

# ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НАГРУЖЕННОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Т. А. БОДНАРЬ

*Технологический институт АлтГТУ, Бийск, Россия*

e-mail: bta@bti.secna.ru

The finite difference method for investigation of the stability of solution of the nonlinear differential equation describing the deformed state by a loaded axial force of an elastic rod of a variable rigidity is considered. The analysis procedure includes the numerical solution of the spectral problem (Euler problem) and the evaluation of the spectral problem of functionals, defining force at which the rod loses the stability, on the eigenvector space. The stability problem of a loaded rod with a rigidity varying according the parabolic law is considered as test.

## 1. Постановка задачи

Деформированное состояние упругого стержня, сжатого осевой силой (рис. 1), описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Pl^2}{EI\rho(x)}y \left( 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{0,5} = 0, \quad (1.1)$$

где  $x$  — координата, совпадающая с искривленной осью стержня;  $y$  — прогиб стержня;  $E$  — модуль упругости;  $I$  — момент инерции фиксированного сечения стержня;  $\rho(x)$  — функция, характеризующая изменение момента инерции по длине стержня ( $EI\rho(x)$  — жесткость стержня в сечении  $x$ );  $l$  — длина стержня. Размерные координаты  $x_1, y_1$  получаются умножением  $x, y$  на  $l$ . В зависимости от способа закрепления концов стержня возможны различные краевые условия. Если концы закреплены шарнирно, то

$$y(0) = 0, y(1) = 0. \quad (1.2)$$

Классическая теория устойчивости тонкого упругого стержня под действием осевого сжимающего давления, в основе которой лежат труды Эйлера, сводится к решению спектральной задачи

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Pl^2}{EI\rho(x)}y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0, \quad (1.3)$$

полученной в результате линеаризации уравнения (1.1).

Спектр задачи (1.3) состоит из дискретных собственных значений  $\lambda_i^2, i = 1, 2, \dots$ , которым соответствуют собственные  $Y_i$  и сопряженные с ними относительно скалярного произведения  $Y_i^*$  векторы. Пространство собственных функций задачи (1.3) наделено скалярным произведением

$$\langle Y_i, Y_j^* \rangle = \int_0^1 Y_i(x) Y_j^*(x) dx. \quad (1.4)$$

В случае ортонормированного пространства  $\langle Y_i, Y_j^* \rangle = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Решением задачи (1.3) будет  $y \equiv 0$ , если только  $k^2 = P l^2 (EI)^{-1}$  не совпадает с собст-

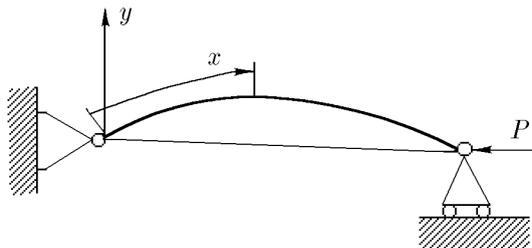


Рис. 1.

венным значением  $\lambda_i^2$  спектра. Если положительные собственные значения расположены в порядке возрастания  $\lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \dots$ , то наименьшее значение силы, при которой задача (1.3) имеет нетривиальное решение, определяется из соотношения  $k^2 = \lambda_1^2$ . В линейной теории устойчивости сила  $P_+ = \lambda_1^2 EI l^{-2}$  определяет точку бифуркации, разделяющую устойчивые решения от неустойчивых. Эту силу называют критической. Для стержня с постоянной жесткостью  $\rho(x) = 1$  спектр задачи (1.3) состоит из собственных значений  $\lambda_i^2 = i^2 \pi^2, i = 1, 2, \dots$  и критическая сила определяется формулой Эйлера  $P_+ = \pi^2 EI l^{-2}$ .

Целесообразно перейти от бифуркационного параметра  $P \in (0, \infty)$  к параметру  $\mu \in (-\infty, +\infty)$  при помощи соотношения

$$\mu = k^2 - \lambda_1^2. \quad (1.4)$$

В этом случае можно утверждать, что решение уравнения (1.3) строго теряет устойчивость, когда параметр  $\mu$ , возрастая, пересекает нуль. Форма стержня в критической точке  $\mu = 0$  определяется собственной функцией  $Y_1$ . Для стержня с постоянной жесткостью  $Y_1 = \sin(\pi x)$ .

