РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

В. В. Альчиков
Красноярский государственный технический университет, Россия
e-mail: `bykov@fivt.krasn.ru`

Solution of magnetostatic equations for ferromagnet of various shape for numerical modelling of magnetostatic fields the accurate expressions for the factors of discretional systems of equation in the integral formulation of the magnetostatics problem for ferromagnetic elements having right-angled and sphere-like forms are derived.

Введение

Задача магнитостатики в интегральной постановке сводится к решению нелинейной дискретизованной системы уравнений большого порядка. Одним из источников погрешности решения являются коэффициенты этой системы, зависящие от формы ферромагнитных элементов. Известны общие выражения для коэффициентов в виде объемных или поверхностных интегралов, ошибки вычисления которых приближенными методами могут быть значительны. Ошибки особенно возрастают, когда точки наблюдения находятся вблизи и внутри элементарных объемов, по которым осуществляется интегрирование. Кроме того, трудоемкость вычисления коэффициентов считается рядом авторов главным и принципиальным недостатком интегральных методов расчета [1]. Поэтому следует использовать точные и достаточно простые выражения для коэффициентов уравнений магнитостатики, которые приводятся в данной статье. Предварительно дается постановка задачи расчета магнитостатических полей с учетом влияния ферромагнетиков.

1. Постановка задачи магнитостатики

Существует несколько постановок задачи магнитостатики. В одной из них напряженность магнитного поля $d\mathbf{H}(\mathbf{q})$, создаваемого ферромагнетиками, занимающими объем V, в точке наблюдения $\mathbf{q}$ определяется по формуле

$$d\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi}\nabla_{\mathbf{q}} \int_V \left(\mathbf{M}(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{q}} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}\right) dV, \tag{1}$$

где $\nabla_{\mathbf{q}}$ — градиент скалярной функции, аргументами которой являются компоненты q_1, q_2, q_3 точки наблюдения $\mathbf{q}$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки интегрирования; $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ — вектор намагниченности в точке $\mathbf{r}$.

Результирующая напряженность поля $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ в точке $\mathbf{q}$ равна

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}^0(\mathbf{q}) + d\mathbf{H}(\mathbf{q}), \tag{2}$$

где $\mathbf{H}^0(\mathbf{q})$ — вектор напряженности внешнего магнитного поля в точке $\mathbf{q}$.

Вектор $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ связан с вектором $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ зависимостью

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi(H(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}), \tag{3}$$

где $\chi(H(\mathbf{r}))$ определяется по некоторой известной эмпирической формуле, соответствующей ферромагнитному материалу, в зависимости от значения $H(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{H}(\mathbf{r})|$.

Объем V разбивается на N элементарных объемов V_j. В центре каждого V_j выбирается точка наблюдения $\mathbf{q}_j$. Векторы $\mathbf{M}$, $\mathbf{H}$ в V_j считаем постоянными и равными $\mathbf{H}_j$, $\mathbf{M}_j$. Обозначим их компоненты через $H_n(j),\ M_n(j),\ n = 1, 2, 3$.

Записывая покомпонентно уравнение (2) с учетом (1), (3) для центральных точек q_j, получаем систему нелинейных уравнений относительно $H_k(j)$:

$$H_k(j) = H_k^0(j) + \sum_{i=1}^{N} a_{k,n}(i,j)\chi(H(i))H_n(i), \tag{4}$$

$$j = 1, .., N; \quad n, k = 1, 2, 3,$$

где $H_k^0(j)$ — компоненты векторов $\mathbf{H}^0(\mathbf{q}_j)$. Коэффициенты в (4) зависят от расположения и формы ферромагнетиков. Формулы для их расчета даны ниже. Одновременно с решением системы (4) определяются компоненты $M_n(j)$ из (3). После этого, используя (4), могут быть определены векторы $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ в любой точке $\mathbf{q}$ с предварительным пересчетом коэффициентов.

