Вычислительные технологии **Том 8, № 4, 2003**

ФАЗОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. А. Замышляева
Челябинский государственный университет, Россия
e-mail: `alzam@csu.ac.ru`

Cauchy problem for the linear non-homogeneous second order Sobolev type equation is considered. The algorithm for construction of the phase space for this equation is suggested, the simple solvability Cauchy problem is determined. All abstract results are illustrated to an initial boundary value problem for Boussinesq — Love equation modeling the longitudinal oscillations of a beam.

Введение

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{G}$ — банаховы пространства; операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{G})$ (т.е. линейны и непрерывны). Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \tag{0.1}$$

для линейного неоднородного уравнения соболевского типа второго порядка

$$A\, v'' = B_1 v' + B_0 v + f, \tag{0.2}$$

где вектор-функция $f : (-T, T) \to \mathcal{G}$ будет уточнена в дальнейшем.

Пусть существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{V})$, тогда уравнение (0.1) тривиально редуцируется к эквивалентному уравнению

$$v'' = C_1 v' + C_0 v + h, \tag{0.3}$$

где $C_k = A^{-1}B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ $(\equiv \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{G}))$.

Как показано в [1], однородная задача Коши (0.1),(0.3) однозначно разрешима, если существует сильно непрерывное семейство M, N-функций, порожденных операторами C_1, C_0. При этом решение имеет вид

$$v(t) = M(t)v_0 + N(t)v_1,\ v_1,\ v_0 \in \mathcal{V}.$$

Нас интересует разрешимость задачи (0.1),(0.2) в случае необратимости оператора A. Отметим, что в последнее время интерес к задаче (0.1),(0.2) значительно возрос [2–4]. Наш подход отличается от методов, описанных в упомянутых выше работах, и заключается в построении фазового пространства уравнения (0.2). Впервые попытка изучения фазового пространства уравнения соболевского типа высокого порядка была сделана в [5, 6]. Здесь согласно идеологии М. В. Келдыша уравнение редуцировалось к эквивалентному ему уравнению соболевского типа первого порядка, которое затем изучалось методами, описанными в [7]. В настоящей работе предложен более простой алгоритм построения фазового пространства уравнения (0.2).

Статья содержит четыре параграфа. В первом приводятся свойства полиномиально A-ограниченных операторных пучков, введенных в рассмотрение в [5], и строятся проекторы, расщепляющие пространства $\mathcal{V}$, $\mathcal{G}$ и действия операторов A, B_1, B_0. Второй параграф посвящен фазовому пространству однородного (т.е. $f \equiv 0$) уравнения (0.2). В третьем установлена однозначная разрешимость задачи (0.1),(0.2). В четвертом параграфе все абстрактные результаты прилагаются к начально-краевой задаче для уравнения Буссинеска — Лява.

Все рассмотрения проводятся в вещественных пространствах, однако при рассмотрении спектральных вопросов вводится их естественная комплексификация; все контуры ориентированы движением “против часовой стрелки” и ограничивают области, лежащие “слева” при таком движении; символами $\mathbb{I}$ и $\mathbb{O}$ обозначены единичный и нулевой операторы, области определения которых ясны из контекста.

1. Полиномиально A-ограниченные пучки операторов и проекторы

Обозначим через $\mathbf{B}$ пучок операторов (B_1, B_0). Множества $\rho^A(\mathbf{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}; \mathcal{V})\}$ и $\sigma^A(\mathbf{B}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \rho^A(\mathbf{B})$ будем называть соответственно A-резольвентным множеством и A-спектром пучка $\mathbf{B}$. Введем в рассмотрение оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\mathbf{B}) = (\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\mathbf{B})$, которую назовем *A-резольвентой пучка* $\mathbf{B}$.

З а м е ч а н и е 1.1. Нетрудно показать, что множество $\rho^A(\mathbf{B})$ всегда открыто, поэтому A-спектр пучка $\mathbf{B}$ всегда замкнут.

Теорема 1.1. *A-резольвента пучка* $\mathbf{B}$ *аналитична на* $\rho^A(\mathbf{B})$.