Таким образом, анализ устойчивости упругого стержня в линейном приближении связан с решением задачи на собственные значения. В общем случае задача (1.3) представляет собой серьезную математическую проблему, для решения которой используются аналитические и численные методы [1, 2]. Подавляющее большинство аналитических методов являются приближенными. Можно указать на широко распространенный метод Рэлея — Ритца. Доказательство сходимости этих методов опирается на теорию вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве.

Вместе с тем решение линеаризованной задачи (1.3) оставляет без ответа важный вопрос о поведении деформированного стержня в критической точке. Ответ на этот вопрос может быть получен из решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности первой точки бифуркации решения задачи (1.3). Аналитическое решение нелинейной задачи (1.1), (1.2) очень трудно, за исключением случая однородного стержня

( $\rho(x) = 1$ ), для которого известно полное решение нелинейной задачи, полученное явным интегрированием уравнения (1.1) при помощи эллиптических функций [3, 4]. В работе [5] нелинейное уравнение (1.1) решается методом возмущений при более сложном эксцентричном нагружении однородного стержня; полученный при этом частный случай идеального нагружения сравнивается с точным решением. В работе [6] для построения решения нелинейной задачи (1.1), (1.2), описывающей деформированное состояние упругого стержня переменной жесткости, используется метод проекций [7], сущность которого заключается в том, что разыскивается не само решение нелинейной задачи, а та его часть, которая принадлежит нуль-пространству линейного оператора (1.3). Строго доказано [7], что эта часть решения содержит полную информацию относительно его устойчивости в окрестности критической точки  $\mu = 0$ . Метод проекций использован в [8] для изучения устойчивости сжатого стержня, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг оси, проходящей через его концевые точки.

Для метода проекций очень важна точность определения первого собственного значения и соответствующих ему собственного и сопряженного с ним относительно скалярного произведения векторов спектральной задачи (1.3). Построение приближенных решений этой задачи приводит к громоздким выражениям, и аналитическое вычисление собственных значений и собственных функций с высокой точностью очень трудно, за исключением узкого класса функций  $\rho(x)$ , для которых спектральная задача (1.3) имеет точное решение. Так, в работе [9] проведен анализ устойчивости решения нелинейного уравнения (1.1) для случая  $\rho(x) = x^\nu$ ,  $\nu \in (-\infty, +\infty)$ .

В случае произвольной жесткости стержня вопросы точности решения спектральной задачи (1.3) могут быть решены наиболее формализованным образом (изменением числа участков разбиения интервала  $(0, 1)$ ) в рамках метода конечных разностей. При разбиении интервала  $(0, 1)$  на  $n$  участков длины  $h = n^{-1}$  оценка первого собственного значения  $\tilde{\lambda}_1^2$  стремится при  $n \rightarrow \infty$  к  $\lambda_1^2$ . Ошибка определения  $\lambda_1^2$  стремится к нулю, как  $h^2$  [1]. Оценки параметра  $\mu$  и критической нагрузки  $P_+$  находятся из формул

$$\tilde{\mu} = k^2 - \tilde{\lambda}_1^2, \tilde{P}_+ = \tilde{\lambda}_1^2 E I l^{-2}. \quad (1.5)$$

Процедура изучения устойчивости нелинейной задачи (1.1), (1.2) состоит в следующем. Сначала конечно-разностным методом решается спектральная задача (1.3) и определяется первая точка бифуркации решения (критическая точка)  $\tilde{\mu} = 0$ . Затем в окрестности критической точки строится решение нелинейной задачи (1.1), (1.2) и ищется его проекция на пространстве собственных функций линейного оператора (1.3). При помощи этих проекций вычисляются некоторые функционалы, позволяющие определить максимальную нагрузку, при которой стержень теряет устойчивость, и конфигурацию стержня, соответствующую этой нагрузке.

## 2. Анализ устойчивости в линейном приближении

Согласно методу конечных разностей дифференциальному уравнению (1.3) ставится в соответствие система однородных линейных уравнений

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{k^2}{\rho(ih)} y_i = 0, i = 1, 2, \dots, (n - 1), \quad (2.1)$$

для замыкания которой необходимо использовать граничные условия  $y_0 = 0, y_n = 0$ . Удобно записать систему (2.1) в матричном виде

$$A\tilde{y} + k^2 B\tilde{y} = 0, \quad (2.2)$$

где  $A - (n - 1) \times (n - 1)$  — матрица, элементы главной диагонали которой  $a_{ii} = -2$ , элементы слева и справа от главной диагонали  $a_{ii-1} = a_{ii+1} = 1$ , а остальные элементы равны нулю;  $B - (n - 1) \times (n - 1)$  — диагональная матрица с элементами  $b_{ii} = h^2/\rho(ih)$ ;  $\tilde{y}$  — вектор-столбец с элементами  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ .

Таким образом, мы заменили бесконечномерную задачу (1.3) конечномерной задачей на собственные значения (2.2). Такая замена не всегда оправдана, но в данном случае есть гарантия, что оценки собственного значения  $\tilde{\lambda}_1^2$  и собственной функции  $\tilde{Y}_1$ , полученные конечно-разостным методом, могут быть вычислены с требуемой точностью [1, 10]. Оценки функционалов  $\mu, P^*$ , полученные на подпространстве собственных векторов задачи (2.2), будем обозначать  $\tilde{\mu}, \tilde{P}^*$ .

Спектру задачи (2.2)  $\tilde{\lambda}_i^2, i = 1, 2, \dots, n - 1$ , соответствует  $(n - 1)$ -мерное векторное пространство  $\tilde{Y}_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Каждый вектор-столбец  $\tilde{Y}_i$  состоит из  $n - 1$  компонент  $\tilde{Y}_{ij}, j = 1, 2, \dots, n - 1, i$ -го вектора-столбца спектральной задачи (2.2) и двух компонент  $\tilde{Y}_{i0} = \tilde{Y}_{in} = 0$ , отвечающих граничным условиям. Сопряженные относительно скалярного произведения собственные векторы спектральной задачи (2.2)  $\tilde{Y}_i^*, i = 1, 2, \dots, n - 1$ , удовлетворяют условиям нормировки и ортогональности

$$\tilde{Y}_i^T \tilde{Y}_j^* = \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{Y}_{ik} \tilde{Y}_{jk}^* = \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

где верхний индекс T означает транспонирование.

При решении задачи на собственные значения (2.2) мы воспользуемся стандартными алгоритмами системы Matlab. Обоснование математических основ проблемы собственных значений матриц и алгоритмов их вычисления в этой системе приведены в [11]. Из [10, 11] следует, что спектральная задача (2.2) хорошо обусловлена, если только жесткость стержня  $EI\rho(x)$  не изменяется по какому-нибудь экзотическому закону.

В качестве тестовой задачи возьмем стержень с жесткостью, изменяющейся по закону  $\rho(x) = x(1 - x)$ . В этом случае спектральная задача (1.3) решается в замкнутом виде, что дает возможность сравнить результаты численного анализа с точными. Спектр задачи состоит исключительно из дискретных собственных значений  $\lambda_i^2 = i(i + 1), i = 1, 2, \dots$ , которым соответствуют собственные функции

$$Y_i = C(x - x^2) \frac{dP_i(2x - 1)}{dx},$$

где  $C$  — произвольная постоянная;  $P_i(\cdot)$  — сферическая функция (полиномы Лежандра). Собственный и сопряженный с ним векторы, отвечающие наименьшему собственному значению  $\lambda_1^2 = 2$ , возьмем в виде  $Y_1 = x(1 - x), Y_1^* = 30x(1 - x)$ , удовлетворяющем условию нормировки  $\langle Y_1, Y_1^* \rangle = 1$ .

При выборе шага разбиения интервала  $(0, 1)$  остановимся на  $h = 0, 1$  и решим матричное уравнение (2.2). В результате получим оценки  $\tilde{\lambda}_1^2 = 2$ :

$$\tilde{Y}_1 = (0 \quad 0.09 \quad 0.16 \quad 0.21 \quad 0.24 \quad 0.25 \quad 0.24 \quad 0.21 \quad 0.16 \quad 0.09 \quad 0)^T,$$

$$\tilde{Y}_1^* = (0 \ 0.27 \ 0.48 \ 0.63 \ 0.72 \ 0.75 \ 0.72 \ 0.63 \ 0.48 \ 0.27 \ 0)^T.$$

Погрешность определения  $\lambda_1^2$  равна нулю, а  $\max |Y_1(x) - \tilde{Y}_1(x)| < 0.0025$ .

