

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ БЕЗ УЧЕТА КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

О. Б. БОЧАРОВ

*Институт водных и экологических проблем СО РАН,
Новосибирск, Россия*

И. Г. ТЕЛЕГИН

Горно-Алтайский государственный университет, Россия
e-mail: bob@ad-sbras.nsc.ru

The classical oil-water displacement problem with given full discharge and without capillary and gravitational forces in one-dimensional case is considered (The Buckley — Leverett problem). Six explicit difference schemes are compared using this initial-boundary value problem and methods of a posteriori analysis. Two new modifications of the well-known schemes are suggested.

В настоящее время широкое распространение получили разностные схемы повышенной точности для сквозного расчета разрывных решений гиперболических уравнений. Разрабатываются новые принципы построения разностных схем и методов их анализа [1, 2]. Развиваются эти подходы, как правило, для уравнений газовой динамики, “мелкой воды” и их модельных одномерных аналогов вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

где $f(u) = 0.5u^2$ — вогнутая. Развитие численных методов подземной гидродинамики традиционно шло вслед за вышеуказанными разделами вычислительной механики с учетом той особенности, что в задачах двухфазной фильтрации $f(u)$ не является ни выпуклой, ни вогнутой. В настоящей работе сравниваются результаты применения некоторых классических разностных схем и их модификаций к решению задач фильтрации.

Одномерная модель фильтрации двухфазной жидкости в однородной изотропной пористой среде в отсутствие капиллярных и массовых сил при заданном суммарном расходе фаз $Q(t)$ (модель Баклея — Леверетта (БЛ)) имеет вид [3]

$$ms_t + Q(t)b_x = 0, \tag{1}$$

где $x \in [0, L]$ — пространственная координата; L — расстояние от нагнетательной скважины до эксплуатационной; t — время; $s = (s_1 - S_1^0)/(1 - S_1^0 - S_2^0)$ — динамическая насыщенность порового пространства смачивающей фазой, s_1 — истинная насыщенность смачивающей фазы, $(S_1^0, S_2^0) = \text{const}$ — остаточные водо- и нефтенасыщенности; $m = m_0(1 - S_1^0 - S_2^0)$,

m_0 — пористость коллектора; $b(s) = k_1/(k_1 + \mu k_2)$ — коэффициент подвижности вытесняющей фазы (функция Баклея — Леверетта), $k_i = k_i(s)$ — относительные фазовые проницаемости, $\mu = \mu_1/\mu_2$, μ_i — вязкости фаз (индекс $i = 1$ соответствует воде, $i = 2$ — нефти).

Функциональные параметры модели описаны в [3] и определяются по экспериментальным данным. Наиболее типичными свойствами функции $b(s)$ являются следующие: $b(0) = 0$, $b(1) = 1$, $b'(s) > 0$, $b'(0) = b'(1) = 0$. Существует $s_* \in (0, 1)$ такая, что $b''(s)(s_* - s) \geq 0$.

Введем безразмерные переменные: $\bar{x} = x/L$, $\bar{t} = (mL)^{-1} \int_0^t Q(t) dt$ (далее черта над безразмерными переменными опущена), при этом уравнение (1) запишется в виде

$$s_t + b_x = 0. \quad (2)$$

Для уравнения (2) будем рассматривать следующую начально-краевую задачу:

$$s|_{x=0} = 1, s|_{t=0} = s_0(x). \quad (3)$$

Введем сетку с распределенными узлами $\omega_{h\tau} = \{x_i = ih, t_n = n\tau, i = \overline{0, N}, n = 0, 1, 2, \dots\}$, $h = 1/N$ — шаг по пространственной координате; $\tau = rh$ — шаг по временной переменной, $r = \tau/h$. В численных расчетах использовались шаги сетки $h = 0.01$ и $\tau = 0.001$. В дальнейшем в разностных схемах используются обозначения, принятые в [4].

