КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ПОДЗЕМНОГО ТРУБОПРОВОДА ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ*

О. П. Ткаченко
Вычислительный центр ДВО РАН, Россия, Хабаровск
e-mail: olegt@as.khb.ru

The kinematics of movement of the curved pipeline is studied and the formula of the connection between displacement of its wall and axis line is obtained. The complete mathematical two-dimensional model of the pipeline motion is constructed by finite wall displacements. The two-dimensional model is converted into the one-dimensional quasi-linear model, the restrictions for this conversion are derived. The test calculations are performed.

1. Общая физическая формулировка задачи

Пусть трубопровод проложен в сильно вязкой среде и имеет форму слабо изогнутой плоской кривой Г. Он заполняется стационарным потоком жидкости. После этого он начинает двигаться, так как не находится в равновесии. Требуется построить математическую модель, описывающую медленное движение осевой линии Г с учетом конечности перемещения (геометрически нелинейная задача), исследовать кинематику движения трубопровода, а также провести тестовые расчеты.

2. Кинематика движения трубопровода

Введем глобальные декартовы координаты $\{Oxyz\}$ и "начальные" лагранжевы координаты $\{Os\theta R\}$ (рис. 1) [5]. Пусть известны компоненты вектора перемещения стенки в начальной конфигурации: $\overset{o}{w}_s$, $\overset{o}{w}_\theta$, $\overset{o}{w}_R$. Требуется определить по ним новые координаты осевой линии $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$.

Определение. *Осевая линия — это линия, проходящая через геометрические места центров тяжести сечений трубы:*

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{S}\int\limits_S \mathbf{r}_\sigma d\sigma, \tag{1}$$

$d\sigma$ — элемент площади сечения, S — площадь сечения, $\mathbf{r}_\sigma$ — радиус-вектор точек сечения.

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 01-01-00375.

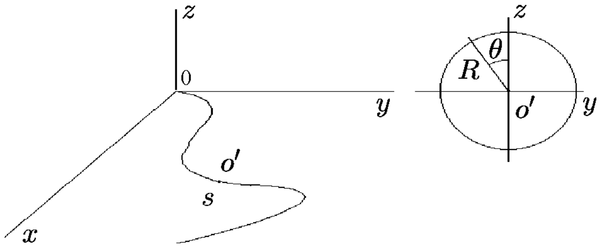

Рис. 1. Система координат.

Пусть $\mathbf{r}_o$ — радиус-вектор в начальном положении оси Γ, $\mathbf{w}$ — вектор перемещения стенки. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{w}.$$

В [1] получена формула

$$\mathbf{r}_o = \left(x_o(s) + \frac{dy_o}{ds} R\sin\theta\right)\mathbf{i} + \left(y_o(s) - \frac{dx_o}{ds} R\sin\theta\right)\mathbf{j} + R\cos\theta\,\mathbf{k}. \tag{2}$$

Если считать трубу оболочкой и принять гипотезу прямых нормалей, то компоненты вектора перемещения в координатах (s, θ, R) [1]:

$$\begin{cases} w_s = u(1 + k_1\gamma) - \dfrac{\gamma}{A}\dfrac{\partial w}{\partial s}, \\ w_\theta = v(1 + k_2\gamma) - \dfrac{\gamma}{B}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}, \\ w_R = w. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь u, v, w — компоненты перемещения срединной поверхности стенки в начальных лагранжевых координатах;

$$\gamma = R - R_o, B = R_o, k_2 = \frac{1}{R_o},\ k_1 = \frac{\sin\theta}{\rho_o + R_o\sin\theta}, \quad A = 1 + \kappa_o R_o \sin\theta.$$

После простых расчетов для радиуса-вектора осевой линии получим

$$\mathbf{r}_c = \left[x_o(s) + \frac{1}{2\pi}\frac{dx_o}{ds}\int_0^{2\pi} u\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\frac{dy_o}{ds}\int_0^{2\pi} (v\cos\theta + w\sin\theta)\,d\theta\right]\cdot\mathbf{i} + [y_o(s) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\frac{dy_o}{ds}\int_0^{2\pi} u\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\frac{dx_o}{ds}\int_0^{2\pi} (v\cos\theta + w\sin\theta)\,d\theta\Bigg]\cdot\mathbf{j} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (w\cos\theta - v\sin\theta)\,d\theta\cdot\mathbf{k}. \tag{4}$$

Получили уравнение осевой линии трубопровода в зависимости от перемещения его срединной поверхности, выраженного в “начальной” лагранжевой системе координат.

