отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня,  $\text{Fr} = U/\sqrt{gh}$  — число Фруда,  $z$  — горизонтальная,  $y$  — вертикальная координата. Начало координат располагается на дне потока. В начальный момент времени у свободной поверхности потока скорость течения задавалась линейной функцией продольной координаты.

Задача решалась в двух постановках. В одном случае дно потока было горизонтальным, а поверхность воды имела постоянный наклон, в другом — поверхность воды была горизонтальной, а дно потока имело наклон. Второй случай соответствует постановке аналитической работы [5]. В обоих постановках во все моменты времени на сетке контролировался объем жидкости, протекающей через поперечное сечение потока, при этом объем жидкости, исключая возмущения, отличался от такового на входе в область не более чем на 2%.

## 3. Метод решения

В отличие от известных работ (например, [6]), в которых используется разложение потенциала скорости в ряд по пространственным гармоникам и исследуется инкремент их затухания, мы решали уравнение на ЭВМ с помощью метода фиктивных областей в сочетании с методом установления и схемой переменных направлений (метод суммарной

аппроксимации). Таким образом, на каждом временном слое использовался итерационный процесс для обращения оператора Лапласа. Итерации прекращаются при достижении невязки требуемой точности  $\varepsilon$ .

Существенно, что применяемая методика может быть обобщена на случай моделирования трехмерных волн с заменой схемы переменных направлений на иную схему. В отличие от известных работ [7] для использованного нами метода не имеется сильных ограничений на соотношение шагов по пространственным координатам и итерационному параметру.

Сетка содержала 100 точек по вертикальной координате и 20 точек по горизонтальной. Точность итерационного процесса 8, составляющая 1 %, достигалась при переходе на первый временной слой за 10–15 итераций, а при счете по времени за 5 итераций.

## 4. Численные результаты

Моделирование проводилось для числа Фруда 0.4 и следующих значений безразмерного градиента скорости потока  $G = (\partial U / \partial z)(h/U)$ : 0.001, 0.002, 0.003. Длина среды составляла две глубины потока.

В численных экспериментах обнаружено развитие волновых процессов. Амплитуда волны постепенно возрастает и достигает стационарного значения, хотя остается малой величиной. Обнаружен линейный рост крутизны волны (отношение амплитуды волны к ее длине) от градиента скорости потока  $G$ . При этом длина волны примерно равна глубине потока и остается неизменной для всех значений  $G$ . Этот результат полностью соответствует аналитическому решению линейной задачи [5].

Результаты решения задачи в двух рассмотренных постановках — с горизонтальным и наклонным дном — полностью совпали. Это позволяет заключить, что источником генерации волн является изменение скорости течения по продольной координате.

Проведенное сравнение результатов численного моделирования с аналитическими результатами других авторов [5] и нашими данными лабораторных экспериментов [8] показало, что полученная длина волны соответствует дисперсионному соотношению линейной задачи. Величина крутизны волны, найденная в численном эксперименте, отличается от данных лабораторного эксперимента не более чем на 10 % для фиксированного значения  $G$ .

Таким образом, хорошее соответствие полученных результатов численного моделирования линейной задачи аналитическому решению и экспериментальным данным позволяет после необходимой модификации использовать предложенный метод для решения нелинейных как двумерных, так и трехмерных задач.

## Список литературы

- [1] MELNIKOVA O. N., PETROV V. P. Bottom ridges formed by subcritical free-surface flow. *J. Hydraulic Research*, **30**, No. 6, 1993, 745–753.
- [2] МЕЛЬНИКОВА О. Н., ПЛЕТНЕВА Е. В., РЫКУНОВ Л. Н. Физический механизм образования речных излучин. *Докл. РАН*, **324**, №6, 1992, 1179–1182.
- [3] FORBES L. K., SCHWARTZ L. W. Free surface flow over a semicircular obstruction. *J. Fluid Mech.*, **114**, 1982, 299.

- [4] KING A. S, BLOOR M. I. G. Free surface flow of a stream obstructed by an arbitrary bed topography. *Quart J. Mech. and Appl. Math.*, **43**, No. 1, 1990, 87–106.
- [5] ЛАЙТХИЛЛ ДЖ. *Волны в жидкости*. Мир, М., 1981.
- [6] MCLEAN J. V. Instability of finite-amplitude waves on the water of finite depth. *J. Fluid Mech.*, **114**, 1982, 315–330.
- [7] KATSIS C., AKYLAS T. R. On the excitation of long nonlinear water waves by moving pressure distribution. *J. Fluid Mech.*, **177**, 1987, 49–65.
- [8] ИВАНОВА И. Н., МЕЛЬНИКОВА О. Н. Нелинейные стационарные волны в открытых потоках воды, скорость которых меняется вдоль по течению. В *“Вычислительные технологии”*, ИВТ СО РАН, Новосибирск, **4**, №11, 1995, 119–126.

*Поступила в редакцию 15 сентября 1995 г.*