Определение 1.1. Пучок операторов $\mathbf{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора* A (или просто *полиномиально A-ограниченным*), *если*

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\mathbf{B}) \in \mathcal{L}(\mathcal{G}; \mathcal{V})).$$

З а м е ч а н и е 1.2. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}; \mathcal{V})$, то пучок $\mathbf{B}$ будет полиномиально A-ограниченным в силу очевидной полиномиальной ограниченности пучка $(A^{-1}B_1, A^{-1}B_0)$. Если операторы $A, B_1 \equiv \mathbb{O}$ и существует оператор $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}; \mathcal{V})$, то пучок $\mathbf{B}$ также будет полиномиально A-ограниченным. Однако пучок $\mathbf{B}$, где $B_k \equiv \mathbb{O}, k = 0, 1$, не является $\mathbb{O}$-ограниченным.

Наконец, введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Пусть пучок $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен. Тогда

$$\int_\gamma R^A_\mu(\mathbf{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, \tag{A}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

З а м е ч а н и е 1.3. Пусть существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{V})$, тогда условие (A) выполняется.

Пусть пучок $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено (A). Фиксируем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mu A R^A_\mu(\mathbf{B}) d\mu.$$

Лемма 1.1. *Операторы $P \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{G})$ — проекторы.*

Доказательство. В силу "римановости" интеграла оператор $P \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. В силу теоремы 1.1, условия (A) и теоремы Коши имеем

$$P^2 = (2\pi i)^{-2}\int_\gamma R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu \int_{\gamma'} R^A_\lambda(\mathbf{B})\lambda A d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-2}\int_\gamma\int_{\gamma'} R^A_\mu(\mathbf{B})(\mu A + \lambda A - B_1)R^A_\lambda(\mathbf{B})\lambda A d\lambda d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-2}\int_\gamma\int_{\gamma'} \frac{1}{\mu-\lambda}\lambda(R^A_\lambda(\mathbf{B}) - R^A_\mu(\mathbf{B}))A d\lambda d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu = P,$$

где контур $\gamma' = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_1 > r\}$.

Для оператора Q лемма доказывается аналогично. □

Положим $\mathcal{V}^0 = \ker P$, $\mathcal{G}^0 = \ker Q$, $\mathcal{V}^1 = \mathrm{im} P$, $\mathcal{G}^1 = \mathrm{im} Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^1$. Через A^k (B^k_l) обозначим сужение оператора A, B_l на $\mathcal{V}^k$, $k = 0,1;$ $l = 0,1$.

Теорема 1.2. *(i)* $A^k \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^k;\mathcal{G}^k)$, $k = 0,1$*;*

(ii) $B^k_l \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^k;\mathcal{G}^k)$, $k = 0,1$, $l = 0,1$*;*

(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^1;\mathcal{V}^1)$.

Доказательство.

(i) В силу непрерывности оператора A

$$AP = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma A R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu = QA.$$

(ii) Фиксируем $l = 0,1$. Тогда в силу (A)

$$B_l P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma B_l R^A_\mu(\mathbf{B})\mu A d\mu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma B_l R^A_\mu(\mathbf{B})(\mu^2 A - \mu B_1 - B_0)\frac{d\mu}{\mu},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu A R^A_\mu(\mathbf{B}) B_l d\mu = Q B_l.$$

(iii) Обратным к A^1 является сужение оператора

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \mu R^A_\mu(\mathbf{B}) d\mu$$

на подпространство $\mathcal{G}^1$. □

Обозначим через $\rho_k^A(\mathbf{B})$, $\sigma_k^A(\mathbf{B})$ A^k-резольвентное множество и A^k-спектр пучка $\mathbf{B}^k = (B_1^k, B_0^k),\ k = 0, 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. $\sigma_0^A(\mathbf{B}) = \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$K(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{R_\mu^A(\mathbf{B})}{\mu - \lambda} d\mu,$$

где контур $\gamma' = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = \max\{r, |\lambda| + 1\}\}$. Пусть $u \in \mathcal{V}^0$, тогда $\forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$K(\lambda)(\lambda^2 A - \lambda B_1 - B_0)u = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{u}{\mu - \lambda} d\mu - Pu = u.$$

Теперь пусть $g \in \mathcal{G}^0$,

$$(\lambda^2 A - \lambda B_1 - B_0) K(\lambda) g = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma'} \frac{g}{\mu - \lambda} d\mu - Qg = g. \qquad \square$$

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Существует оператор* $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^0; \mathcal{V}^0)$.