На каждом временном шаге вычисляются такие характеристики решения, как положение $x_c(t)$ — фронтовой водонасыщенности в БЛ-модели s_c , которая определяется решением нелинейного уравнения

$$\frac{\partial b}{\partial s}(s_c) \equiv b_s(s_c) = \frac{b(s_c)}{s_c}$$

с помощью метода деления пополам, $\eta(t)$ — обводненность пласта $\eta(t) = 100\% \cdot \int_0^1 s(x, t) dx$.

Интеграл в правой части уравнения вычислялся по формуле трапеций. Также контролировалась предельная точка распространения фронта водонасыщенности $x_f(t)$.

В численных расчетах использовался следующий набор параметров:

$$k_1 = s^2, k_2 = (1 - s)^2, s_0(x) = 0, \mu = 0.1.$$

При этом параметров значение фронтовой водонасыщенности s_c равно 0.30145.

В общем случае точное решение задачи построить довольно сложно. Поэтому для определения порядков сходимости применяется правило Рунге, заключающееся в том, чтобы провести несколько расчетов задачи с разными шагами пространственной сетки:

$$h_j = h/2^{j-1}, \tau_j = rh_j, j = \overline{1, k}, k = \text{const}.$$

Предполагая, что разностное решение $s_j \equiv s_{h_j}$ при $h \rightarrow 0$ в некоторой точке x_i сходится с порядком p к искомому точному решению s , получим, что $\delta s_j = s_j - s$ имеет порядок $O(h^p)$, т. е.

$$\delta s_j = s_j(x, T) - s(x, T) \approx Ch^{p(x, T)},$$

где C — ограниченный функционал, не зависящий от h ; $T = n\tau$ — некоторый момент времени. Вычитая из δs_j представление для δs_{j+1} , получим $\delta^* s_j = s_j(x, T) - s_{j+1}(x, T) \approx$

$C(h_j^p - h_{j+1}^p)$. Предполагая, что $|C| \geq \varepsilon > 0$, выпишем формулу для экспериментального определения порядков сильной локальной сходимости разностного решения [2]:

$$p_j \approx \log_2 \frac{|\delta^* s_j|}{|\delta^* s_{j+1}|}, j = \overline{1, k-2}. \quad (4)$$

При проведении расчетов на нескольких сетках ($k > 3$) можно найти осредненный порядок

$$P = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{p_j}{k-2}.$$

Аналогично вводится формула для нахождения порядков слабой локальной сходимости

$$r_j \approx \log_2 \frac{|V_j^a - V_{j+1}^a|}{|V_{j+1}^a - V_{j+2}^a|}, j = \overline{1, k-2}, \quad (5)$$

где $a \in [0, 1]$, $V_j^a(x, T) = \int_a^x \bar{s}_j(\xi, T) d\xi$ — интеграл от кусочно-линейной по x функции \bar{s}_j :

$$\bar{s}_j(x, T) = s_{ji}^n + (x - x_{ji})(s_{ji+1}^n - s_{ji}^n)/h, x \in [x_{ji}, x_{ji+1}], i = \overline{0, N-1}.$$

Осредненный порядок слабой сходимости определяется по формуле [1]

$$R = \sum_{j=1}^{k-2} \frac{r_j}{k-2}.$$

На рисунках данные по слабой сходимости показаны темными кружками, для сильной локальной сходимости — светлыми квадратами. В нижней части рисунка приводится решение, для которого рассчитывались порядки при $T = 0.3$, $k = 5$.

Отметим, что для задачи (2), (3) при $s_0(x) = 0$ легко построить точное разрывное решение, так как на момент времени t координата точки разрыва равна $x_c = b_s(s_c)t$, а для координаты x_s насыщенности $s \in [s_c, 1]$ имеем формулу $x_s(t) = b_s(s)t$. Это решение на рисунках, где приведено семейство графиков решений, отмечено тонкой линией.