2. Выражения для коэффициентов в общем виде

Для вывода коэффициентов в (4) запишем (1) для отдельно взятого элементарного объема V_E и внесем знак градиента ∇_q под знак интеграла:

$$d\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_E} \nabla_{\mathbf{q}} \left(\mathbf{M}(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{q}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}\right) dV. \tag{5}$$

Поскольку мы полагали значения компонент M_n в пределах каждого элементарного объема постоянными, то уравнение (5) в компонентах можно записать в следующем виде:

$$dH_k(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_E} \frac{\partial}{\partial r_k}\frac{\partial}{\partial r_n}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} dV M_n, \quad k = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Опуская индексы i, j в (4) для отдельно взятого ферромагнетика, получаем выражение для коэффициентов:

$$a_{k,n} = \frac{1}{4\pi}\int_{V_E} \frac{\partial}{\partial r_k}\frac{\partial}{\partial r_n}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|} dV, \quad k, n = 1, 2, 3. \tag{7}$$

Из (7) следует симметрия коэффициентов $a_{k,n} = a_{n,k}$.

Кроме (7) может быть получено другое выражение для коэффициентов в виде поверхностного интеграла. Для этого, используя теорему о градиенте

$$\int_V \nabla F(\mathbf{r})dV = \int_S F(\mathbf{r})d\mathbf{S},$$

заменим интеграл по объему (5) поверхностным интегралом

$$d\mathbf{H}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_E} \mathbf{M}(\mathbf{r})\nabla_{\mathbf{q}}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}d\mathbf{S}, \tag{8}$$

где S_E — замкнутая поверхность, ограничивающая объем ферромагнетика V_E; $d\mathbf{S}$ — внешняя нормаль к поверхности S_E в точке $\mathbf{r}$ с компонентами $dS_k,\ k = 1, 2, 3$; длина $d\mathbf{S}$ равна величине элементарной площадки.

Из (8) получаем следующее выражение для коэффициентов:

$$a_{k,n} = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_E} \frac{\partial}{\partial r_n}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{q}|}dS_k, \quad k, n = 1, 2, 3. \tag{9}$$

3. Вычисление коэффициентов для параллелепипеда

В декартовой системе координат x, y, z для элементарного параллелепипеда со сторонами

$$x_1 \le x \le x_2, \quad y_1 \le y \le y_2, \quad z_1 \le z \le z_2,$$

параллельными осям координат, из (9) следует

$$a_{1,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{x-q_x}{R^3}dydz\Big|_{x_2}^{x_1}, \quad a_{1,2} = \frac{1}{4\pi}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{y-q_y}{R^3}dydz\Big|_{x_2}^{x_1},$$
$$a_{1,3} = \frac{1}{4\pi}\int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z-q_z}{R^3}dydz\Big|_{x_2}^{x_1}, \quad a_{2,2} = \frac{1}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{y-q_y}{R^3}dxdz\Big|_{y_2}^{y_1},$$
$$a_{2,3} = \frac{1}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\int_{z_1}^{z_2}\frac{z-q_z}{R^3}dxdz\Big|_{y_2}^{y_1}, \quad a_{3,3} = \frac{1}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{z-q_z}{R^3}dxdy\Big|_{z_2}^{z_1},$$

где x_p, y_k, z_l, $(p,\ k,\ l = 1,\ 2)$, — координаты вершин элементарного параллелепипеда; R — расстояние от точки интегрирования до точки наблюдения:

$$R = \sqrt{(x-q_x)^2 + (y-q_y)^2 + (z-q_z)^2}.$$

Используя табличные интегралы

$$\int \frac{dx}{(x^2+c^2)^{3/2}} = \frac{x}{c^2\sqrt{x^2+c^2}}, \qquad c \ne 0,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+b^2)\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{b\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{b\sqrt{x^2+a^2}}, \qquad a^2 > b^2,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c^2}} = \left(x+\sqrt{x^2+c^2}\right)$$

и вводя обозначение R_{pkl} для расстояния от точки наблюдения до вершины (x_p, y_k, z_l), получаем окончательно