Доказательство. В силу следствия 1.1 точка $0 \in \rho_0^A(\mathbf{B})$. $\square$

Обозначим $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0,\ H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0,\ G_k = (A^1)^{-1} B_k^1,\ k = 0, 1$, и построим оператор-функции

$$R_{\mu,k}^A(\mathbf{B}) = (\mu^2 A^k - \mu B_1^k - B_0^k)^{-1},\ k = 0, 1.$$

Очевидно,

$$R_\mu^A(\mathbf{B}) = R_{\mu,0}^A(\mathbf{B})(\mathbb{I} - Q) + R_{\mu,1}^A(\mathbf{B}) Q. \tag{1.1}$$

В силу следствия 1.1 $R_{\mu,0}^A(\mathbf{B})$ является целой функцией. Поэтому представим ее рядом Тейлора

$$R_{\mu,0}^A(\mathbf{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty} (\mu^2 H_0 - \mu H_1)^k (B_0^0)^{-1}, \tag{1.2}$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте в $\mathbb{C}$. Операторы $G_k \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^1),\ k = 0, 1, ..., n-1$ по построению. Поэтому $R_{\mu,1}^A(\mathbf{B})$ можно представить рядом Неймана

$$R_{\mu,1}^A(\mathbf{B}) = \mu^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu^{-1} G_1 + \mu^{-2} G_0)^k (A^1)^{-1}, \tag{1.3}$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте, лежащем вне некоторого круга с центром в начале координат. В силу (1.1)–(1.3) доказано

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Существует* $b \in \mathbb{R}_+$ $(b \geq a)$ $\forall \mu \in \mathbb{C}$ $(|\mu| > b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow R_\mu^A(\mathbf{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty} (\mu^2 H_0 - \mu H_1)^k (B_0^0)^{-1} (\mathbb{I} - Q) + \mu^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\mu^{-1} G_1 + \mu^{-2} G_0)^k (A^1)^{-1} Q. \tag{1.4}$$

Определение 1.2. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2\}$ следующим образом:

$$K_0^1 = \mathbb{I},\ K_0^2 = \mathbb{I},$$

$$K_1^1 = H_0,\ K_1^2 = -H_1,$$
$$K_{q+1}^1 = K_q^2 H_1,\ K_{q+1}^2 = K_q^1 - K_q^2 H_2.$$

Определение 1.3. Точка ∞ называется:

(i) *устранимой особой точкой* A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_1^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_1^2 \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_p^1 \not\equiv \mathbb{O}$, $K_p^2 \not\equiv \mathbb{O}$, но $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$.

(iii) *существенно особой точкой* A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, если $K_k^2 \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 1.4. В силу следствия 1.3 и определения 1.3 существует $b \in \mathbb{R}_+$ ($b \geq a$) $\forall \mu \in \mathbb{C}$ ($|\mu| > b$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R_\mu^A(\mathbf{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k K_k^2 (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q) +$$
$$+\mu^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^{-1}S_1 + \mu^{-2}S_0)^k (A^1)^{-1} Q.$$

2. Фазовое пространство

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \tag{2.1}$$

для уравнения

$$Av'' = B_1 v' + B_0 v. \tag{2.2}$$

Решение $v \in C^2(\mathbb{R};\mathcal{V})$ уравнения (2.2) называется решением задачи (2.1),(2.2), если оно удовлетворяет (2.1).

Определение 2.1. Подпространство $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ называется фазовым пространством уравнения (2.2), если:

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (2.2) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $v(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любых $v_0, v_1 \in \mathcal{P}$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2).