Двухслойная схема с центральной разностью по пространству (ВВЦП) и ее модификация

Запишем разностную схему с аппроксимацией конвективного члена центральной разностью в следующем виде:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + b_{x,i}^n = \epsilon h f_i^n, i = \overline{1, N-1}, \quad (6)$$

где f_i^n имеет вид $(c_{i+1/2}^n b_{x,i}^n - c_{i-1/2}^n b_{x,i}^n)/h$, $c_{i+1/2}^n = c((s_i^n + s_{i+1}^n)/2)$, функция $c(s)$ выбрана следующей

$$c(s) = \begin{cases} (s - S_1)^{\alpha_1} (S_2 - s)^{\alpha_2}, & s \leq S_2, \\ 0, & s > S_2. \end{cases}$$

Первое дифференциальное приближение для схемы (6) имеет вид

$$s_t + b_x = h \left(\left(\epsilon c - \frac{\tau}{2h} b_s \right) b_x \right)_x.$$

Разностная схема (6) аппроксимирует исходное уравнение с погрешностью $O(\epsilon h + h^2 + \tau)$.

Проведены расчеты с разными параметрами, хорошие результаты получены при $S_1 = 0$, $S_2 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.1$, $\alpha_2 = 1$. При этом S_i выбирались так, чтобы $s_c \in [S_1, S_2]$.

На рис. 1 жирными линиями показано решение с использованием разностной схемы (6) при $\epsilon = 0$, пунктиром — решение при $\epsilon(h) = 10h$ (в этом случае схема имеет второй порядок аппроксимации по пространству) и тонкими линиями — точное решение.

Как видно, разностная схема (6) в отсутствие искусственной вязкости дает нефизичное численное решение с выполаживанием (образованием полки) вблизи $s = s^* = 0.5 > s_c$, также наблюдается отставание фронта $x_f(t)$. Квадратичная вязкость с $\epsilon(h)$ улучшает вид решения, но незначительно. Поэтому ϵ выбиралось в интервале $[2, 3]$, такая регуляризация схемы (6) позволяет избавиться от выполаживания и получить решение, близкое к точному (рис. 2 — пунктир). В численных экспериментах с разными значениями S_2 установлено, что с его увеличением точность определения решения падает. Так, на рис. 2 жирными линиями показаны решения при $S_2 = 0.8$, ориентировочно лучше брать S_2 не больше, чем $s_c + 0.1$.

Отметим, что явная двухслойная схема с центральной разностью ($\epsilon = 0$) для уравнений газовой динамики является абсолютно неустойчивой и не используется в численных расчетах. Относительная устойчивость этой схемы в данной задаче объясняется специфическим видом функции $b(s)$ (наличием зоны, где $b'' < 0$, при $s > s_*$), а также начальным приближением $s_0(x) = 0$. На гладких начальных данных типа $s_0(x) = (1 - x)^5$ неустойчивость схемы ярко проявляется и в задачах фильтрации мощными осцилляциями в окрестности фронта $s = s_c$.

На рис. 3 приведены порядки локальных сходимостей для схемы (6) при $\epsilon = 2$. Как видно, в окрестности фронта порядки осциллируют, что является известным фактом [2]. Немонотонный характер порядков сходимостей наблюдается и при $s \in [S_2, 0.6)$, т. е. там, где сопрягаются гиперболическое ($s_t + b_x = 0$, $c(s) = 0$, $s \in [S_2, 1)$) и параболическое ($s_t + b_x = \epsilon h(c(s)b_x)_x$, $s \in [0, S_2]$) уравнения. Особенно это заметно на рис. 4, где приведены

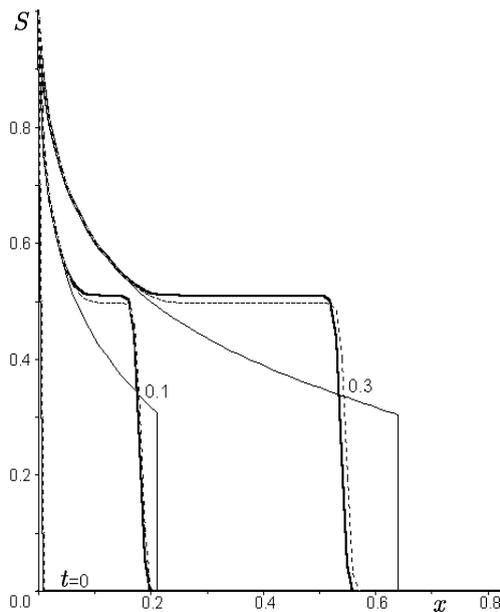


Рис. 1.

