ОДНОМЕРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В ВАКУУМ

С. Л. Дерябин
Уральский государственный университет путей сообщения, Россия
e-mail: SDeryabin@math.usart.ru

The one-dimension flows of an ideal polytropic gas are considered assuming that Newtonian gravitation acts on mass of gas. The problem of the collapse of one-dimensional cavity is investigated, and it is proved that the free gas — vacuum surface moves with constant velocity, which is the same as without taking gravitation into account. The problem on the gas dispersion is also investigated, and it is proved that the free gas — vacuum surface moves like the particles in the field of the material point attraction.

Задачи об истечении газа в вакуум, но без учета гравитации рассматривались ранее [1–5], в том числе доказано [1], что при схлопывании одномерной полости свободная поверхность некоторое время движется с постоянной скоростью. Этот результат обобщен на случай двумерных и трехмерных течений [2, 3], трехмерных течений в условиях действия внешних массовых сил [4]. В случае учета гравитации или магнитного поля в большом числе работ, например [6–8], изучались адиабатические движения с однородной деформацией, когда скорости — линейные функции координат.

При сферически-симметричном разлете гравитирующего газа доказано [9], что при определенных значениях параметров газовый шар разлетается до бесконечности. В других случаях граница газ — вакуум останавливается и начинается схлопывание массы газа в центр симметрии. Исследованы течения, возникшие при разлете газового шара, закрученного в начальный момент времени как твердое тело [10].

В настоящей работе завершаются исследования по одномерному истечению в вакуум идеального политропного газа в условиях самогравитации. Исследованы задачи о разлете цилиндрического объема газа, построены решения задач о схлопывании сферически- и цилиндрически-симметричных полостей.

1. Постановка задачи о распаде разрыва

Пусть в момент $t = 0$ сфера или цилиндр Γ радиуса $R > 0$ отделяет идеальный политропный, гравитирующий по Ньютону газ от вакуума. В задаче о схлопывании одномерной полости предполагается, что газ находится снаружи, а внутри полости — вакуум. Если внутри цилиндра находится газ, а снаружи — вакуум, то это задача о разлете газа. При этом в момент $t = 0$ известны распределения параметров газа: $u = u_0(x)$ — скорости газа;

$S = S_0(x)$ — энтропии; $\rho = \rho_0(x)$ — плотности газа, где x — расстояние до оси или центра симметрии. Функции u_0, S_0, ρ_0 предполагаются аналитическими, а плотность газа всюду больше нуля, в том числе $\rho_0(x)|_\Gamma > 0$. В момент $t = 0$ начинается движение газа, определяемое заданными распределениями u_0, S_0, ρ_0 и которое в дальнейшем будем называть фоновым течением.

Кроме того, в момент $t = 0$ поверхность Γ мгновенно разрушается и начинается истечение части газа в вакуум. Возмущения, возникшие в фоновом течении в результате мгновенного разрушения поверхности Γ, распространяются по газу в виде волны разрежения, отделенной от фонового течения границей Γ_1, являющейся поверхностью слабого разрыва. С другой стороны волна разрежения примыкает к вакууму: $\rho_0(x)|_{\Gamma_0} = 0$, где Γ_0 — свободная поверхность, отделяющая волну разрежения от вакуума. Требуется построить как фоновое течение, так и волну разряжения, а также найти законы движения Γ_1 и Γ_0, т. е. построить решение задачи о распаде разрыва в случае, когда в начальный момент времени неподвижная стенка Γ отделяет газ от вакуума.

Одномерные течения рассматриваемого газа описываются системой [11]

$$\begin{aligned} &\rho_t + \rho_x u + \rho(u_x + \nu\tfrac{u}{x}) = 0,\\ &u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = F(x,t),\\ &S_t + uS_x = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$F(x,t) = -2\nu\pi\frac{G}{x^\nu}\int\limits_a^x r^\nu\rho(r,t)dr,\ p = \frac{S^2 p^\gamma}{\gamma},\ \gamma = \text{const} > 1,$$

p — давление, G — гравитационная постоянная, ν — показатель симметрии: $\nu = 1$ — цилиндрическая; $\nu = 2$ — сферическая. Если газовый цилиндр разлетается, то $a = 0$. Если происходит схлопывание одномерной полости, то $a = x_0(t)$, где $x_0(t)$ — неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0.

Для удобства дальнейшего исследования от системы интегродифференциальных уравнений (1.1) делается переход к системе дифференциальных уравнений введением дополнительной неизвестной функции $F(x,t)$. Дифференцируя F по t и x и учитывая уравнение неразрывности, получим, как и в [9], два дифференциальных уравнения для F:

$$F_x = -\frac{\nu}{x}F - 2\nu\pi\rho G,\ F_t = 2\nu\pi\rho G u \tag{1.2}$$

Получившаяся система (1.1), (1.2) переопределена: пять уравнений для четырех неизвестных, однако перекрестным дифференцированием можно убедиться, что она совместна.