3. Связь перемещений в начальной и актуальной конфигурациях

Как показано в [2], связь физических компонент вектора перемещения оболочки в начальной и актуальной системах координат выражается формулами

$$\begin{cases} u \; = \; \dfrac{\overset{o}{u}}{A_o}\left(A - \dfrac{\partial u}{\partial s} - v\kappa\cos\theta\right) - \dfrac{\overset{o}{v}}{R_o}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} - \overset{o}{w}\, u\dfrac{\kappa\sin\theta}{A}, \\ v \; = \overset{o}{v}\left(1 - \dfrac{1}{R_o}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} - \dfrac{w}{R_o}\right) - \dfrac{\overset{o}{u}}{A_o}\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - u\kappa\cos\theta\right) - \overset{o}{w}\, \dfrac{v}{R_o}, \\ w \; = \overset{o}{w} - \dfrac{\overset{o}{u}}{A_o}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} - u\kappa\sin\theta\right) - \dfrac{\overset{o}{v}}{R_o}\left(\dfrac{\partial w}{\partial \theta} - v\right). \end{cases} \tag{5}$$

Из уравнений движения будут найдены (u, v, w), поэтому относительно неизвестных $(\overset{o}{u}, \overset{o}{v}, \overset{o}{w})$ получаются алгебраические уравнения.

Для текущего положения осевой линии Γ из (4) получим

$$\begin{cases} x(s,t) \; = \; x_o(s) + \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{dx_o}{ds}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{o}{u}\; d\theta + \dfrac{dy_o}{ds}\int_0^{2\pi} (\overset{o}{v}\; \cos\theta + \overset{o}{w}\; \sin\theta)\, d\theta\right], \\ y(s,t) \; = \; y_o(s) + \dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{dy_o}{ds}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overset{o}{u}\; d\theta - \dfrac{dx_o}{ds}\int_0^{2\pi} (\overset{o}{v}\; \cos\theta + \overset{o}{w}\; \sin\theta)\, d\theta\right], \\ z(s,t) \; = \; \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (\overset{o}{w}\; \cos\theta - \overset{o}{v}\; \sin\theta)\, d\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Текущая кривизна выражается формулой, известной из дифференциальной геометрии:

$$\kappa(s,t) \; = \; \frac{d^2 y}{ds^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}. \tag{7}$$

4. Краевые условия на внутренней и внешней поверхностях трубопровода

В [2] показано, что физические компоненты тензора напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубопровода выражаются соотношениями

$$\begin{cases} p_{sR} \; = \; 0, \\ p_{\theta R} \; = \; -\dfrac{2\mu u_1^* \cos\theta}{R_o\left(0,5 - \ln\left|\dfrac{\gamma}{4}\dfrac{\rho_{gr} u_1^*}{\mu} R_o\right|\right)}, \\ p_{RR} \; = \; -p_e \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } R = R_o + \dfrac{h}{2}, \\ p_{sR} \; = \; -\Phi_t(v_{so}), \;\; p_{\theta R} \; = \; 0, \\ p_{RR} \; = \; -p \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } R = R_o - \dfrac{h}{2}, \end{cases}$$

$$p_e = \rho_{gr} g h_o\left(1 - \frac{R_o}{h_o}\cos\theta\right) + \frac{2\mu u_2^* \sin\theta}{R_o\left(0,5 - \ln\left|\dfrac{\gamma}{4}\dfrac{\rho_{gr} u_2^*}{\mu} R_o\right|\right)}. \tag{8}$$

Здесь μ — вязкость среды, ρ_{gr} — плотность среды, γ — число Маскерони, h_o — глубина закладки трубопровода, Φ_t — плотность силы трения внутреннего потока о стенку. Формулы (8) дают краевые условия на поверхностях трубопровода, рассматриваемого как трехмерное упругое тело.

Внешнее давление p_e найдено из решения задачи обтекания бесконечного цилиндра потоком вязкой жидкости [3]. В [3] $u = u_1^* = u_2^*$ — скорость обтекания цилиндра на бесконечности. Поскольку наша постановка задачи отличается, этими результатами надо пользоваться осторожно и смысл u_1^*, u_2^* должен уточняться в соответствии с физическим смыслом задачи.