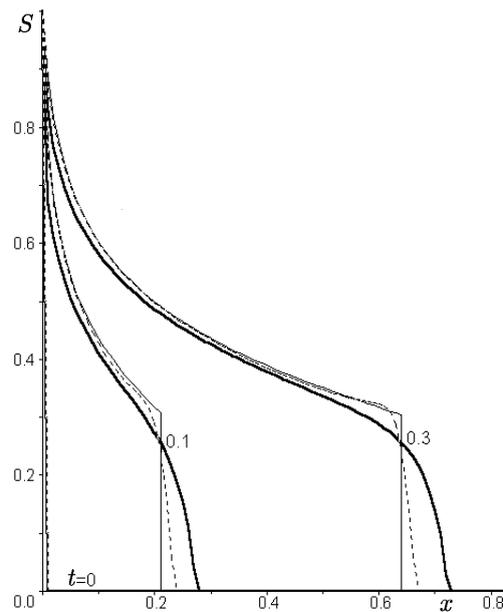


Рис. 2.

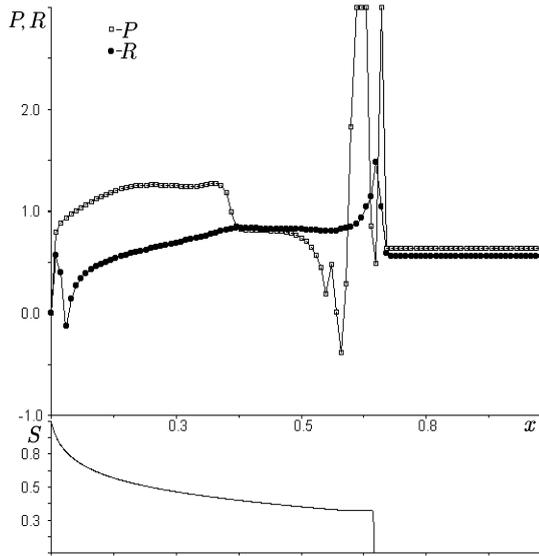


Рис. 3.

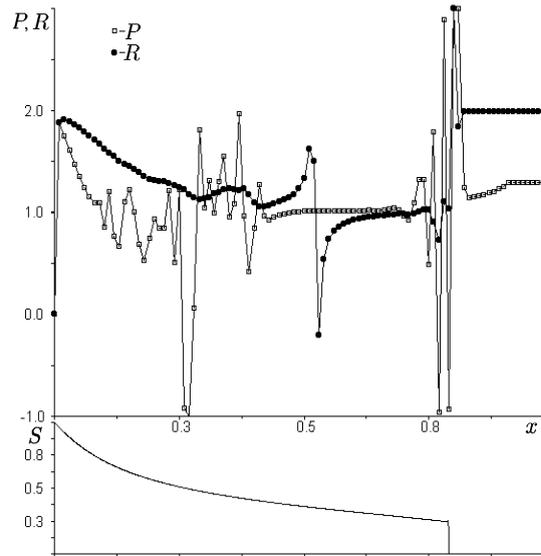


Рис. 4.

графики локальных сходимостей при $s_0(x) = (1-x)^5$, $T = 0.2$. Видно, что в среднем схема имеет первый порядок аппроксимации. Интересно отметить, что для гладких начальных данных осцилляции в порядках слабой сходимости на рис. 4 выделяют кроме разрыва еще и точку выключения регуляризатора, график порядка сильной сходимости выделяет также точку возникновения градиентной катастрофы $x \approx 0.26$. Последнее для компактных схем отмечено в [1].

Схема Лакса и ее модификация

Схема Лакса получается заменой s_i^n в схеме ВЦП на среднееарифметическое значение:

$$\frac{s_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} + b_{x,i}^n = 0, i = \overline{1, N-1}, \quad (7)$$

где $z_i^n = (s_{i+1}^n + s_{i-1}^n)/2$.