В качестве неизвестной функции вместо ρ удобно взять $\sigma = \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ [2]. Для построения фонового течения необходимо решить задачу Коши с начальными данными при $t = 0$:

$$\begin{aligned} &u|_{t=0} = u_0(x),\ S|_{t=0} = S_0(x),\ \sigma|_{t=0} = \sigma_0(x),\\ &F|_{t=0} = F_0(x) = -2\nu\pi\frac{G}{x^\nu}\int\limits_{a_0}^x r^\nu\rho_0(r)dr, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $a_0 = 0$, если газ разлетается, $a_0 = R$, если происходит схлопывание одномерной полости.

Если $\rho_0(x)$ — аналитическая функция, то, как и в [9], можно показать, что $F_0(x)$ есть аналитическая функция, не имеющая особенностей при $x = 0$. Поскольку рассматриваемая система является системой типа Ковалевской, а начальные данные — аналитические функции, задача Коши имеет при малых t аналитическое решение, которое можно представить, например, в виде сходящихся рядов по степеням t с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями от x в окрестности точки $x = R$ [12]. При помощи этого решения однозначно строится $x_1(t)$ [13] и определяются

$$\sigma|_{\Gamma_1} = \sigma^0(t),\ u|_{\Gamma_1} = u^0(t),\ S|_{\Gamma_1} = S^0(t). \tag{1.4}$$

Здесь $x_1(t)$ — закон движения поверхности слабого разрыва Γ_1, являющейся звуковой характеристикой фонового течения; σ^0, u^0, S^0— значения газодинамических параметров на ней. В дальнейшем будут предполагатся известными: фоновое течение, поверхность Γ_1, значения σ^0, u^0, S^0, заданные с помощью аналитических функций.

Для построения волны разрежения сделаем, как и в [2], замену переменных: за независимые переменные возьмем t, σ, а за неизвестные функции — x, u, S, F. Якобиан такого преобразования $J = x_\sigma$. В результате этой замены получим систему

$$\begin{aligned}
&x_t = u + \frac{\gamma-1}{2}\sigma u_\sigma + \frac{\gamma-1}{2}\nu x_\sigma \frac{u\sigma}{x},\\
&x_\sigma u_t - \frac{\gamma-1}{2}u_\sigma^2\sigma - (\gamma-1)x_\sigma u_\sigma\frac{u\sigma}{x} + \frac{2}{\gamma-1}S^2\sigma + \frac{2}{\gamma}SS_\sigma\sigma^2 = x_\sigma F,\\
&x_\sigma S_t + (u - x_t)S_\sigma = 0,\\
&F_t = -\nu\frac{x_t F}{x} + 2\nu\pi G(u - x_t)\sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Приведем вывод четвертого уравнения системы. В новых переменных дифференциальные уравнения (1.2) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
F_\sigma &= -x_\sigma\left(\frac{\nu}{x}F + 2\nu\pi G\sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}\right),\\
F_t &= \frac{x_t}{x_\sigma}F_\sigma + 2\nu\pi G u\sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}.
\end{aligned}$$

За счет этой замены переменных систему (1.2) удается расщепить. Подставляя F_σ из первого уравнения системы во второе, получим четвертое уравнение системы (1.5). В дальнейшем будет проверено, что на полученном решении уравнение для F_σ выполняется тождественно.

Решение в области между Γ_1 и Γ_0 (в области волны разрежения) будем строить как решение системы (1.5) с данными на характеристике Γ_1 (1.4). Поскольку Γ_1 — характеристика, кратная одному для получения единственного локально-аналитического решения необходимо задать одно дополнительное условие [14, 15]. Если бы поверхность Γ убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на стенке. Если поверхность Γ убирается мгновенно, этим условием в пространстве переменных (σ, t) служит [1, 2, 15] соотношение

$$x(0, \sigma) = R. \tag{1.6}$$

Таким образом, для описания волны разряжения между Γ_1 и Γ_0 имеем начально-краевую задачу (1.4)–(1.6), которая в дальнейшем и будет называться задачей о распаде разрыва.

2. Построение волны разрежения

Теорема 2.1. *Существует $t_0 > 0$ такое, что при $0 < t < t_0$ в некоторой окрестности Γ_1 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.4)–(1.6) о распаде разрыва.*

Доказательство теоремы состоит, как и в [1, 9], в сведении к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [14 ,15].