Из (1.4) следует, что при данном законе изменения жесткости по длине стержня решение линейной задачи устойчиво, если  $\mu = k^2 - 2 < 0$ , и неустойчиво, если  $\mu = k^2 - 2 > 0$ . Точке бифуркации  $\mu = 0$  соответствует критическая сила  $P_+ = 2EI l^{-2}$ .

### 3. Устойчивость бифуркационного решения

Известно, что нагруженный осевой силой стержень теряет устойчивость под действием нагрузки, превышающей критическое значение, полученное в линейном приближении [3, 12]. Из теории нелинейных операторных уравнений [13, гл. 6] (в п. 4 этой главы уравнение (1.1) рассматривается в качестве примера) следует, что в случае гладкого нелинейного оператора в окрестности точки ветвления решения линеаризованного уравнения  $\mu = 0$  нелинейная задача имеет при  $\mu \neq 0$  малые ненулевые решения. Анализ устойчивости решения нелинейной задачи (1.1), (1.2), проведенный в [6] методом проекций [7], показал, что потеря устойчивости стержня с постоянной жесткостью происходит при  $P^* = 1.125P_+$ .

Для построения решения нелинейной задачи (1.1), (1.2) в окрестности критической точки воспользуемся методом проекций [7]. Для этого запишем нелинейное уравнение (1.1) с учетом (1.4) в виде

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mu + \lambda_1^2}{\rho(x)} y \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 + O \left( \left( \frac{dy}{dx} \right)^6 \right) \right] = 0, \quad (3.1)$$

полученном после разложения второго слагаемого левой части (1.1) в ряд по степеням  $y, dy/dx$  в точке  $(y, dy/dx) = (0, 0)$ . Помимо тривиального  $y(x) = 0$  уравнение (3.1) имеет ненулевое решение: суперкритическое  $\mu > 0$  или субкритическое  $\mu < 0$ . Для построения решения уравнения (3.1) с учетом (1.2) введем амплитуду  $\varepsilon = \langle y(x), Y_1^*(x) \rangle$  как проекцию решения  $y(x)$  на подпространство, ассоциированное с собственным вектором  $Y_1^*$ . Само решение будем искать в виде рядов по степеням амплитуды

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k \frac{\varepsilon^k}{k!}, \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{\varepsilon^k}{k!}, \quad (3.2)$$

где  $H_k, \mu_k$  — неизвестные коэффициенты разложения, подлежащие определению; при построении решения (3.2) в пространстве собственных векторов задачи (2.2) будем использовать  $\tilde{y}, \tilde{H}_k, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}_k$  вместо  $y(x), H_k, \mu, \mu_k$ .

После подстановки (3.2) в (3.1) и приравнивания нулю сумм слагаемых с одинаковой степенью амплитуды  $\varepsilon$  до третьей степени включительно будем иметь

$$\frac{d^2 H_1}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{\rho(x)} H_1 = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 H_2}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{\rho(x)} H_2 + \frac{2\mu_1}{\rho(x)} H_1 = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 H_3}{dx^2} + \frac{\lambda_1^2}{\rho(x)} H_3 + \frac{3\mu_2}{\rho(x)} H_1 + \frac{3\mu_1}{\rho(x)} H_2 - \frac{3\lambda_1^2}{\rho(x)} H_1 \left( \frac{dH_1}{dx} \right)^2 = 0. \quad (3.5)$$

Решение уравнения (3.3) с учетом условий нормировки и ортогональности  $\langle Y_1, Y_1^* \rangle = 1$ ,  $\langle Y_1, Y_n^* \rangle = 0$  для  $n > 1$  получаем немедленно:  $H_1 = Y_1$ . Неоднородное уравнение (3.4) разрешимо тогда и только тогда, когда в соответствии с теоремой Фредгольма об альтернативе  $\langle \mu_1/\rho(x)H_1, Y_1^* \rangle = 0$ , так как  $Y_1$  — решение соответствующей однородной задачи. Поскольку  $\rho(x) > 0$ ,  $\langle Y_1/\rho(x), Y_1^* \rangle \neq 0$ , то из условий разрешимости уравнения (3.4) следует  $\mu_1 = 0$ .