З а м е ч а н и е 2.1. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$, то в силу непрерывности операторов B_1, B_0 фазовым пространством уравнения (2.2) служит все пространство $\mathcal{V}$.

Согласно теореме 1.2 имеют место расщепления пространств $\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \oplus \mathcal{V}^1$ и $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 \oplus \mathcal{G}^1$, расщепление действий операторов $A^k \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^k;\mathcal{G}^k)$, $\quad B_l^k \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^k;\mathcal{G}^k) \quad k,l = 0,1$, существуют операторы $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^1;\mathcal{V}^1)$ и $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G}^0;\mathcal{V}^0)$.

Теорема 2.1. *Пусть пучок* $\mathbf{B}$ *полиномиально* A*-ограничен и выполняется* (A)*, причем* ∞ *— полюс порядка* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ *его* A*-резольвенты. Тогда фазовое пространство уравнения (2.2) совпадает с образом проектора* P.

Доказательство. По теореме 1.2 и следствию 1.2 уравнение (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$H_0 u'' = H_1 u' + u, \tag{2.3}$$
$$w'' = S_1 w' + S_0 w, \tag{2.4}$$

где $u = (\mathbb{I} - P)v$, а $w = Pv$. Пусть $v \in C^2(\mathbb{R};\mathcal{V})$ — решение уравнения (2.2), представим его в виде $v = u + w$ и докажем, что $u = u(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Из (2.3) следует, что

$$u = K_1^1 u'' + K_1^2 u'.$$

Покажем, что

$$u = K_k^1 u^{(k+1)} + K_k^2 u^{(k)} \tag{2.5}$$

при любом $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что при $k = q$ это верно, и докажем при $k = q + 1$. В силу (2.3) $u^{(q)} = H_0 u^{(q+2)} - H_1 u^{(q+1)}$, поэтому

$$u = K_q^1 u^{(q+1)} + K_q^2 (H_0 u^{(q+2)} - H_1 u^{(q+1)}) = K_{q+1}^1 u^{(q+2)} + K_{q+1}^2 u^{(q+1)}.$$

Так как ∞ — полюс порядка p A-резольвенты пучка $\mathbf{B}$, то в силу определения 1.3 из (2.5) при $k = p + 1$ получаем, что $u(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Итак, любое решение $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{V})$ уравнения (2.2) лежит в $\mathcal{V}^1$ $(= \mathrm{im}P)$, т.е. $v(t) \in \mathcal{V}^1$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Теперь пусть $v_k \in \mathcal{V}^1,\ k = 0, 1$. Тогда в силу классических результатов существует единственное решение задачи (2.1), (2.2), которое к тому же имеет вид

$$w(t) = M(t)v_0 + N(t)v_1,$$

где $M(t), N(t)$ — семейство невырожденных M, N-функций на подпространстве $\mathcal{V}^1$. Очевидно, что вектор-функция $v = 0 + w$ будет единственным решением задачи (2.1), (2.2). □

3. Задача Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1 \tag{3.1}$$

для неоднородного уравнения соболевского типа

$$Av'' = B_1 v' + B_0 v + f, \tag{3.2}$$

где вектор-функцию $f : (-T, T) \to \mathcal{F}$ определим позже.

Пусть пучок операторов $\mathbf{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется условие (A), тогда согласно теореме 1.2. задача (3.1),(3.2) распадается на две независимые задачи:

$$H_0 u'' = H_1 u' + u + (B_0^0)^{-1} f^0, \quad u(0) = v_0^0, u'(0) = v_1^0, \tag{3.3}$$

$$w'' = S_1 w' + S_0 w + (A^1)^{-1} f^1, \quad w(0) = v_0^1, w'(0) = v_1^1, \tag{3.4}$$

где операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0,\ H_1 = (B_0^0)^{-1} B_1^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^0),\ S_0 = (A^1)^{-1} B_0^1,\ S_1 = (A^1)^{-1} B_1^1 \in \mathcal{L}(\mathcal{V}^1)$; вектор-функции $u = (I - P)v, f^0 = (I - Q)f,\ w = Pv,\ f^1 = Qf$; векторы $v_l^k \in \mathcal{V}^k, \quad k, l = 0, 1$.