Для выяснения вопроса о том, входит ли поверхность Γ_0 в область применимости этого решения, разложим решение задачи (1.4)–(1.6) в ряд по степеням t

$$\mathbf{f}(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}_k(\sigma)\frac{t^k}{k!},\ \mathbf{f} = \{x, u, S, F\}, \tag{2.1}$$

что при малых t возможно в силу аналитичности решения задачи о распаде разрыва в некоторой окрестности Γ_1. Из начальных и граничных условий следует, что: $x_0(\sigma) = R$; $F_0(\sigma) = 0$ при схлопывании газа,

$$F_0(\sigma) = -2\nu\pi\frac{G}{R^\nu}\int_0^R r^\nu \rho_0(r)dr$$

при разлете газа.

В системе (1.5) положим $t = 0$ и, учитывая (1.6), будем иметь

$$\begin{aligned}
&x_1 = u_0 + \frac{\gamma-1}{2}\sigma u_{0\sigma},\\
&u_{0\sigma}^2 = \frac{4}{(\gamma-1)^2}S_0^2 + \frac{4}{\gamma(\gamma-1)}\sigma S_0 S_{0\sigma},\\
&(u_0 - x_1)S_{0\sigma} = 0,\\
&F_1 = -\nu\frac{x_1}{R}F_0 + 2\nu\pi G(u_0 - x_1)\sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}.
\end{aligned}$$

Интегрируя эту систему, получим

$$\begin{aligned}
&x_1 = \mp 2\alpha\sigma S_0 + u_*,\ 2\alpha = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\\
&u_0 = \mp\frac{2}{\gamma-1}\sigma S_0 + u_*,\ S_0 = S_0(R) = S_{00},\\
&u_* = \pm\frac{2}{\gamma-1}S_{00}\sigma_0(R) + u_0(R),\\
&F_1 = \frac{\nu}{R}F_0(u_* - 2\alpha S_0\sigma) - 2\nu\pi G S_0\sigma^{2\alpha}
\end{aligned}$$

при разлете газа,

$$F_1 = 2\nu\pi G S_0\sigma^{2\alpha}$$

при схлопывании полости.

Знак плюс в выражении для u_* выбирается при разлете газа, а знак минус — при схлопывании одномерной полости.

Продифференцируем систему (1.5) k раз по t, положим $t = 0$ и, учитывая (1.6) и ранее полученные выражения для $\mathbf{f}_1(\sigma)$ $(l < k)$, имеем

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} = u_k + \frac{\gamma-1}{2}\sigma u_{k\sigma} + G_{1k}(\sigma),\\
&\sigma u_{k\sigma} - \alpha k u_k = G_{2k}(\sigma),\\
&\sigma S_{k\sigma} - 2\alpha k S_k = G_{3k}(\sigma),\\
&F_{k+1} = G_{4k}(\sigma).
\end{aligned}$$

Здесь $G_{1k},\ G_{2k},\ G_{3k},\ G_{4k}$ — функции, зависящие от $\mathbf{f}_l(\sigma),\ l < k$; их вид не приводится из-за громоздкости.

Проинтегрировав второе и третье уравнения системы, будем иметь

$$\begin{aligned}
&u_k = \sigma^{k\alpha}\left[u_{k0} + \textstyle\int G_{2k}(\sigma)\sigma^{-\alpha k-1}d\sigma\right],\\
&S_k = \sigma^{2k\alpha}\left[S_{k0} + \textstyle\int G_{3k}(\sigma)\sigma^{-2\alpha k-1}d\sigma\right].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Произвольные постоянные u_{k0}, S_{k0} определяются при помощи условий (1.4). Для этого $\sigma^0(t)$ подставляем в правые части выражений (2.2), а $u^0(t)$, $S^0(t)$ — в левые части. Раскладывая получившиеся коэффиценты по степеням t и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем соотношения, из которых однозначно находятся u_{k0}, S_{k0}.

Лемма 2.1. *При $1 < \gamma < 3$ коэффициенты рядов (2.1) при $k > 1$ имеют вид: $\sigma P_k(\sigma, \sigma\ln\sigma, \sigma^\lambda)$ — в задаче о схлопывании одномерной полости; $d_k^\iota + \sigma P_k(\sigma, \sigma\ln\sigma, \sigma^\lambda)$ — в задаче о разлете газа, где P_k — многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше Ak, $\lambda > 0$, $A, d_k^\iota = \mathrm{const}$, $\iota = 1, 2, 3$.*