Из условия разрешимости неоднородного уравнения (3.5)

$$\left\langle \frac{\mu_2 H_1}{\rho(x)} - \frac{\lambda_1^2 H_1}{\rho(x)} \left( \frac{dH_1}{dx} \right)^2, Y_1^* \right\rangle = 0$$

следует

$$\mu_2 = \lambda_1^2 \left\langle \frac{Y_1}{\rho(x)} \left( \frac{dY_1}{dx} \right)^2, Y_1^* \right\rangle \left\langle \frac{Y_1}{\rho(x)}, Y_1^* \right\rangle^{-1}. \quad (3.6)$$

После подстановки выражения для  $\mu_2$  во вторую формулу (3.2) запишем

$$\mu = \frac{\mu_2 \varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3). \quad (3.7)$$

Правая часть (3.6) всегда положительна и, следовательно, решение уравнения (3.1) в окрестности критической точки  $\mu = 0$  устойчиво. Максимальная нагрузка  $P^*$ , при которой стержень с переменной жесткостью теряет устойчивость, находится из уравнения (3.7) с учетом нормировки  $\varepsilon = 1$ . Будем иметь  $\mu = k^2 - \lambda_1^2 = 0, 5\mu_2$  или

$$P^* = \frac{EI\lambda_1^2}{l^2} \left[ 1 + 0,5 \left\langle \frac{Y_1}{\rho(x)} \left( \frac{dY_1}{dx} \right)^2, Y_1^* \right\rangle \left\langle \frac{Y_1}{\rho(x)}, Y_1^* \right\rangle^{-1} \right]. \quad (3.8)$$

Уравнения (3.7), (3.8) определяют функционалы  $\mu_2, P^*$  на подпространстве собственных векторов спектральной задачи (1.3). Если собственные векторы принадлежат задаче (2.2), то кроме скалярного (2.3) определим покомпонентное произведение  $\tilde{Y}_i \cdot \tilde{Y}_j$  двух векторов размерности  $n+1$ , возвращающее вектор-столбец такой же размерности с компонентами  $\tilde{Y}_{i0}\tilde{Y}_{j0}, \tilde{Y}_{i1}\tilde{Y}_{j1}, \dots, \tilde{Y}_{in}\tilde{Y}_{jn}$  (в системе Matlab для покомпонентного умножения матриц используется оператор  $\cdot$ ). Заменяем в уравнении (3.1) производную  $dy/dx$  на вектор-столбец  $\tilde{y}'$  с компонентами  $(y_{i+1} - y_{i-1})/2h$  и представим его с учетом (2.2) в матричном виде

$$A\tilde{y} - (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda}_1^2) B\tilde{y} \left[ 1 - \frac{1}{2} (\tilde{y}' \tilde{y}') + O(\tilde{y}'^4) \right] = 0. \quad (3.9)$$

Теперь после подстановки рядов (3.2) в уравнение (3.9) находим в результате отождествления сумм при одинаковых степенях амплитуды  $\varepsilon$  до третьего порядка включительно

$$(A - \tilde{\lambda}_1^2 B) \tilde{H}_1 = 0, \quad (3.10)$$

$$(A - \tilde{\lambda}_1^2 B) \tilde{H}_2 + 2\tilde{\mu}_1 B \tilde{H}_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$(A - \tilde{\lambda}_1^2 B) \tilde{H}_3 = 3\tilde{\mu}_1 B \tilde{H}_2 + 3\tilde{\mu}_2 B \tilde{H}_1 - 3\tilde{\lambda}_1^2 B \tilde{H}_1 (\tilde{H}_1' \tilde{H}_1). \quad (3.12)$$

Уравнение (3.10) имеет единственное решение  $\tilde{H}_1 = \tilde{Y}_1$ . Условие разрешимости уравнения (3.11)  $\tilde{\mu}_1 Z_1^T \tilde{Y}_1^* = 0$ , где  $Z_1 = B\tilde{Y}_1$  дает  $\tilde{\mu}_1 = 0$ , а из условия разрешимости уравнения (3.12)  $\tilde{\mu}_2 Z_1^T \tilde{Y}_1^* - \tilde{\lambda}_1^2 Z_2^T \tilde{Y}_1^* = 0$ , где  $Z_2 = B\tilde{Y}_1 \left( \tilde{Y}_1^T \tilde{Y}_1^* \right)^{-1}$ , находим

$$\tilde{\mu}_2 = \tilde{\lambda}_1^2 Z_2^T \tilde{Y}_1^* \left( Z_1^T \tilde{Y}_1^* \right)^{-1}. \quad (3.13)$$