Кроме того, существует аналитическое семейство вырожденных M, N-функций однородного уравнения (3.2) [8].

Рассмотрим сначала задачу (3.3). Пусть ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ резольвенты $R_\mu^A(\mathbf{B})$, тогда в силу определения 1.3 операторы $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O},\ K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$. Пусть $f^0 \in C^{p+2}((-T, T); \mathcal{F}^0)$. Рассмотрим множества

$$\mathcal{M}_f^k = \{v \in \mathcal{V} :\ (\mathbb{I} - P)v = -\sum_{l=0}^{p} K_l^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^{l+k}}{dt^{l+k}} (\mathbb{I} - Q) f(0)\},$$

$$k = 0, ..., n - 1.$$

Лемма 3.1. *Множество* $\mathcal{M}_f^k$ *— простое аффинное многообразие, моделируемое подпространством* $\mathcal{V}^1$, $k = 0, 1, ..., n-1$.

Покажем, что вектор-функция

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t) \tag{3.5}$$

является решением уравнения (3.3). Продифференцируем уравнение (3.3) $p-1$ раз, учитывая, что

$$u^{(k)} = H_0 u^{(k+2)} - H_1 u^{(k+1)} - (B_0^0)^{-1} \frac{d^k}{dt^k} f^0(t).$$

Получим

$$u(t) = K_p^1 u^{(p+1)} + K_p^2 u^{(p)} - \sum_{q=0}^{p-1} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f^0(t).$$

Продифференцировав последнее равенство по t, учитывая, что операторы $K_{p+1}^1 \equiv \mathbb{O}$, $K_{p+1}^2 \equiv \mathbb{O}$, получим требуемое.

Если

$$v_k^0 = -\sum_{q=0}^{p} K_q^2 (B_0^0)^{-1} \frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}} f^0(0), \tag{3.6}$$

то вектор-функция (3.5) служит решением задачи (3.3).

Таким образом, доказана

Лемма 3.2. *Пусть пучок операторов* $\mathbf{B}$ *полиномиально* A*-ограничен и выполнено условие* (A)*, причем* ∞ *— полюс порядка* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A*-резольвенты пучка* $\mathbf{B}$*. Пусть вектор-функция* $f^0 \in C^{p+2}((-T,T);\mathcal{F}^0)$*, а начальные значения* $v_k^0 \in \mathcal{V}^0$ *удовлетворяют (3.6),* $k = 0, 1$*. Тогда существует решение* $u \in C^2((-T,T);\mathcal{V}^0)$ *задачи (3.3), которое можно представить в виде (3.5).*

Перейдем к задаче (3.4). Пусть вектор-функция $f^1 \in C([-T,T];\mathcal{F}^1)$, тогда вектор-функция

$$w(t) = M^1(t)v_0^1 + N^1(t)v_1^1 + \int_0^t N^1(t-s)(A^1)^{-1} f^1(s)ds, t \in (-T,T) \tag{3.7}$$

будет решением задачи (3.4). Итак, доказана

Лемма 3.3. *Пусть пучок операторов* $\mathbf{B}$ *полиномиально* A*-ограничен, выполнено* (A) *и вектор-функция* $f^1 \in C((-T,T);\mathcal{F}^1)$*. Тогда существует решение задачи (3.4), которое можно представить в виде (3.7).*

Теорема 3.1. *Пусть пучок операторов* $\mathbf{B}$ *полиномиально* A*-ограничен, выполнено условие* (A)*, причем* ∞ *— полюс порядка* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ A*-резольвенты пучка* $\mathbf{B}$*. Пусть вектор-функция* $f : (-T,T) \to \mathcal{F}$ *такова, что* $f^0 \in C^{p+2}((-T,T);\mathcal{F}^0)$*, и* $f^1 \in C((-T,T);\mathcal{F}^1)$*. Тогда при любых* $v_k \in \mathcal{M}_f^k$*,* $k = 0, 1$*, существует единственное решение задачи (3.1), (3.2), которое можно представить в виде* $v(t) = u(t) + w(t)$*, где* $u(t)$ *определено формулой (3.5), а* $w(t)$ *— формулой (3.7).*