5. Уравнения движения трубопровода. Переход к оболочке

Все уравнения движения трубопровода будут записываться в актуальной системе координат. Скорость ее движения мала, и производными по времени от координатных векторов пренебрегаем. Уравнения движения упругого тела в актуальной конфигурации [4]:

$$\rho_t a^k = \rho_t F^k + \nabla_i p^{ki}, \tag{9}$$

обозначения стандартные.

Деформации в оболочке можно считать малыми, если прогиб не превышает толщины стенки h [5]. В данном случае перемещение стенки может быть намного больше h. Считать деформации малыми нам позволяет то, что картина деформирования трубопровода в рассматриваемом случае подобна изгибанию длинного стержня (рис. 2). При этом радиальный прогиб w_o, обозначающий изменение радиуса трубы, мал по сравнению с тощиной стенки. Конечно только смещение сечения трубы как целого, без деформации окружности. При таком перемещении выполнены соотношения

$$\frac{1}{R}\frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_R}{R} = 0,\ \ \frac{1}{R}\frac{\partial w_R}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{R} = 0. \tag{10}$$

Тогда можно показать, что выражения для деформаций стенки совпадают с выражениями для деформации линейной теории. Только в ε^{ss} появляется нелинейное слагаемое, пренебрежение которым означает отказ от учета влияния изгиба осевой линии трубопровода на продольное растяжение его стенки вдоль оси (Os) [5]. В нашем случае пренебрегать этим влиянием нельзя. Точные выражения для деформаций имеют вид [4]

$$\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ii}\nabla_i w^j + g^{jj}\nabla_j w^i - g^{ii}g^{jj}\sum_{k=1}^{3}\left(g_{kk}\nabla_i w^k \nabla_j w^k\right)\right), \tag{11}$$

Рис. 2. Конечные перемещения.

где w^i — контравариантные компоненты вектора перемещения, g^{ij} — компоненты метрического тензора. В (11) нет суммирования по i, j. Закон Гука имеет вид

$$p_{ii} = \lambda I + 2\mu\varepsilon_{ii}, \quad I = \varepsilon_i^i \text{ — инвариант } \widehat{\varepsilon},\ p_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, i \neq j, \quad i, j = s, \theta, R. \tag{12}$$

Выпишем физические компоненты тензора деформаций, необходимые для расчетов:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{\partial w_s}{\partial s} + w_\theta\kappa\cos\theta + w_R\kappa\sin\theta - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}}\left[\left(\frac{\partial w_\theta}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_R}{\partial s}\right)^2\right]\right],$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial w_\theta}{R\partial\theta} + \frac{w_R}{R}; \quad \varepsilon_{RR} = \frac{\partial w_R}{\partial R}; \quad \varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial w_\theta}{\partial s} + \frac{\partial w_s}{R\partial\theta} - \frac{w_s}{\sqrt{g_{11}}}\kappa\cos\theta\right). \tag{13}$$

Здесь отброшены квадраты от соотношений (10) и от производных $\partial/\partial R$. Линейные части оставлены потому, что малыми деформациями сечения пренебрегать нельзя и вычисления производились до перехода к уравнениям оболочки.

Переход от соотношений (9)–(13) к уравнениям оболочки в общих чертах описан в [1], и подробно изложен в [6].

Перейдем к уравнениям движения оболочки, которые записываются относительно компонент вектора перемещения срединной поверхности стенки (3) (но в актуальной системе координат). Переходя к безразмерным переменным $\zeta = s/\ell$, $\tau = \omega t$, $u' = u/R_o$, $v' = v/R_o$, $w' = w/R_o$, получим уравнения движения стенки:

$$\alpha(1 - \varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial I'}{\partial\zeta} - (1-\nu)\frac{\partial\,\mathrm{ch}'}{\partial\theta} + (1-\nu)\left[\varepsilon f u'\sin\theta - \alpha(1-\varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\right] = -\frac{1}{E^*h^*}X,$$

$$\frac{\partial I'}{\partial\theta} + (1-\nu)\alpha(1-\varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial\,\mathrm{ch}'}{\partial\zeta} + (1-\nu)\varepsilon f\sin\theta\left(v' - \frac{\partial w'}{\partial\theta}\right) = -\frac{1}{E^*h^*}Y,$$