Для схемы (7) первое дифференциальное приближение имеет вид

$$s_t + b_x = \left(\frac{h^2}{2\tau} s_x - \frac{\tau}{2} b_s b_x \right)_x.$$

Эта схема аппроксимирует исходное уравнение с погрешностью $O(h^2 + h^2/\tau + \tau)$ и условно устойчива при $\tau \leq h/\max b_s$.

Аппроксимация уравнения БЛ-модели разностной схемой (7) имеет условный характер. Так, при $h/\tau = \text{const}$ аппроксимируется исходное уравнение, а при $h^2/\tau = \text{const}$ производится аппроксимация некоторого параболического уравнения $s_t + b_x = \varepsilon s_{xx}$.

Решение, полученное по схеме Лакса (жирная линия при $r = 0.1$ на рис. 5), сильно размывает скачок водонасыщенности и завышает решение, что приводит к большому дисбалансу по водосодержанию (площадь подграфика). Пунктиром отмечено решение при $r = 0.2$. Видно, что при $h/\tau = 1/r \rightarrow 0$ дисбаланс уменьшается и решение приближается к точному. То есть с уменьшением временного шага τ увеличиваются дисбаланс и расхождение с точным решением, что характерно для схем с условной аппроксимацией и является главным их недостатком: схема хороша при больших r , а устойчива при $r < b_s^{-1}$.

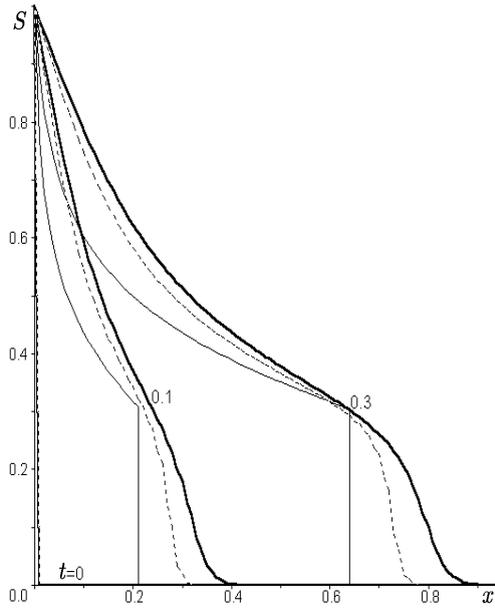


Рис. 5.

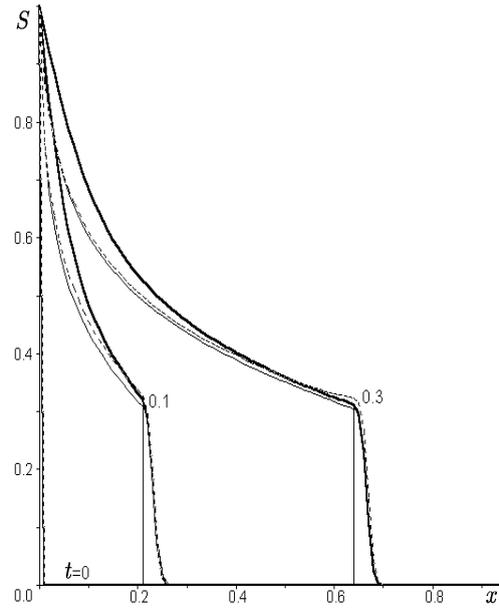


Рис. 6.

Отметим одну из возможных модификаций схемы Лакса. Для того чтобы уменьшить размазывание скачка и подъем графика вблизи $x = 0$, выберем специальное усреднение s_i^n вида

$$z_i^n = (\beta_1 s_{i-1}^n + \beta_2 s_i^n + \beta_3 s_{i+1}^n) / \beta_4, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \beta_4. \quad (8)$$

Первое дифференциальное приближение для схемы (7) с усреднением (8) имеет вид

$$s_t + b_x = -\frac{\tau}{2}(b_s b_x)_x + \frac{(\beta_3 - \beta_1)h}{\beta_4} \frac{h}{\tau} s_x + \frac{h^2(\beta_1 + \beta_3)}{2\tau \beta_4} s_{xx} + O(h^2 + \tau^2).$$