Доказательство. Существование следует из лемм 3.1, 3.2. Для доказательства единственности допустим, что v и $\tilde{v}$ — два решения задачи (3.1), (3.2). Тогда их разность $v - \tilde{v}$ является решением задачи (2.1), (2.2) с нулевыми начальными значениями. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.1, получим $v(t) - \tilde{v}(t) = 0 \; \forall t \in (-T,T)$. $\square$

4. Уравнение Буссинеска — Лява

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\delta\Omega$ класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши — Дирихле

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \Omega,$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \delta\Omega \times \mathbb{R} \tag{4.1}$$

для уравнения

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')v_t + \beta(\Delta - \lambda'')v + g. \tag{4.2}$$

Редуцируя задачу (4.1),(4.2) к задаче (0.1),(0.2), положим

$$\mathcal{V} = \{v \in W_q^{l+2}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \delta\Omega\}, \quad \mathcal{G} = W_q^l(\Omega)$$

или

$$\mathcal{V} = \{v \in C^{l+2+\gamma}(\Omega) : v(x) = 0, x \in \delta\Omega\}, \quad \mathcal{G} = C^{l+\gamma}(\Omega),$$

где $W_q^l(\Omega)$ — пространства Соболева, $1 < q < \infty$, $C^{l+\gamma}(\Omega)$ — пространства Гёльдера, $0 < \gamma < 1$, $l = 0, 1, ...$ Операторы A , B_1 и B_0 зададим формулами $A = \lambda - \Delta$, $B_1 = \alpha(\Delta - \lambda')$, $B_0 = \beta(\Delta - \lambda'')$. При любом $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ операторы $A, B_1, B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{V};\mathcal{G})$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}(= \sigma(\Delta))$ собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа Δ, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности. Через $\{\varphi_k\}$ обозначим соответствующие ортонормированные (в смысле $L^2(\Omega)$) собственные функции. Поскольку $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\Omega)$,

$$\mu^2 A - \mu B_1 - B_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} [(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k)] < \varphi_k, \cdot > \varphi_k,$$

где $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$;

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda \neq \lambda')$;

(iii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$.

Тогда пучок $\mathbf{B} = (B_1, B_0)$ *полиномиально* A*-ограничен.*

Доказательство. Действительно, в случае (i) A-спектр пучка $\mathbf{B}$ $\sigma^A(\mathbf{B}) = \{\mu_k^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, где $\mu_k^{1,2}$ — корни уравнения

$$(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k) = 0. \tag{4.3}$$

В случае (ii) $\sigma^A(\mathbf{B}) = \{\mu_{l,k}^{1,2} : k \in \mathbb{N}\}$, где $\mu_{l,k}^{1,2}$ — корни уравнения (4.3) при $\lambda = \lambda_l$. В случае (iii) $\sigma^A(\mathbf{B}) = \{\mu_{l,k}^{1,2} : k \in \mathbb{N}, k \neq l\}$. □

З а м е ч а н и е 4.1. Как нетрудно видеть, в случае $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda' = \lambda'')$ пучок $\mathbf{B}$ не будет полиномиально A-ограниченным.

Теперь проверим условие (A). В случае (i) существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{G};\mathcal{V})$, поэтому в силу замечания 1.3 (A) выполняется. В случае (ii)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{< \varphi_k, \cdot > \varphi_k d\mu}{(\lambda - \lambda_k)\mu^2 + \alpha(\lambda' - \lambda_k)\mu + \beta(\lambda'' - \lambda_k)} =$$

$$= \sum_{\lambda=\lambda_k} \frac{<\varphi_k, \cdot>}{\alpha(\lambda'-\lambda_k)}\varphi_k \neq \mathbb{O},$$

т.е. (A) не выполняется, поэтому этот случай исключается из дальнейших рассмотрений. В случае (iii) (A) выполняется.