$$-\left(1+\varepsilon f\sin\theta\right)I' + (1-\nu)\left[2\varepsilon f w'\sin\theta + \alpha(1-\varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial u'}{\partial\zeta} + \varepsilon f\frac{\partial}{\partial\theta}(v'\sin\theta)\right] -$$

$$-\frac{h^{*2}}{12}\nabla^2\left(w' + \nabla^2 w'\right) = -\frac{1}{E^*h^*}Z,$$

$$I' = \alpha(1-\varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial u'}{\partial\zeta} + \varepsilon f v'\cos\theta + \frac{\partial v'}{\partial\theta} + (1+\varepsilon f\sin\theta)w' -$$

$$-\frac{1}{2}(1-2\varepsilon f\sin\theta)\alpha^2\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

$$\mathrm{ch}' = \frac{1}{2}\left[\alpha(1-\varepsilon f\sin\theta)\frac{\partial v'}{\partial\zeta} - \varepsilon f u'\cos\theta - \frac{\partial u'}{\partial\theta}\right],$$

$$\nabla^2 = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}; E^* = \frac{E}{1-\nu^2},$$

$$\frac{1}{h^*}X = -\rho_t R_o^2\omega^2\frac{\partial^2 u'}{\partial\tau^2} + \frac{1}{h^*}\Phi_t(v_{so}),$$

$$\frac{1}{h^*}Y = -\rho_t R_o^2\omega^2\frac{\partial^2 v'}{\partial\tau^2} - \frac{1}{E^*h^*}\frac{2u_1^*\mu\cos\theta}{R_o\left(0,5 - \ln\left|\dfrac{\gamma\rho_{gr}u_1^*}{4\mu}R_o\right|\right)},$$

$$\frac{1}{h^*}Z \;=\; -\rho_t R_o^2\omega^2\frac{\partial^2 w'}{\partial\tau^2} + \frac{1}{h^*}\left(p \;-\; p_e\right). \tag{14}$$

Здесь введены обозначения: $h^* = h/R_o \ll 1$ — относительная толщина стенки; $f(\zeta,\tau) = \dfrac{\kappa(\zeta,\tau)}{\max\limits_{0<\zeta<\mathcal{L}}|\kappa_o(\zeta)|}$ — относительная кривизна оси; $\varepsilon = R_o\cdot \max\limits_{0<\zeta<\mathcal{L}}|\kappa_o(\zeta)| \ll 1$ — малый параметр; ℓ — характерный линейный размер по s; ω — характерная частота системы; $\alpha = R_0/\ell$ — безразмерный коэффициенТ. Для замыкания этих уравнений определим p, $\Phi_t(v_{so})$, а также поставим краевые условия.

В качестве краевых можно взять условия жесткого закрепления краев оболочки:

$$u' = v' = w' = \frac{\partial w'}{\partial\zeta} = 0 \qquad \text{при } \zeta = 0, \mathcal{L}. \tag{15}$$

Считая движение квазистационарным при больших временах t, воспользуемся формулой распределения давления на стенку из [1]:

$$p = p_a + \ell\beta v_{so}^2(\mathcal{L}-\zeta) + \varepsilon f\rho_f v_{so}^2\sin\theta, \tag{16}$$

где v_{so} — постоянная продольная скорость жидкости внутри трубопровода; β — коэффициент трения; p_a — атмосферное давление.

Выражение для плотности силы $\Phi_t(v_{so})$ возьмем из [1]:

$$\Phi_t(v_{so}) = \frac{\alpha}{2}\ell\beta v_{so}^2. \tag{17}$$

Для определения актуальной кривизны $\kappa(\zeta,\tau)$ надо по значениям (u,v,w) определить $(\overset{o}{u},\overset{o}{v},\overset{o}{w})$ — компоненты вектора перемещения в начальной конфигурации из уравнений (5). Затем из (6) найти текущие координаты кривой Γ и вычислить $\kappa(\zeta,\tau)$ по формуле (7).

Таким образом, краевая задача (14), (15), дополненная уравнениями (5)–(7) и формулами (16), (17), представляет собой замкнутую двумерную математическую модель медленного движения длинного трубопровода в среде с вязким трением, учитывающую конечность перемещения стенки.