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(y_k-q_y)(z_l-q_z)}{(x_p-q_x)R_{pkl}},\\
a_{2,2} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(x_p-q_x)(z_l-q_z)}{(y_k-q_y)R_{pkl}},\\
a_{3,3} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}\arctan\frac{(x_p-q_x)(y_k-q_y)}{(z_l-q_z)R_{pkl}},\\
a_{1,2} &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}ln\big(z_l-q_z+R_{pkl}\big),\\
a_{1,3} &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}ln\big(y_k+q_y+R_{pkl}\big),\\
a_{2,3} &= \sum_{p,k,l=1}^{2}(-1)^{p+k+l+1}ln\big(x_p-q_x+R_{pkl}\big).
\end{aligned} \tag{10}$$

Общее число элементарных параллелепипедов может быть очень большим, поэтому для экономии времени счета значения арктангенсов и логарифмов для общих вершин элементарных параллелепипедов определяются лишь один раз вначале счета.

4. Вычисление коэффициентов для шара

Рассмотрим элементарный ферромагнетик, имеющий форму шара радиуса R. Будем считать, что начало исходной прямоугольной системы координат x, y, z находится в центре шара. Точка наблюдения имеет координаты q_1, q_2, q_3.

Матрица коэффициентов $a_{k,n}$, соответствующая данному ферромагнетику и точке наблюдения, представляет собой симметричный тензор второго ранга. Ввиду симметрии шара очевидно, что коэффициенты $a_{k,n}$ зависят только от одного вектора $\mathbf{q} = (q_1,\, q_2,\, q_3)$, проведенного из центра в точку наблюдения.

По аналогии с [2] можно показать, что любой симметричный тензор второго ранга $a_{k,n}$, зависящий только от одного вектора $\mathbf{q}$, имеет следующий вид:

$$a_{k,n} = \alpha(q)\delta_{k,n} + \beta(q)q_k q_n/q^2, \tag{11}$$

где $q \equiv |\mathbf{q}|$. Таким образом, для определения $a_{k,n}$ в любой точке наблюдения (q_1, q_2, q_3) достаточно знать зависимости $\alpha(q)$ и $\beta(q)$.

Рассмотрим конкретный случай $\mathbf{q} = (0,\, 0,\, q)$ и вычислим два коэффициента $a_{1,1}$ и $a_{3,3}$. Из (9) следует

$$a_{1,1} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_E}\frac{x}{R^3}dS_x, \quad a_{3,3} = \frac{1}{4\pi}\int_{S_E}\frac{z-q}{R^3}dS_z, \tag{12}$$

где R — расстояние от точки наблюдения до точки интегрирования

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - q)^2};$$

dS_x, dS_y, dS_z — компоненты вектора площадки сферы в системе координат x, y, z.

Введем сферическую систему координат $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi < 2\pi$. Координаты x, y, z точки на поверхности шара и расстояние R выражаются через θ и ϕ:

$$\begin{aligned} x &= R_E \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi, \\ y &= R_E \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi, \\ z &= R_E \cdot \cos\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

$$R = R_E\sqrt{1 + d^2 - 2d \cdot \cos\theta}, \tag{14}$$

где d — безразмерная величина, равная отношению расстояния от центра шара до точки наблюдения к величине радиуса шара

$$d = q/R_E. \tag{15}$$

Вектор $d\mathbf{S}$ в системе координат x, y, z определяется через сферические координаты:

$$d\mathbf{S} = (\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\phi})d\theta d\phi, \tag{16}$$

где $\mathbf{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки (x, y, z) на сфере.

Из (13) и (16) для компонентов вектора $d\mathbf{S}$ следуют выражения

$$\begin{aligned} dS_x &= R_E^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \cos\phi \cdot d\theta d\phi, \\ dS_y &= R_E^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \sin\phi \cdot d\theta d\phi, \\ dS_z &= R_E^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta d\phi. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя (13), (14) и (17) в (12) и используя равенство

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \cdot d\phi = \pi,$$

получаем

$$a_{1,1} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{\sin^3\theta}{R^3} d\theta,$$

$$a_{3,3} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{(\cos\theta - d) \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta}{R_d^3} d\theta d\phi,$$