Независимо от точности вычисления собственных векторов спектральной задачи (2.2) мы не отличаем амплитуды, вычисленные на подпространствах задач (2.2) и (1.3), так как они имеют одинаковую нормировку  $\varepsilon = \langle Y_1, Y_1^* \rangle = \tilde{Y}_1^T \tilde{Y}_1^* = 1$ . Поэтому после подстановки (3.13) в (3.2) будем иметь

$$\tilde{\mu} = \frac{\tilde{\mu}_2 \varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3). \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) при помощи соотношения (1.5) и нормировки  $\varepsilon = 1$  приводится к виду  $k^2 - \tilde{\lambda}_1^2 = 0, 5\tilde{\mu}_2$ , откуда с учетом (3.13) находим оценку максимальной нагрузки

$$\tilde{P}^* = \frac{EI\tilde{\lambda}_1^2}{l^2} \left[ 1 + 0, 5Z_2^T \tilde{Y}_1^* \left( Z_1^T \tilde{Y}_1^* \right)^{-1} \right]. \quad (3.15)$$

После вычисления функционалов  $\mu_2, \tilde{\mu}_2$  можно решить уравнения (3.5), (3.12) относительно  $H_3, \tilde{H}_3$  соответственно. Используя эти решения, из первого уравнения (3.2) находим конфигурации стержня

$$y(x) = Y_1 \varepsilon + \frac{H_3}{6} \varepsilon^3 \quad (3.16)$$

при максимальной нагрузке  $P^*$  и

$$\tilde{y} = \tilde{Y}_1 \varepsilon + \frac{\tilde{H}_3}{6} \varepsilon^3 \quad (3.17)$$

при оценке  $\tilde{P}^*$ .

Возвращаемся к стержню с жесткостью, изменяющейся по закону  $\rho(x) = x(1-x)$ . Подстановка собственных векторов  $Y_1, Y_1^*$  задачи (1.3) при выбранном законе изменения жесткости в (3.6),(3.8) дает  $\mu_2 = 0, 2, P^* = 1, 1P_+$ . При нахождении функционалов на пространстве спектральной задачи (2.2) использовалась производная

$$\tilde{Y}_1' = (0.90 \quad 0.80 \quad 0.60 \quad 0.40 \quad 0.20 \quad 0.0 \quad -0.20 \quad -0.40 \quad -0.60 \quad -0.80 \quad -0.90)^T.$$

В результате расчетов по формулам (3.13), (3.15) находим  $\tilde{\mu}_2 = 0, 192, \tilde{P}^* = 1.096\tilde{P}^+$ . Отсюда следует, что ошибка определения максимальной нагрузки методом конечных разностей не превышает 0.4% по сравнению с точным методом.

Численное решение дифференциального уравнения (3.5) и решение матричного уравнения (3.12) с правой частью дают

$$H_3 = (0 \quad 0.0297 \quad 0.0336 \quad 0.0261 \quad 0.0175 \quad 0.0135 \quad 0.0175 \quad 0.0261 \quad 0.0336 \quad 0.0297 \quad 0)^T,$$

$$\tilde{H}_3 = (0 \quad 0.0302 \quad 0.0346 \quad 0.0274 \quad 0.0189 \quad 0.0154 \quad 0.0189 \quad 0.0274 \quad 0.0346 \quad 0.0302 \quad 0)^T.$$

Функции  $H_3, \tilde{H}_3$  и условия нормировки  $\varepsilon = 1$  дают возможность определить конфигурацию стержня при максимальной нагрузке комбинированным способом (точное решение спектральной задачи (1.3) и численное решение неоднородного дифференциального уравнения (3.5)) по формуле (3.16) и методом конечных разностей по формуле (3.17). Отличие между  $y$  и  $\tilde{y}$  на отрезке  $x \in (0, 1)$  не превышает 0.45%. Зависимость прогиба стержня от координаты  $x$  и длины стержня  $l$ , рассчитанная по формуле (3.16), приведена на рис. 2.