Мы можем сохранить второй порядок по h и убрать один из членов, дающих условную аппроксимацию, положив $\beta_1 = \beta_3$, тогда получим полное дифференциальное приближение вида

$$s_t + b_x = \left(\frac{h^2 \beta_1}{\tau \beta_4} s_x - \frac{\tau}{2} b_s b_x \right)_x = \varphi.$$

Для уменьшения эффекта условной аппроксимации можно выбрать $\beta_1/\beta_4 = C\tau b_s^2$, что приводит нас к схеме типа Лакса – Вендроффа

$$\varphi = \left(\left(Ch^2 - \frac{\tau}{2} \right) b_s b_x \right)_x = Ch^2 \left(\left(1 - \frac{\tau}{2Ch^2} \right) b_s b_x \right)_x,$$

недостатки которой обсуждаются ниже. Как говорилось ранее, схема Лакса хороша при больших r и плоха при малых, а отвечает за это коэффициент $C_1 = \frac{h^2 \beta_1}{r \beta_4}$. Если взять $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/r$, то получим $C_1 = h/(2r + 1)$, который имеет порядок не ниже первого равномерно по r . На рис. 6 решение по этой схеме показано жирной линией. Дальнейшие эксперименты показали, что близость численного решения к точному в зоне волны разряжения можно улучшить, если взять $\beta_1 = d(s)$, где

$$d(s) = \begin{cases} [(S_3 - s)/S_3]^\alpha, & s \leq S_3, \\ 0, & s > S_3, \end{cases}$$

S_3 выбиралось так, чтобы $S_3 > s_c$.

Тогда β_k имеют вид

$$\beta_1 = \beta_3 = d(s), \beta_2 = 1/r. \quad (9)$$

При нашем выборе параметров хорошие результаты получены при $S_3 = 0.4$, $\alpha = 0.1$.

На рис. 6 пунктиром показаны решения, полученные по схеме Лакса со специальным усреднением (8), (9). Видно, что усреднение (9) позволило уменьшить размазывание разрыва, улучшить баланс и достичь хорошей близости к точному решению. Соответствующие графики локальных сходимостей представлены на рис. 7. Схема имеет ярко выраженный первый порядок сходимости. Но следует отметить, что локальные порядки сильной и слабой сходимости ведут себя более плавно, с меньшими осцилляциями, нежели для схемы (6).

TVD-модификация схемы Лакса — Вендроффа

Если в схему ВВЦП ввести искусственную вязкость, гасящую ее схемную вязкость первого порядка, то получится одношаговый вариант схемы Лакса — Вендроффа [5]:

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + b_{x,i}^n = \frac{\tau}{2h} (b_{si+1/2}^n b_{x,i}^n - b_{si-1/2}^n b_{\bar{x},i}^n). \quad (10)$$

Схема (10) имеет погрешность аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$. К недостаткам схемы Лакса — Вендроффа следует отнести сильное выполаживание решения вблизи $s^* > s_c$, хотя баланс обводненности соблюдается неплохо, при этом имеет место отставание фронта $x_f(t)$. Для того чтобы улучшить схему (10), используют TVD-модификацию схемы Лакса — Вендроффа [6]. Представим схему в виде

$$\frac{s_i^{n+1} - s_i^n}{\tau} + \frac{q_{i+1/2}^n - q_{i-1/2}^n}{h} = 0, \quad (11)$$

где разностный поток $q_{i+1/2}^n$ определяется следующим образом:

$$q_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} \left(b_i^n + b_{i+1}^n - \left[\frac{\tau}{h} \phi_{i+1/2} b_{si+1/2}^n b_{x,i}^n + (1 - \phi_{i+1/2})(b_{i+1}^n - b_i^n) \right] \right),$$

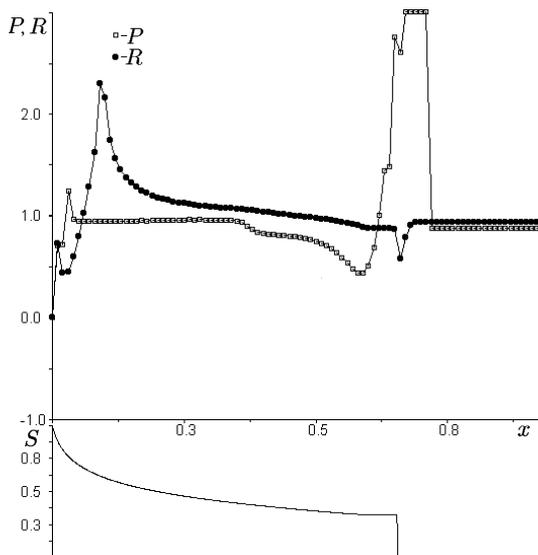


Рис. 7.