Подставляя X, Y, Z, I', ch' в уравнения движения (14) и отбрасывая слагаемые $\sim\varepsilon^2$, а также члены с производными f'_ζ, получим

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u'}{\partial\theta^2} - \frac{\rho_t R_o^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2 u'}{\partial\tau^2} + + \frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta\partial\theta} + \nu\alpha\frac{\partial w'}{\partial\zeta} + \varepsilon f\sin\theta\left(\frac{1-\nu}{2}u' - \right.$$

$$\left. -2\alpha^2\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta^2} + \alpha(1-\nu)\frac{\partial w'}{\partial\zeta} - \frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta\partial\theta}\right) + \varepsilon f\cos\theta\left(\frac{3-\nu}{2}\alpha\frac{\partial v'}{\partial\zeta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial u'}{\partial\theta}\right) - \alpha^3(1-3\varepsilon f\sin\theta)\left[\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 w'}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial v'}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta^2}\right] \;=\; -\frac{1}{E^*h^*}\Phi_t(v_{so}),$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial\theta^2} - \frac{\rho_t R_o^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2 v'}{\partial\tau^2} - \frac{1}{E^*h^*}\frac{2u_1^*\mu\cos\theta}{R_o\left(0,5 - \ln\left|\dfrac{\gamma\rho_{gr}u_1^*}{4\mu}R_o\right|\right)} + \frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta\partial\theta} + \frac{\partial w'}{\partial\theta} +$$

$$+\varepsilon f\sin\theta\left(\nu\frac{\partial w'}{\partial\theta} - \nu v' - (1-\nu)\alpha^2\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta^2} - \frac{1+\nu}{2}\alpha\frac{\partial^2 u'}{\partial\zeta\partial\theta}\right) + \varepsilon f\cos\theta\left(w' + \frac{\partial v'}{\partial\theta} - \frac{3-\nu}{2}\alpha\frac{\partial u'}{\partial\zeta}\right) -$$

$$-\alpha^2(1-2\varepsilon f\sin\theta)\left(\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 w'}{\partial\zeta\partial\theta}+\frac{\partial v'}{\partial\zeta}\frac{\partial^2 v'}{\partial\zeta\partial\theta}\right)+\alpha^2\varepsilon f\cos\theta\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial\zeta}\right)^2\right]=0,$$

$$\frac{\rho_t R_o^2\omega^2}{E^*}\frac{\partial^2 w'}{\partial\tau^2}+w'+\frac{h^{*2}}{12}\left(\alpha^2\frac{\partial^2 w'}{\partial\zeta^2}+\frac{\partial^2 w'}{\partial\theta^2}+\alpha^4\frac{\partial^4 w'}{\partial\zeta^4}+2\alpha^2\frac{\partial^4 w'}{\partial\zeta^2\partial\theta^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^4 w'}{\partial\theta^4}\right)+\nu\alpha\frac{\partial u'}{\partial\zeta}+\frac{\partial v'}{\partial\theta}+\varepsilon f\sin\theta\left(2\nu w'+(1-\nu)\alpha\frac{\partial u'}{\partial\zeta}+\nu\frac{\partial v'}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\varepsilon\nu f\cos\theta\cdot v'-\frac{\alpha^2}{2}(1-\varepsilon f\sin\theta)\left[\left(\frac{\partial w'}{\partial\zeta}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial\zeta}\right)^2\right]=\frac{1}{E^*h^*}(p-p_e). \tag{18}$$

Дополнив уравнения (18) краевыми условиями (15), формулами (16), (17) и уравнениями (5)–(7), получим замкнутую математическую модель движения трубопровода. Величины u_1^*, u_2^* считаем известными функциями решения, которые будут определены позже.

6. Переход к квазиодномерной математической модели

Если в уравнениях (18) отбросить нелинейные слагаемые в квадратных скобках, то тем самым мы пренебрежем влиянием растяжения трубопровода на его поперечный изгиб. При этом численные результаты будут верны для поперечных перемещений, не превышающих диаметр трубы [7]. Качественные выводы, по-видимому, останутся правильными и для больших перемещений.