Доказательство леммы аналогично соответствующему доказательству из [1, 9] и проводится индукцией по k . Сначала доказывается, что $G_{k\iota}(\sigma)$ обладают нужной структурой, а затем в результате непосредственного интегрирования выясняется, что $\mathbf{f}_k$ обладают указанной структурой. Отметим, что в отличие от [1] здесь, как и в задаче о разлете самогравитирующего газа [9], присутствуют постоянные d_k^ι. Это требует более детального исследования структуры коэффициентов рядов (2.1) в задаче о разлете газа. На основании леммы можно утверждать, что структура решения следующая:

$$\begin{aligned}
&u = U^0(t) + \sigma U^1(t,\sigma),\ x = x^0(t) + \sigma x^1(t,\sigma),\\
&F = F^0(t) + \sigma F^1(t,\sigma),\ S = \sigma S^1(t,\sigma),
\end{aligned}$$

где

$$U^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^1\frac{t^k}{k!},\ x^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^2\frac{t^k}{k!},\ F^0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^3\frac{t^k}{k!}. \tag{2.3}$$

Для $U^0(t)$, $x^0(t)$, $F^0(t)$ справедлива следующая

Лемма 2.2. *Ряды (2.3) являются решением вспомогательной задачи*

$$\begin{aligned}
&x_t = U,\ x(0) = R,\\
&U_t = F,\ U(0) = u_*,\\
&F_t = -\frac{\nu}{x}UF,\ F(0) = F_0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где u_*, F_0 берутся из решения задачи о распаде разрыва.

Лемма доказывается разложением в ряд по степеням t решения задачи (2.4) и сравнением полученных рядов с рядами (2.3). Ряды оказываются равными.

Система (2.4) не имеет особенностей ($x(0) = R > 0$), поэтому задача (2.4) имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно представить рядами (2.3). Следовательно, ряды (2.3) сходятся.

На основании приведенных лемм доказывается следующая

Теорема 2.2. *Для $1 < \gamma < 3$ при $0 < t < t_0$ область сходимости рядов (2.1), а также рядов, задающих f_t, f_σ, покрывает всю область течения от Γ_1 до Γ_0 включительно. При этом свободная поверхность Γ_0 в задаче о схлопывании газа движется с постоянной скоростью u_*. В задаче о разлете газа закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи (2.4). В обоих случаях на ней сохраняется исходное значение энтропии $S|_{\Gamma_0} = S_{00}$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству из [1, 9] и проводится по методике [15, 16], позволяющей установить неограниченность области сходимости рядов по соответствующей переменной, в случае полиноминальной структуры коэффициентов ряда. Поскольку ряды (2.1) локально сходятся, а коэффициенты рядов — многочлены от σ, $\sigma \ln \sigma$, σ^λ и степени многочленов не выше Ak , как и в [15, 16], доказывается, что существует постоянная $M > 0$, такая, что ряды (2.1) сходятся в области

$$\xi = \max\{\sigma,\ |\sigma \ln \sigma|,\ 1\},$$
$$M\xi|t| < 1.$$

Поэтому для $0 \le \sigma \le \sigma_*$ точка $\sigma = 0$, определяющая закон движения свободной поверхности Γ_0, включается в область сходимости рядов (2.1).

Таким образом, на основаниии теоремы 2.2 получено решение задачи о распаде разрыва в виде рядов (2.1), сходящихся во всей области волны разряжения от Γ_1 до Γ_0 включительно, а также установлены законы движения свободной поверхности. При этом можно сделать следующие выводы.

1. При схлопывании одномерной полости наличие самогравитации не влияет на закон движения свободной поверхности, как и в [1], свободная поверхность движется с постоянной скоростью u_*:

— если $u_* = 0$ ($u_0|_\Gamma = -\dfrac{2}{\gamma - 1} S_{00}\sigma_0|_\Gamma$), то свободная поверхность стоит на месте;

— если $u_* < 0$, то свободная поверхность движется в направлении вакуума;

— если $u_* > 0$, то свободная поверхность движется в направлении газа.

2. При разлете газа закон движения свободной поверхности определяется из решения задачи (2.4). Подробное исследование задачи (2.4) проведено ниже и в других переменных.

3. Задача о непрерывном примыкании газа к вакууму

Для того чтобы определить момент времени, до которого сохраняется полученная выше картина течения, исследуем задачу о непрерывном примыкании газа к вакууму. В отличие от задачи о распаде разрыва будет предполагаться, что в начальный момент времени $t = t_0$ функция $\sigma(t_0, x)|_\Gamma = 0$, т. е. газ непрерывно примыкает к вакууму. Здесь Γ — шар или цилиндр радиуса x_{00} в начальный момент времени $t = t_0$, отделяющий газ от вакуума: $0 \le x \le x_{00}$ — в задаче о разлете газа; $x \ge x_{00}$ — в задаче о схлопывании одномерной полости.

Необходимо построить решение задачи о непрерывном примыкании газа к вакууму в окрестности свободной поверхности Γ_0, найти закон ее движения и моменты времени, когда возникают бесконечные производные на свободной поверхности.