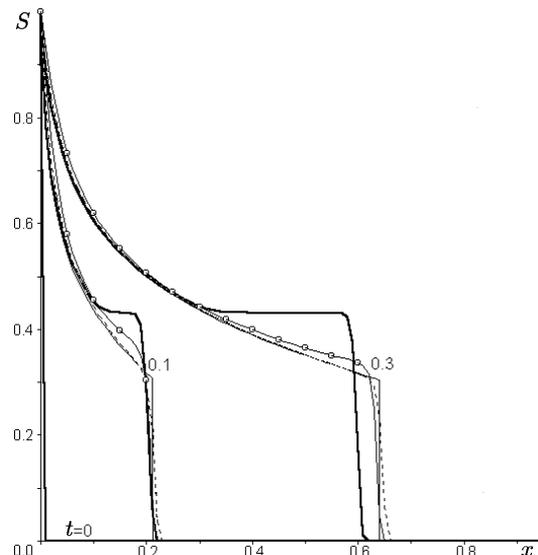


Рис. 8.

$$b_{si+1/2}^n = \frac{b_{si}^n + b_{si+1}^n}{2}. \quad (12)$$

В литературе предлагаются различные функции-ограничители $\phi_{i+1/2}$ [6, 7]:

$$\phi_{i+1/2} = \max[0, \min(1, u_{i+1/2})], \quad (13)$$

$$\phi_{i+1/2} = \max[0, \min(2u_{i+1/2}, 1), \min(2, u_{i+1/2})], \quad (14)$$

$$\phi_{i+1/2} = \frac{|u_{i+1/2}| + u_{i+1/2}}{|u_{i+1/2}| + 1}, \quad (15)$$

$$u_{i+1/2} = (s_i^n - s_{i-1}^n)/(s_{i+1}^n - s_i^n).$$

Проведены расчеты с разными функциями $\phi_{i+1/2}$ и установлено, что наилучшая точность определения решения в окрестности разрыва была при использовании формулы (15). Решения, полученные с применением (13), оказались ближе к точному решению в гладкой части, но на разрыве хуже, и, наконец, формула (14) была наихудшей.

На рис. 8 жирными линиями показаны решения по схеме Лакса — Вендроффа, пунктиром обозначено решение для TVD-модификации (11), (12), (15) и тонкими линиями с кружками — решение для TVD-модификации (11), (12), (14). Как видно, использование TVD-модификаций позволило избавиться от выполаживания решения. Контроль баланса при этом также несколько улучшился по сравнению со схемой Лакса — Вендроффа (см. таблицу). Соответствующие порядки локальных сходимостей для схемы (11), (12), (15) приведены на рис. 9. Поскольку начальный профиль имеет разрыв при $x = 0$, схема имеет первый порядок аппроксимации. При начальном приближении, более гладком, $s_0(x) = (1-x)^5$, $T = 0.2$, локальные порядки оказались приблизительно равными 2 (рис. 10).

В задачах фильтрации важен контроль за массовым балансом и фронтом вытеснения. Данные, полученные по этим показателям, для рассмотренных схем приведены в таблице. Для контроля за фронтом приведено отклонение расчетного положения x_f от теоретического x_c в единицах шагов сетки K .