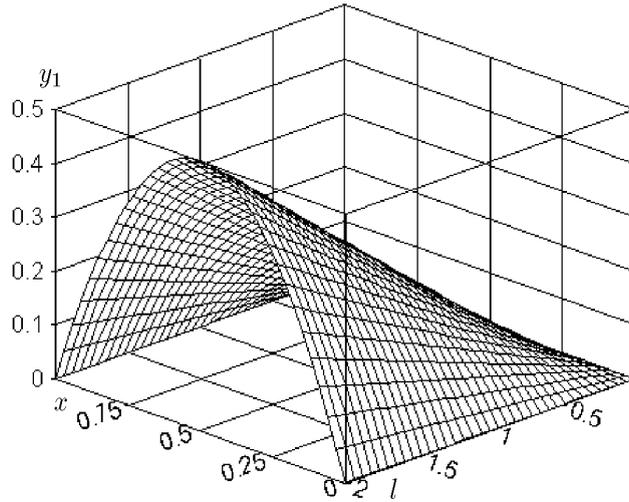


Рис. 2.

## Заключение

Решение задачи об устойчивости стержня переменной жесткости в нелинейной постановке [6] основано на строго доказанных теоремах, гарантирующих точность определения нагрузок  $P_+$ ,  $P^*$  и соответствующих им конфигураций деформированного стержня. Однако, если не удастся явно решить линейризованную задачу на собственные значения (1.3), то построить процесс последовательных приближений при решении спектральной задачи очень трудно.

Непосредственное применение численных методов к решению нелинейной задачи (1.1), (1.2) не дает нужного результата, потому что, как указал Н. Н. Моисеев в послесловии к [7], эти методы перестают действовать в окрестности точки бифуркации, поскольку в этой точке решение теряет единственность. Возникает идея использования численных методов, не выходя за рамки метода проекций. Это можно сделать путем замены дифференциального уравнения (1.3) эквивалентной системой конечно-разностных уравнений, для решения которой разработаны методы и алгоритмы их реализации на ЭВМ [10, 11].

Погрешность вычисления собственных значений и собственных функций линейризованного оператора (1.3), представленного в виде матричного уравнения, уменьшается с увеличением числа участков разбиения интервала  $(0, 1)$ . Если результаты расчета, полученные при  $n$  участках разбиения, совпадают с требуемой точностью с результатами, полученными при  $n + 1$  участках, то процесс вычисления заканчивается. Дальнейший анализ устойчивости связан с определением проекции решения нелинейной задачи (1.1), (1.2) на нуль-пространство оператора (1.3). Эффективность предложенного метода продемонстрирована результатами расчета устойчивости нагруженного стержня с жесткостью, изменяющейся по параболическому закону.

Касаясь применимости конечно-разностного метода к решению прикладных задач, укажем на единственное ограничение: жесткость стержня должна быть непрерывной функцией от координаты, совпадающей с его недеформированной продольной осью. Вообще говоря, это ограничение легко устранимо, и предложенный метод может быть использован для изучения устойчивости стержней с жесткостью, изменяющейся по ступенчатому закону, не допускающему сглаживания функции  $\rho(x)$ . Для этого нужно, чтобы помимо

граничных условий (1.2) были заданы дополнительные условия в точках  $x$ , в которых функция  $\rho(x)$  терпит разрыв. Система конечно-разностных уравнений (2.1) должна быть составлена с учетом этих условий.

## Список литературы

- [1] Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968.
- [2] Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970.
- [3] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
- [4] ТЕОРИЯ ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под ред. Дж. Б. Келлера и С. Антмана. М.: Мир, 1974.
- [5] АСТАПОВ Н.С., КОРНЕВ В.М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. 1996. Т. 37, №2. С. 162–169.
- [6] БОДНАРЬ Т.А. Устойчивость эйлера стержня. Нелинейный анализ // ПМТФ. 1993. Т. 33. №3. С. 134–141.
- [7] ЙОСС Ж., ДЖОЗЕФ Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
- [8] БОДНАРЬ Т.А. Устойчивость вращающегося сжатого стержня // ПМТФ. 2000. Т. 41. №4. С. 190–197.
- [9] БОДНАРЬ Т.А. Об устойчивости эйлера стержня // ПМТФ. 1993. Т. 34. №3. С. 141–149.
- [10] ВОЕВОДИН В.В., КУЗНЕЦОВ Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [11] ГОЛУБ ДЖ., ВАН ЛОУН Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
- [12] АЛФУТОВ Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978.
- [13] ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ анализ / Под. ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972.

*Поступила в редакцию 14 февраля 2002 г.,  
в переработанном виде — 13 августа 2002 г.*