Будет предполагаться, что в начальный момент времени $t = t_0$ известны распределения параметров газа $\sigma(t_0, x)$, $u(t_0, x)$, $S(t_0, x)$ — аналитические функции, причем, как отмечено выше, $\sigma(t_0, x)|_\Gamma = 0$.

В системе (1.1) введем новую независимую переменную $z = x - x_0(t)$, где $x = x_0(t)$ — закон движения свободной поверхности Γ_0, и новую неизвестную функцию M — массу газа, определяемую соотношениями

$$M = -\frac{x}{G}F(t, x),$$

т. е.

$$M = 2\pi\nu\int\limits_{a_0}^{x} r^\nu \rho_0(r)dr,$$

где $a_0 = 0$ в задаче о разлете газа, $a_0 = x_0(t)$ в задаче о схлопывании одномерной полости.

Дифференцируя последнее равенство по x, получим, как и в [11], дифференциальное следствие $M_x = 2\nu\pi x^\nu \sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}$.

Система (1.1) в переменных t, z и с учетом нового дифференциального следствия для M будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\sigma_t + (u - x_{0t})\sigma_z + \frac{\gamma-1}{2}\sigma\left(u_x + \nu\frac{u}{z+x_0}\right) = 0,\\
&u_t + (u - x_{0t})u_z + \frac{2}{\gamma-1}S^2\sigma\sigma_z + \frac{2}{\gamma}\sigma^2 SS_z + \frac{GM}{(z+x_0)^\nu} = 0,\\
&S_t + (u - x_{0t})S_z = 0,\\
&M_z = 2\nu\pi(z+x_0)^\nu\sigma^{\frac{2}{\gamma-1}}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Имея решение задачи о распаде разрыва, на поверхности Γ_0, т. е. при $z = 0$, зададим условия

$$\sigma(t, 0) = 0,\ u(t, 0) = u_0(t) = u_*,\ S(t, 0) = S_{00},\ M(t, 0) = M_{00}. \tag{3.2}$$

Последнее условие есть закон сохранения массы: при разлете газа M_{00} равно исходной массе газа. При схлопывании газа $M_{00} = 0$, поскольку

$$M|_{x=x_0(t)} = 2\pi\nu\int\limits_{x_0(t)}^{x_0(t)} r^\nu\rho_0(r)dr = 0.$$

Задача (3.1), (3.2) является характеристической задачей Коши с условиями, поставленными на характеристике кратности три. Поэтому для единственности решения необходимо задать три дополнительных условия [14, 15]. Этими условиями будут начальные данные, записанные в новых переменных

$$\sigma(t_0, z) = \sigma^0(z),\ u(t_0, z) = u^0(z),\ S(t_0, z) = S^0(z), \tag{3.3}$$

согласованные в точке $t = t_0$, $z = 0$ с данными (3.2)

$$\sigma^0(0) = 0,\ u^0(0) = u_0(0) = u_*,\ S^0(0) = S_{00}.$$

Система (3.1), вообще говоря, не является аналитической в окрестности поверхности $z = 0$, поскольку для произвольных γ в четвертом уравнении после дифференцирования по z появятся отрицательные степени σ. Однако для счетного набора $\gamma = 1 + 2/n$, где n — натуральное число, число $2/(\gamma - 1)$ — степень σ в четвертом уравнении — становится целым. Тогда, если входящая в систему (3.1) функция $x_0(t)$ аналитическая, система (3.1) является аналитической.

В задаче о схлопывании одномерной полости очевидно, что

$$x_0(t) = x_{00} + u_*(t - t_0)$$

— аналитическая функция. Чтобы проверить, будет ли функция $x_0(t)$ аналитической в задаче о разлете газа, в системе (3.1) положим $z = 0$ и, учитывая (3.2), получим

$$\begin{aligned}
&x_{0t} = u_0,\ x(t_0) = x_{00},\\
&u_{0t} + \frac{GM_0}{x_0^\nu} = 0,\ u(t_0) = u_*,\\
&S_{0t} = 0,\ S(t_0) = S_{00},\\
&M_0 = M_{00}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

— систему, эквивалентную системе (2.4). Поскольку $x_0(t) \neq 0$ в окрестности точки $x = x_{00}$, следовательно, решения системы (2.4) — аналитические функции. В работе [9] система (3.4) для сферически-симметричного случая проанализирована не полностью, поэтому в настоящей работе приведем все результаты: для $\nu = 1$ и для $\nu = 2$.