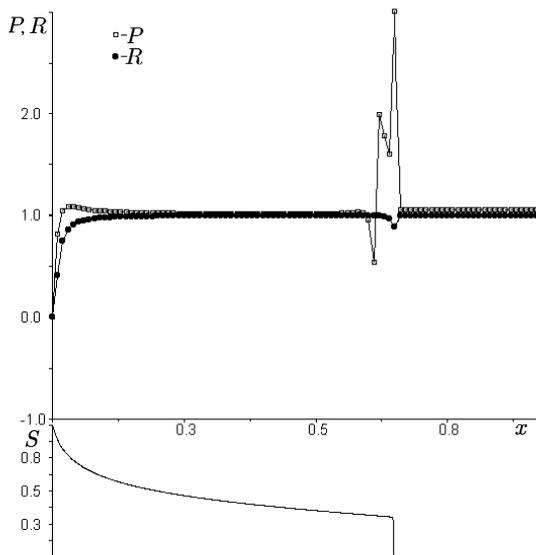


Рис. 9.

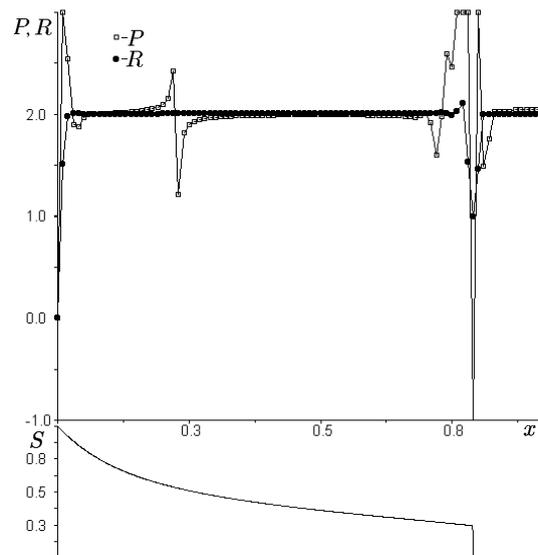


Рис. 10.

Дисбалансы водосодержания на два момента времени, % и $\max K(t)$

Название схемы	$t = 0.3$	$t = 0.6$	K
ВВЦП	0.37	10.15	13
Модификация схемы ВВЦП	0.01	0.35	4
Схема Лакса	23.41	12.67	29
Схема Лакса с усреднением (8), (9)	4.09	0.65	6
Схема Лакса — Вендроффа	1.62	3.47	5
Схема (11), (12), (15)	1.03	0.59	3

Таким образом, стандартные схемы для расчета гиперболических уравнений в задачах фильтрации оказываются малопригодными. Это связано с появлением таких эффектов, как осцилляции, выход на полку, поднятие решения, опережающее движение фронта $x_f(t)$. Все это приводит к необходимости модифицировать стандартные схемы для успешного их применения. Метод создания TVD-схем оказался эффективным для построения монотонных разностных схем, но в то же время и относительно сложным. Данное исследование показывает, что из рассмотренных схем конкурировать между собой могут лишь ВВЦП с регуляризатором и TVD-модификация схемы Лакса — Вендроффа с корректором потоков (15) [7]. Первая схема проста в реализации и дает меньший дисбаланс. Вторая меньше размывает скачок, но дает больший дисбаланс и сложнее в реализации.

Список литературы

- [1] ВОЕВОДИН А.Ф., ОСТАПЕНКО В.В. О расчете прерывных волн в открытых руслах // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 4, С. 305–321.
- [2] ОСТАПЕНКО В.В. Разностная схема повышенного порядка сходимости на нестационарной ударной волне // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 1. С. 49–54.
- [3] АНТОНЦЕВ С.Н., КАЖИХОВ А.В., МОНАХОВ В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: СО Наука, 1983. 316 с.
- [4] САМАРСКИЙ А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.
- [5] LAX P.D., WENDROFF B. Systems of conservation laws // Comm. Pure Appl. Math. 1960. Vol. 13. P. 217–237.
- [6] HARTEN A. High resolution schemes for heperbolic conservation laws // J. Comp. Phys. 1983. Vol. 49, № 3. P. 357–372.
- [7] VAN LEER B. Toward the ultimate conservative difference sheme. V. A second-order sequel to Godunov’s method // J. Comp. Phys. 1979. Vol. 32, № 1. P. 101–136.

Поступила в редакцию 10 февраля 2003 г.