В преобразованные вышеуказанным способом уравнения (18) подставим следующие представления для решений по аналогии с [1]:

$$u'=u_0+u_1\sin\theta+u_2\cos\theta,$$

$$v'=v_0+v_1\sin\theta+v_2\cos\theta,$$

$$w'=w_0+w_1\sin\theta+w_2\cos\theta. \tag{19}$$

Эти представления являются отрезками рядов Фурье, величины u_i, v_i, w_i не зависят от θ. Как указано в [1], u_0, v_0, w_0 имеют смысл соответственно продольного перемещения, поворота и изменения радиуса сечения трубы как целого, $\frac{1}{2}(v_2+w_1)$ — поперечного смещения осевой линии в плоскости ее начального изгиба, $\frac{1}{2}(v_1+w_2)$ — смещения оси из этой плоскости. В результате подстановки (19) получим уравнения для коэффициентов Фурье:

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\zeta^2}-k_\tau\frac{\partial^2 u_0}{\partial\tau^2}+\nu\alpha\frac{\partial w_0}{\partial\zeta}+\kappa R_0\frac{1-\nu}{4}u_1+\kappa R_0\left(\frac{3-\nu}{4}\alpha\frac{\partial v_2}{\partial\zeta}+\frac{1-\nu}{2}u_1\right)+\frac{\alpha\ell\beta v_{so}^2}{2E^*h^*}=0,$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\zeta^2}-k_\tau\frac{\partial^2 v_0}{\partial\tau^2}-\frac{\nu}{2}\kappa R_0 v_1+\frac{1}{2}\kappa R_0\left(w_2+v_1-\frac{3-\nu}{2}\alpha\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}\right)=0,$$

$$k_\tau\frac{\partial^2 w_0}{\partial\tau^2}+w_0+\frac{h^{*2}}{12}\left(\alpha^2\frac{\partial^2 w_0}{\partial\zeta^2}+\alpha^4\frac{\partial^4 w_0}{\partial\zeta^4}\right)+\nu\alpha\frac{\partial u_0}{\partial\zeta}+\frac{\nu}{2}\kappa R_0 v_2=\frac{1}{E^*h^*}\left[p_a+\ell\beta v_{so}^2(\mathcal{L}-\zeta)-\rho_{gr}gh_0\right],$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} - k_\tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu}{2} u_1 - \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} + \nu\alpha \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + \kappa R_0 \frac{1-\nu}{2} u_0 = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial \zeta^2} - k_\tau \frac{\partial^2 v_2}{\partial \tau^2} - v_2 + \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + w_1 -$$

$$- \frac{1}{E^* h^*} \frac{2\mu u_1^*}{R_0 \left(0,5 - \ln \left| \frac{\gamma}{4} \frac{\rho_{gr} u_1^*}{\mu} R_0 \right| \right)} + \kappa R_0 \left(w_0 - \frac{3-\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_0}{\partial \zeta} \right) = 0,$$

$$k_\tau \frac{\partial^2 w_1}{\partial \tau^2} + w_1 + \frac{h^{*2}}{12} \left(\alpha^4 \frac{\partial^4 w_1}{\partial \zeta^4} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} \right) + \nu\alpha \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - v_2 =$$

$$= \frac{1}{E^* h^*} \left[\kappa R_0 \rho_f v_{so}^2 - \frac{2\mu u_2^*}{R_0 \left(0,5 - \ln \left| \frac{\gamma}{4} \frac{\rho_{gr} u_2^*}{\mu} R_0 \right| \right)} \right],$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \zeta^2} - k_\tau \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{1-\nu}{2} u_2 + \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \nu\alpha \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} + \kappa R_0 \frac{3-\nu}{2} \alpha \frac{\partial v_0}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - k_\tau \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} - v_1 - \frac{1+\nu}{2} \alpha \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} - w_2 - \nu\kappa R_0 v_0 = 0,$$

$$k_\tau \frac{\partial^2 w_2}{\partial \tau^2} + w_2 + \frac{h^{*2}}{12} \left(\alpha^4 \frac{\partial^4 w_2}{\partial \zeta^4} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} \right) + \nu\alpha \frac{\partial u_2}{\partial \zeta} + v_1 + \nu\kappa R_0 v_0 = \frac{\rho_{gr} g R_0}{E^* h^*}. \qquad (20)$$

Здесь $k_\tau = \dfrac{\rho_t R_0^2 \omega^2}{E^*}$. Краевые условия (15) остаются в силе.