Проинтегрировав первые два уравнения системы (3.4), получим фазовый портрет траектории движения Γ_0 в плоскости переменных x_0, u_0:

$$\begin{aligned}
&u_0(t) = \pm\sqrt{u_*^2 - 2M_{00}G\ln\frac{x_0(t)}{x_{00}}},\ \nu = 1,\\
&u_0(t) = \pm\sqrt{u_*^2 + \frac{2GM_{00}}{x_0(t)} - \frac{2GM_{00}}{x_{00}}},\ \nu = 2,\\
&S_0 = S_{00}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Если $u_* = 0$, то подкоренные выражения в формулах (3.5) будут больше нуля только при $x_0(t) < x_{00}$. Это означает, что свободная поверхность Γ_0 сразу в момент времени $t = t_0$ движется в сторону оси или центра симметрии со скоростью

$$u_0(t) = -\sqrt{-2GM_{00}\ln\frac{x_0(t)}{x_{00}}},\ \text{если}\ \nu = 1,$$
$$u_0(t) = -\sqrt{\frac{2GM_{00}}{x_0(t)} - \frac{2GM_{00}}{x_{00}}},\ \text{если}\ \nu = 2.$$

Если $u_* < 0$, то в начальный момент времени $u_0(t_0) < 0$ и перед корнем в формулах (3.5) выбирается знак минус. Следовательно, свободная поверхность сразу начинает двигаться в сторону оси или центра симметрии. Заметим, что подкоренные выражения в формулах (3.5) заведомо больше нуля, так как $x_0(t) < x_{00}$. В этом случае газ движется со скоростью

$$u_0(t) = -\sqrt{u_*^2 - 2M_{00}G\ln\frac{x_0(t)}{x_{00}}},\ \text{если}\ \nu = 1,$$
$$u_0(t) = -\sqrt{u_*^2 + \frac{2GM_{00}}{x_0(t)} - \frac{2GM_{00}}{x_{00}}},\ \text{если}\ \nu = 2.$$

Окончательно можно сделать вывод о том, что при $u_* = 0$ или $u_* < 0$ сразу в начальный момент времени начинается сжатие всей массы газа.

Если $u_* > 0$, то при $\nu = 1$ газовый цилиндр разлетается со скоростью

$$u_0(t) = \sqrt{u_*^2 - 2M_{00}G \ln \frac{x_0(t)}{x_{00}}}.$$

В точке $x = x_* = x_{00}e^{\frac{u_*}{2GM_{00}}}$ скорость газа $u_0(t_*) = 0$, т. е. свободная поверхность Γ_0 останавливается и начинается процесс сжатие всей массы газа на ось симметрии.

Для $\nu = 2$ при $u_* > 0$ возможны два случая:

1) если $u_*^2 - \dfrac{2GM_{00}}{x_{00}} > 0$, то газовый шар разлетается до бесконечности;

2) если $u_*^2 - \dfrac{2GM_{00}}{x_{00}} < 0$, то в точке $x = x_* = \dfrac{2GMx_{00}}{2GM_{00} - x_{00}u_*^2}$ скорость газа $u_0(t_*) = 0$, свободная поверхность Γ_0 останавливается и начинается сжатие всей массы газа в центр симметрии.

Таким образом, в дополнение к результатам из работы [9], система (3.4) исследована полностью. Все полученные результаты справедливы также для системы (2.4), эквивалентной системе (3.4).

Если $2/(\gamma-1)$ — нецелое число, т. е. $\gamma \neq 1+2/n$, то построение аналитического решения задачи о непрерывном примыкании газа к вакууму, как и в [9], проведем только для тех показателей γ, при которых $2/(\gamma - 1) = m/n$, где m, n — натуральные числа ($n > 1$). В этом случае $\gamma = 1 + 2n/m$.

Введем новую неизвестную функцию $c = \sigma^{\frac{1}{n}}$. Система (3.1) перейдет в аналитическую систему

$$\begin{aligned}
&c_t + (u - x_{0t})c_z + \frac{1}{n}c\left(u_z + \nu\frac{u}{z + x_0}\right) = 0,\\
&u_t + (u - x_{0t})u_z + mS^2c^{2n-1}c_z + \frac{2m}{m-2n}c^{2n}SS_z + \frac{GM}{(z + x_0)^\nu} = 0,\\
&S_t + (u - x_{0t})S_z = 0,\\
&M_z = 2\nu\pi(z + x_0)^\nu c^m,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

а условия (3.2), (3.3) перейдут соответственно в условия

$$c(t, 0) = 0,\ u(t, 0) = u_0(t),\ S(t, 0) = S_{00},\ M(t, 0) = M_{00}, \tag{3.7}$$

$$c(t_0, z) = c^0(z),\ u(t_0, z) = u^0(z),\ S(t_0, z) = S^0(z). \tag{3.8}$$

Для поставленной задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует $t_* > t_0$ такое, что при $t_0 < t < t_*$ в некоторой окрестности Γ_0 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (3.6)–(3.8). Для счетного набора $\gamma = 1 + 2/n$ у задачи (3.1)–(3.3) также существует единственное локально-аналитическое решение.*

Доказательство теоремы сводится, как и в [1, 9], к теореме о существовании единственного аналитического решения у характеристической задачи Коши стандартного вида [14, 15]. Задача (3.6)–(3.8) является характеристической задачей Коши с данными на характеристике кратности три, поэтому для построения единственного локально-аналитического решения надо задать три дополнительных условия. Это условия (3.8).