где

$$R_d = \sqrt{1 + d^2 - 2d \cdot \cos\theta}.$$

Непосредственное интегрирование дает следующий результат:
при $d > 1$, т.е. когда точка наблюдения находится вне шара,

$$a_{1,1} = \frac{1}{3\,d^3}, \;\; a_{3,3} = -\frac{2}{3\,d^3}; \tag{18}$$

для точки наблюдения, находящейся внутри или на поверхности шара ($d \leq 1$),

$$a_{1,1} = a_{3,3} = \frac{1}{3}. \tag{19}$$

Подставляя вычисленные значения $a_{1,1}$, $a_{3,3}$ в (11) и используя (15), для точек вне шара ($q > R_E$) получаем

$$\alpha(q) = \frac{R_E^3}{3\,q^3},\ \beta = -\frac{R_E^3}{q^3},$$

для любой точки внутри шара ($q \leq R_E$),

$$\alpha(q) = \frac{1}{3},\ \beta = 0.$$

Таким образом, расчеты коэффициентов вне шара можно вести по формуле

$$a_{k,n} = \frac{R_E^3}{3\,q^3}\delta_{k,n} - \frac{R_E^3}{q^3} q_k q_n / q^2, \tag{20}$$

внутри шара

$$a_{k,n} = \frac{1}{3}\delta_{k,n}. \tag{21}$$

Если имеется множество шаров $\Omega = \{V_j\,(j = 1, \dots N\}$ радиусов R_j, то для решения системы уравнений (4) нам необходимы значения $a_{k,n}(i,j)$, вычисленные поочередно для каждого из V_j для всех точек наблюдений, расположенных в центральных точках V_i, $i = 1, \dots N$, в исходной системе координат x, y, z.

Используя (20), (21), для $i \neq j$ можно записать

$$a_{k,n}(i,j) = \frac{R_j^3}{3\,q(i,j)^3}\delta_{k,n} - \frac{R_j^3}{q(i,j)^3} q_k(i,j) q_n(i,j)/q(i,j)^2,$$

для $i = j$:

$$a_{k,n}(i,j) = \frac{1}{3}\delta_{k,n},$$

где R_j — радиус j-го шара, $q(i,j)$ — расстояние между i-м и j-м шарами.

5. Результаты расчетов

В таблице приведены результаты расчетов кэффициента $a_{1,1}$ и компоненты H_x на примере ферромагнетика, имеющего форму куба и помещенного в однородное магнитное поле, направленное вдоль оси OX в системе координат с началом в центре куба. Грани куба перпендикулярны к осям координат.

В первой колонке находятся номера точек наблюдений, равномерно расположенных на оси OX в направлении распространения магнитного поля. В следующих двух колонках — значения коэффициентов $a_{1,1}^A$ и $a_{1,1}^P$, вычисленных по аналитическим формулам и приближенно по формуле Гаусса для двойных интегралов. Соответствующие этим коэффициентам значения компоненты H_x напряженности магнитного поля — в следующих двух колонках таблицы Двойными линиями выделены данные для точек внутри куба.

Из таблицы видно, что значения H_x в граничных точках внутри куба резко отличаются (вплоть до изменения знака) от H_x в соседних точках вне куба, что соответствует

n	$a^A_{1,1}$	$a^P_{1,1}$	H^T_x	H^P_x
1	−0.13	−0.12	70.4	69.8
2	−0.17	−0.14	76.5	73.1
3	−0.23	−0.14	84.4	74.2
4	−0.29	−0.12	94.4	69.7
5	−0.37	−0.03	106.1	55.6
6	0.54	0.10	-31.1	34.0
7	0.46	0.21	-19.4	14.7
8	0.40	0.27	−9.9	4.2
9	0.36	0.29	−3.3	0.9
10	0.34	0.30	−0.1	0.4
11	0.34	0.30	−0.1	0.4
12	0.36	0.29	−3.3	0.9
13	0.40	0.27	−9.9	4.2
14	0.46	0.21	-19.4	14.7
15	0.54	0.10	-31.1	34.0
16	−0.37	−0.03	106.1	55.6
17	−0.29	−0.12	94.4	69.7
18	−0.23	−0.14	84.4	74.2
19	−0.17	−0.14	76.5	73.1
20	−0.13	−0.12	70.4	69.8