Далее, поскольку расчет носит проверочный характер и рассматриваются перемещения, малые по сравнению с минимальным начальным радиусом кривизны оси, при вычислении текущей кривизны оси в формулах (6), (7) разницей между компонентами перемещений в начальной и актуальной системах координат можно пренебречь. В (6) тогда можно непосредственно пользоваться величинами, полученными при расчете шага времени из уравнений (19), (20). Из (6) получим

$$x = x_0 + R_0 u_0 \frac{\partial x_0}{\partial s} + \frac{R_0}{2} \frac{\partial y_0}{\partial s} (v_2 + w_1),$$

$$y = y_0 + R_0 u_0 \frac{\partial y_0}{\partial s} - \frac{R_0}{2} \frac{\partial x_0}{\partial s} (v_2 + w_1). \qquad (21)$$

Так как величина $\dfrac{1}{2}(v_2+w_1)$ имеет физический смысл нормального перемещения осевой линии в плоскости изгиба, а величины u_1^*, u_2^* должны иметь смысл скоростей перемещения, полуэмпирически положим

$$u_1^* = R_0 \frac{\partial v_2}{\partial t}, \quad u_2^* = R_0 \frac{\partial w_1}{\partial t}. \qquad (22)$$

Уравнения (20), дополненные однородными начальными и краевыми условиями (15) и соотношениями (7), (21), (22), являются упрощенной математической моделью процесса поперечного смещения подземного трубопровода. Модель применима при поперечных перемещениях, не превышающих диаметра трубы, в то время как исходные двумерные уравнения (18) применимы при произвольных перемещениях, пока выполняется закон Гука (12).

7. Результаты тестовых расчетов

Математическая модель (20) была протестирована на примере трубопровода, осевая линия которого в плоскости (xOy) описывается уравнением (рис. 3):

$$y = C_1 \frac{A_1 - B_1(x-D)^2}{A_1 + B_1(x-D)^2} + C_1,$$

где $C_1 = 10$, $A_1 = 2000$, $B_1 = 0.2$, $D = 1500$, при этом x менялось от 0 до 3000 м.

Физические и геометрические параметры теста: скорость жидкости $v_{so} = 1$ м/с, плотность жидкости $\rho_f = 800$ кг/м^3, плотность грунта $\rho_{gr} = 1700$ кг/м^3, вязкость грунта $\mu = 1000$ Па$\cdot$с$^{-1}$, плотность материала трубы $\rho_t = 7200$ кг/м^3, толщина стенки трубы $h = 0,005$ м, модуль Юнга материала трубы $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м^2, радиус трубы $R_0 = 0,3$ м, длина трубы $L = 3000$ м.

Начально-краевая задача (7), (15), (20), (21) решена явным разностным методом, расчет проводился на интервале времени 10^5 с. График смещения осевой линии $w_n = \frac{1}{2}(w_1 + v_2)$ как функции координаты s и времени t приведен на рис. 4, 5. Этот результат согласуется с работой [8], в которой исследовано движение подземного трубопровода как длинного изогнутого стержня в вязкой среде.

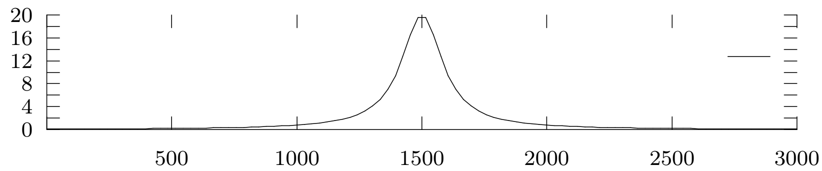

Рис. 3. Форма осевой линии трубопровода.