Разложим решение задачи (3.6)–(3.8) в ряд по степеням z

$$\mathbf{g}(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{g}_k(t)\frac{z^k}{k!},\ \ \mathbf{g}=\{c,u,S,M\}, \tag{3.9}$$

что при малых z возможно в силу аналитичности решения задачи (3.6)–(3.8) в некоторой окрестности Γ_0.

В системе (3.6) положим $z=0$ и, учитывая (3.7) в задаче о разлете газа, получим систему (3.4). В задаче о схлопывании одномерной полости в результате этих действий получим тождество.

Продифференцируем систему (3.5) по z, положим $z=0$. Будем иметь систему транспортных уравнений

$$\begin{aligned} &c_{1t}+\left(1+\frac{1}{n}\right)u_1c_1+\frac{\nu}{n}\frac{u_0}{x_0}c_1=0,\\ &u_{1t}+u_1^2=\nu\frac{GM_{00}}{x_0^{\nu+1}},\\ &S_{1t}+u_1S_1=0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

описывающую поведение выводящих производных со свободной поверхности Γ_0.

Если, как и в [1], ввести новую неизвестную функцию $y=e^{\int_{t_0}^{t}u_1(t)dt}$, то второе уравнение системы в задаче о разлете газа будет иметь вид

$$y_{tt}=\nu\frac{GM_{00}}{x_0^{\nu+1}}y.$$

Решение этого уравнения ищется при начальных данных

$$y(t_0)=1,\ \ y_t(t_0)=u_1(t_0).$$

Полученная задача имеет единственное локально-аналитическое решение, которое можно выписать в квадратурах при $u_*\neq 0$:

$$y=u_0(t)\left(\frac{1}{u_*}+\left[u_*u_1(t_0)+\frac{GM_{00}}{x_{00}}\right]\int\limits_{t_0}^{t}\frac{dt}{u_0^2(t)}\right)$$

В момент времени $t=t_*$ интеграл имеет особенность, но функция $y(t)$ особенностей не имеет: $y(t_*)=\left[u_*u_1(t_0)+\dfrac{GM_{00}}{x_{00}}\right]\dfrac{x_*^{\nu}}{GM_{00}}$. Однако, если $u_1(t_0)$ такое, что $u_*u_1(t_0)+\dfrac{GM_{00}}{x_{00}}=0$, тогда $y(t_*)=0$. Это означает, что в момент остановки свободной поверхности Γ_0 на ней возникают бесконечные производные: $u_1(t_*)=\infty$, $c_1(t_*)=\infty$.

В задаче о схлопывании газа второе уравнение системы (3.10) имеет вид $y_{tt}=0$. Проинтегрировав его, получим $y=1+u_1(t_0)(t-t_0)$. Если $u_1(t_0)<0$, то в точке $t_*=t_0-\dfrac{1}{u_1(t_0)}$ значение функции $y(t_*)=0$ и, следовательно, в этот момент времени на свободной поверхности Γ_0 возникнут бесконечные производные. В работе [1] транспортные уравнения исследовались при произвольных значениях $\gamma>1$ в предположении $u_1(t_0)>0$. Возникновение бесконечных производных на свободной поверхности было обусловлено нелинейностью исследуемого уравнения. Случай, когда $u_1(t_0)<0$, в работе [1] не рассматривался.

Продифференцируем систему (3.6) k раз по z, положим $z = 0$ и, учитывая (3.7) и ранее найденные $\mathbf{g}_l,\ l < k$, получим систему

$$\begin{aligned} &c_{kt} + \left(1 + \frac{k}{n}\right) u_k c_1 + \left(k + \frac{1}{n}\right) u_1 c_k + \frac{\nu}{n}\frac{u_0}{x_0} c_k = Q_{1k}(t), \\ &u_{kt} + (k+1) u_1 u_k = Q_{2k}(t), \\ &S_{kt} + (k+1) u_1 S_k = Q_{3k}(t),\ M_{k+1} = Q_{4k}(t). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Конкретный вид правых частей уравнений из-за громоздкости здесь не приводится.

Системы (3.11) линейны, поэтому первые особенности решений этих систем совпадают с особенностями решений систем (3.4), (3.10).