Построим проекторы. В случае (i) $P = \mathbb{I}$ и $Q = \mathbb{I}$, в случае (ii)

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda=\lambda_k} <\varphi_k, \cdot> \varphi_k,$$

а проектор Q имеет тот же вид, но определен на пространстве $\mathcal{G}$. В обоих оставшихся случаях операторы $H_1 = H_0 \equiv \mathbb{O}$, поэтому ∞ — полюс порядка нуль $\mathbf{B}$. Итак, в силу теоремы 3.1 справедлива

Теорема 4.1. *Пусть вектор-функция* $g \in C^\infty((-T,T);\mathcal{G}) \cap C([-T,T];\mathcal{G})$ *и*

(i) $\lambda \notin \sigma(\Delta)$. *Тогда при любых* $v_0, v_1 \in \mathcal{V}$ *существует единственное решение задачи (4.1),(4.2), которое к тому же имеет вид*

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\mu_k^1(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)}e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^2-\mu_k^1)}e^{\mu_k^2 t}\right]\times$$

$$\times <\varphi_k, v_0> \varphi_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{\mu_k^1 t}-e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1-\mu_k^2)} <\varphi_k, v_1> \varphi_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)}-e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)} <\varphi_k, f(s)> \varphi_k ds,\ t \in (-T,T);$$

(ii) $(\lambda \in \sigma(\Delta)) \wedge (\lambda = \lambda') \wedge (\lambda \neq \lambda'')$. *Тогда при любых* $v_0, v_1 \in \mathcal{V}$ *таких, что*

$$\sum_{\lambda=\lambda_k} <\varphi_k, v_0> + \frac{g(0)}{\beta(\lambda''-\lambda_k)} = \sum_{\lambda=\lambda_k} <\varphi_k, v_1> + \frac{g'(0)}{\beta(\lambda''-\lambda_k)} = 0,$$

существует единственное решение задачи (4.1),(4.2), которое к тому же имеет вид

$$v(t) = -\sum_{\lambda=\lambda_k}\frac{<\varphi_k, f(t)>}{\beta(\lambda''-\lambda_k)}\varphi_k +$$

$$+\sum{}' \left[\frac{\mu_k^1(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)}e^{\mu_k^1 t} + \frac{\mu_k^2(\lambda-\lambda_k)+\alpha(\lambda'-\lambda_k)}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^2-\mu_k^1)}e^{\mu_k^2 t}\right]\times$$

$$\times <\varphi_k, v_0> \varphi_k + \sum{}' \frac{e^{\mu_k^1 t}-e^{\mu_k^2 t}}{(\mu_k^1-\mu_k^2)} <\varphi_k, v_1> \varphi_k +$$

$$+\sum{}' \int\limits_0^t \frac{e^{\mu_k^1(t-s)}-e^{\mu_k^2(t-s)}}{(\lambda-\lambda_k)(\mu_k^1-\mu_k^2)} <\varphi_k, f(s)> \varphi_k ds,\ t \in (-T,T),$$

где штрих у знака сумм означает отсутствие членов с номерами k *такими, что* $\lambda = \lambda_k$.

Список литературы

[1] Мельникова И.В. Семейство M, N оператор-функций // Изв. вузов. 1985. № 2. С. 46–52.

[2] Демиденко Г.В., Успенский С.В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

[3] Favini A., Yagi A. Degenerate differential equations in Banach spaces. N. Y., Basel, Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.

[4] Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.

[5] Свиридюк Г.А., Вакарина О.В. Линейные уравнения типа Соболева высокого порядка // Докл. РАН. 1998. Т. 363, № 3. С. 308–310.

[6] Свиридюк Г.А., Вакарина О.В. Задача Коши для линейных уравнений типа Соболева высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 10. С. 1410–1418.

[7] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.

[8] Замышляева А.А. Задача Коши для линейного уравнения соболевского типа второго порядка // Уравнения соболевского типа: Сб. науч. работ. ЧелГУ, 2002. С. 16–29.

Поступила в редакцию 11 марта 2003 г.