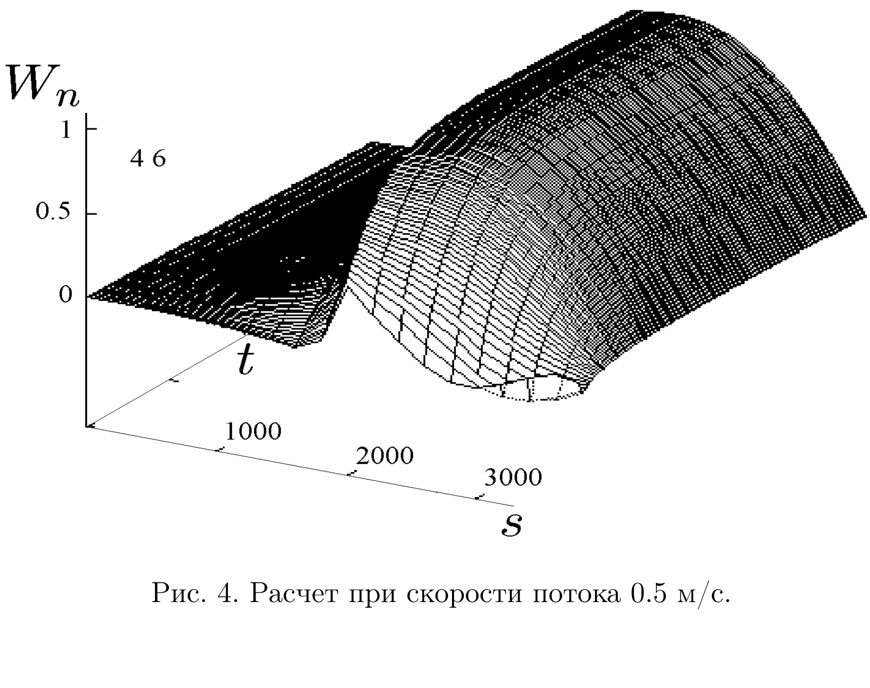

Рис. 4. Расчет при скорости потока 0.5 м/с.

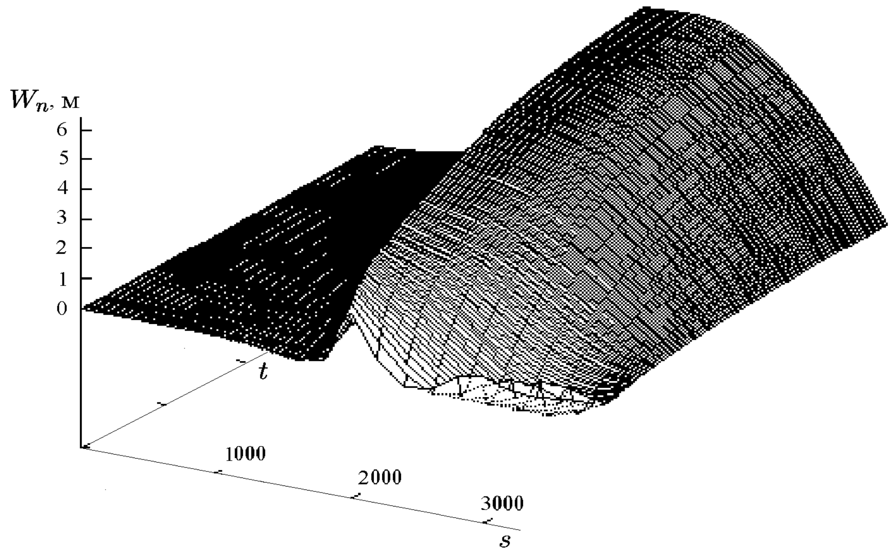

Рис. 5. Расчет при скорости потока 1 м/с.

8. Основные результаты

Исследована кинематика движения криволинейного трубопровода и дана формула связи перемещения его стенки и осевой линии. Построена замкнутая двумерная математическая модель движения трубопровода при условии конечности перемещения стенки. Полная двумерная модель редуцирована к упрощенной одномерной квазилинейной системе уравнений. Создана программа для ЭВМ поиска численного решения этой системы уравнений. Показана согласованность математической модели с известными результатами механики трубопроводов.

Список литературы

[1] Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Численное и асимптотическое решение уравнений распространения гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 6. С. 161–169.

[2] Ткаченко О.П. Нелинейные уравнения движения подземного трубопровода // Вычисл. технологии. Т. 7. Вестн. КазНУ им. Аль-Фараби. Сер. Математика, механика и информатика. № 4(32), 2002 (Совместный выпуск, ч. 4). Алматы: Изд-во КазНУ им. Аль-Фараби. 2002. С. 188–195.

[3] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, Т. 2. М.-Л., 1948.

[4] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983.

[5] Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука; Физматлит, 1997. 272 с.

[6] Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., 1962. С.15–439.

[7] Ландау Л.Д. Теория упругости. М.: Наука. Физматлит, 1987.

[8] Ткаченко О.П. Движение подземного трубопровода с учетом конечности его перемещений // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, ч. 2. Спец. выпуск: Тр. Междунар. конф. RDAMM-2001. С. 628–631.

Поступила в редакцию 6 марта 2003 г.