Представим решение задачи (3.1)–(3.3) в виде ряда (3.9). Коэффициенты этого ряда $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1$ можно выписать для произвольных γ, а остальные $\mathbf{g}_l$ $(l > 1)$ — для счетного набора $\gamma = 1 + 2/n$. Особый интерес представляют системы транспортных уравнений, поскольку системы, описывающие поведение остальных членов ряда, практически совпадают с системами (3.4), (3.10).

Продифференцируем систему (3.1) по z, положим $z = 0$. Получим систему транспортных уравнений

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_{1t} + \frac{\gamma+1}{2}\right) u_1 c_1 + \frac{\nu(\gamma-1)}{2}\frac{u_0}{x_0}\sigma_1 = 0, \\ &u_{1t} + u_1^2 + \frac{2}{\gamma-1} S_{00}\sigma_1^2 = \nu\frac{GM_{00}}{x_0^{\nu+1}}, \\ &S_{1t} + u_1 S_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Если, как и ранее, ввести новую неизвестную функцию y, то второе уравнение системы в задаче о разлете газа будет иметь вид

$$y^\gamma x_0^{\frac{\nu(\gamma-1)}{2}} \left(y_{tt} - \nu\frac{GM_{00}}{x_0^{\nu+1}} y\right) = -\frac{2}{\gamma-1} S_{00}\sigma_1^2(t_0) x_0^{\frac{\nu(\gamma-1)}{2}}(t_0).$$

Решение этого уравнения ищется при начальных данных

$$y(t_0) = 1,\ y_t(t_0) = u_1(t_0).$$

Аналитическое исследование этой задачи представляет большие трудности, поэтому решение искалось численно. Численный анализ показал, что при $u_1(t_0) > 0$ на свободной поверхности Γ_0 бесконечные производные не возникают до момента фокусировки Γ_0 на ось или в центр симметрии. При $u_1(t_0) < 0$ бесконечные производные на Γ_0 возникают еще до момента остановки Γ_0, если газ разлетается, или до момента фокусировки в центр симметрии, если сразу начинается сжатие всей массы газа.

В задаче о схлопывании одномерной полости второе уравнение системы (3.12) совпадает с уравнением, исследованным в [1]. Новый результат получен при численном исследование уравнения в предположении, что $u_1(t_0) < 0$. В этом случае градиентная катастрофа на свободной поверхности всегда наступала еще до момента фокусировки Γ_0 на ось или в центр симметрии.

Замечание 1. Если в расчетах положить $x_{00} = 1$, $\rho_0 = 1$, то поскольку $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\dfrac{Hm^2}{\text{кг}^2}$, влияние гравитации проявляется очень слабо и свободная поверхность движется практически с постоянной скоростью u_*.

Замечание 2. Гравитационные эффекты, полученные при исследовании систем (3.4), (3.10), в численных расчетах начинают наблюдаться при следующих условиях: $x_{00} = 1$, значения ρ_0 имеют порядок 10^{11}, значения u_* находятся в интервале $(0,1;10)$. То есть гравитация начинает сказываться в случае, если газ имеет очень большую плотность и относительно маленькую скорость.

Замечание 3. При численном исследовании транспортных уравнений в [9] начальные условия брались из решения задачи о распаде разрыва. Решение задачи о распаде разрыва такое, что всегда $u_1(t_0) > 0$. Поэтому градиентная катастрофа не наблюдалась.

Все полученые в статье результаты доказаны строго, но носят локальный характер, поэтому они не учитывают особенностей, возможно, возникающих в средней части течения.

Автор благодарит С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

Список литературы

[1] Баутин С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.

[2] Баутин С.П. Двумерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Прикладная математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 3. С. 433–439.

[3] Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 65. С. 56–74.

[4] Дерябин С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.

[5] Сидоров А.Ф. Приближенный метод решения некоторых задач о пространственном истечении газа в вакуум // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1976. Т. 7, № 5. С. 137–148.

[6] Богоявленский О.И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 2. С. 270–280.

[7] Зубов А.Д., Симоненко В.А. Движения с однородной деформацией в магнитной газодинамике // Вопр. атомной науки и техники. 1986. Вып. 1. С. 3–12.

[8] Лидов М.И. Точные решения уравнений неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97, № 3. С. 409–410.

[9] Дерябин С.Л., Чуев Н.П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.

[10] Чуев Н.П. Аналитический метод исследования пространственных задач данамики самогравитирующего газа // Вычисл. технологии. 1988. Т. 3, № 1. С. 79–89.

[11] Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.

[12] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

[13] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

[14] Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.

[15] Баутин С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

[16] Баутин С.П. Исследование области сходимости специальных рядов, решающих некоторые задачи газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1978. Т. 9, № 4. С. 5–17.

Поступила в редакцию 28 октября 2002 г.