действительности. По мере удаления точки наблюдения от куба напряженность H приближается к напряженности H^0 исходного поля. Значения компоненты H^A_x, вычисленные вблизи граней куба, значительно отличаются от соответствующих значений H^P_x, что подтверждает необходимость использования аналитических выражений для расчета коэффициентов. Если для одного элементарного ферромагнетика экономии времени счета по аналитическим формулам не наблюдается, то для большого числа разбиений ферромагнитных конструкций следует ожидать экономию времени из следующих соображений. При вычислении коэффициентов по формуле Гаусса число обращений к вычислению подынтегральной функции для граней куба равно 24, а с использованием аналитических выражений значения элементарных функций и расстояний вычисляются лишь 8 раз для вершин куба. При большом числе элементарных ферромагнетиков эти значения в общих вершинах могут быть определены лишь один раз вначале счета.

Проверка аналитических выражений для шара осуществлялась путем определения коэффициентов из выражений (20), (21) и численным интегрированием с очень мелким шагом. Получено полное совпадение результатов, кроме случаев, когда точки наблюдения находятся в непосредственной близости от поверхности сферы и центра шара. В этих случаях наблюдается значительное расхождение результатов.

Заключение

Из всего сказанного можно сделать вывод о целесообразности использования аналитических выражений для коэффициентов.

Следует заметить, что в данной статье нами не была описана методика решения дискретизованной системы уравнений магнитостатики (4). Существует множество методов решения подобных систем. Ключевым моментом здесь является именно получение коэффициентов уравнений. Так как они определяются во взаимосвязи каждого элементарного объема со всеми остальными в трехмерном пространстве, число их огромно. Если же вести еще речь о повышении точности, то решение рассмотренной задачи представляет определенные трудности даже для суперкомпьютеров.

В работе получены следующие результаты.

1. Для элементарных ферромагнетиков, имеющих форму параллелепипеда, получены аналитические выражения для коэффициентов, равные конечным суммам значений элементарных функций в вершинах параллелепипедов. Сравнение с методиками грубых приближений путем усреднения по вершинам так, как это делалось ранее в алюминиевой отрасли, дает очевидное преимущество точных методик [3–6].

2. Для шарообразных ферромагнетиков точные выражения для коэффициентов имеют простой вид. Коэффициенты для шара могут быть использованы для численного моделирования магнитного поля от смеси шарообразных ферромагнетиков. Кроме того, методика решения уравнений магнитостатики для ферромагнетиков, имеющих форму шара, может стать предпосылкой для дальнейшей модификации существующих методов решения задач магнитостатики для ферромагнетиков, имеющих достаточно гладкую выпуклую форму.

Список литературы

[1] Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984.

[2] Березин Ю.А., Жуков В.П. О влиянии вращения на конвективную устойчивость крупномасштабных возмущений в турбулентной жидкости // МЖГ. 1989. № 4. С. 3–9.

[3] Альчиков В.В., Платонов В.В. Программа компьютерного моделирования магнитных полей электролизеров с учетом влияния ферромагнетиков. Алюминий Сибири-95: Сб. Докл. на междунар. сем. 1995. С. 186–192.

[4] Альчиков В.В. Задача расчета магнитных полей алюминиевых электролизеров с учетом влияния ферромагнитных конструкций // Алюминий Сибири-99: Сб. докл. на междунар. сем. 1999. С. 186–192.

[5] Альчиков В.В. Вывод аналитических выражений для интегралов в расчетах магнитных полей алюминиевых электролизеров с учетом влияния ферромагнетиков // Кубатурные формулы и их приложения: Тез. докл. V Междунар. семинара-совещания / Под ред. М.В. Носкова. Красноярск: КГТУ, 1999. С. 3, 4.

[6] Альчиков В.В. О результатах численного моделирования магнитостатических полей алюминиевых электролизеров // Алюминий Сибири 02: Сб. докл. на междунар. конф. 2002.

Поступила в редакцию 10 февраля 2003 г.,
в переработанном виде — 29 апреля 2003 г.