

ДВУМЕРНАЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ МОДЕЛЬ ГИДРОТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА НЕПРОТОЧНОГО ВОДОЕМА*

С. Н. ГЕНОВА

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск, Россия

e-mail: sv@icm.krasn.ru

П. Н. ЛУКАВЕНКО

Красноярский государственный университет, Россия

Two-dimensional in vertical plane wind flow model in non-flowing reservoirs is considered. Numerical algorithm is suggested in Boussinesq approximation and approximation of boundary layer for variable coefficient of vertical turbulence exchange. New variables: stream-function and vorticity are used. The examples of calculations of water temperature and wind flows in stratified reservoir are given.

Существенное влияние на динамику вод в озерах и слабопроточных водоемах оказывает воздействие ветра. В водоемах происходят сложные процессы переноса и перемешивания вод. Для исследования гидротермических процессов в водоемах широко используются двумерные (в вертикальной плоскости) модели в приближении гидростатики [1, 2] и негидростатические модели [3–5].

В настоящей работе рассматривается численный алгоритм для двумерной негидростатической модели с переменным коэффициентом вертикального турбулентного обмена. Приводятся примеры расчетов ветровых течений в водоемах произвольной геометрии.

1. Постановка задачи

1.1. Двумерная в вертикальной плоскости модель

Основные допущения: приближение Буссинеска, приближение твердой крышки. Опускаются члены горизонтального турбулентного обмена. С учетом перечисленных допущений основные уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\rho}{\rho_0} g, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №99-05-64695, Министерства образования РФ и CRDF, грант №REC-002.

© С. Н. Генова, П. Н. Лукавенко, 2002.

Уравнение переноса и диффузии для температуры T :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_{\tau} \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2)$$

Здесь t — время; x, z — прямоугольные координаты, ось z направлена вертикально вниз; U, W — компоненты вектора скорости; p — давление; $\rho = \rho(T)$ — плотность воды; ρ_0 — характерная плотность воды; g — ускорение свободного падения; K, K_{τ} — коэффициенты вертикального турбулентного обмена.

Уравнения (1), (2) дополняются начальными и граничными условиями. В начальный момент задаются распределения всех искомым переменных. На боковых границах ставятся условия непротекания и отсутствия потоков тепла и примесей.

Граничные условия на свободной поверхности ($z = 0$)

$$W = 0, \quad K \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\tau}{\rho_0}, \quad K_{\tau} \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{S_n}{c\rho_0}. \quad (3)$$

Граничные условия на дне ($z = H$)

$$U = 0, \quad W = 0, \quad K_{\tau} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{S_{bt}}{c\rho_0}. \quad (4)$$

Здесь τ — напряжение ветра; S_n — тепловой поток через свободную поверхность; c — удельная теплоемкость воды; S_{bt} — поток тепла через донную поверхность. Теплообмен с атмосферой зависит от метеоданных и определяется по формуле

$$S_n = S_R + S_{ev} + S_c,$$

где S_R — радиационный теплообмен; S_{ev} — затраты тепла на испарение; S_c — конвективный теплообмен. Для определения составляющих теплообмена используются известные формулы [6].

В переменных функция тока ψ и вихрь ω система уравнений (1) записывается в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} + W \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega, \quad (6)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Начальные условия: $\psi(x, z, 0) = \psi_0(x, z)$, $\omega(x, z, 0) = \omega_0(x, z)$. Граничные условия для системы (5), (6) следуют из их аналогов для системы (1):

$$\psi = 0, \quad \omega = \frac{\tau}{K_0 \rho_0} \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (8)$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad \text{при} \quad z = H. \quad (9)$$

На боковых границах для непроточного водоема $\psi = 0$.

Для оценки коэффициента вертикального турбулентного обмена $K(x, z, t)$, учитывающего сдвиговые эффекты и стратификацию, применяется формула Прандтля — Обухова [6]:

$$K = \begin{cases} (0.05h)^2 \sqrt{B} & \text{при } B \geq 0, \\ K_{\min} & \text{при } B < 0 \text{ или } K < K_{\min}, \end{cases} \quad (10)$$

где $B = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$; h — глубина квазиоднородного слоя, находящаяся по первой от поверхности расчетной точке, в которой выполняется условие

$$(0.05z_k)^2 \sqrt{B|_{z=z_k}} \leq K_{\min}, \quad (11)$$

K_{\min} — фоновое значение коэффициента вертикального турбулентного обмена.

Уравнение состояния воды берется в виде

$$\rho = 1 - 1.5 \cdot 10^{-4} T.$$

Напряжение ветра находится по формуле

$$\tau / \rho_0 = 1.25 \cdot 10^{-2} V^2 \quad [\text{см}^2 / \text{с}^2], \quad (12)$$

где V — скорость ветра, м/с.

Для медленных течений в уравнениях движения (1), (5) можно пренебречь нелинейными инерционными членами.

1.2. Одномерная модель температурного режима водоема

Рассмотрим простейший случай формирования вертикальной структуры температурного режима непроточного водоема в одномерном приближении. Распределение температуры воды находится из решения задачи (2)–(4) при $U = 0$ и $W = 0$.

На формирование турбулентной структуры водоемов в основном влияют обрушение поверхностных и внутренних волн, диффузия энергии турбулентности, конвективные процессы, сдвиговые эффекты. Для оценки коэффициента вертикального турбулентного обмена применяется формула (10), в которой

$$B = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

(u, v — горизонтальные составляющие скорости ветровых течений).

Для оценки коэффициента K определим вертикальные градиенты скорости из приближенного решения Экмана для ветровых течений:

$$\begin{aligned} u^{ek} &= \frac{e^{\alpha z}}{2\rho_0 \alpha K_0} [(\tau_x + \tau_y) \cos(\alpha z) + (\tau_y - \tau_x) \sin(\alpha z)], \\ v^{ek} &= \frac{e^{\alpha z}}{2\rho_0 \alpha K_0} [(\tau_y - \tau_x) \cos(\alpha z) + (\tau_x + \tau_y) \sin(\alpha z)], \end{aligned} \quad (13)$$

где τ_x, τ_y — составляющие напряжения трения ветра; K_0 — характерное значение коэффициента вертикального турбулентного обмена; $\alpha = \sqrt{f/K_0}$, f — параметр Кориолиса

($f = 2\omega \sin \varphi$, ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта местности). Из (13) следует

$$\left(\frac{\partial u^{ek}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^{ek}}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\tau}{\rho_0 K_0}\right)^2 e^{-2\alpha z}, \quad \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (14)$$

Глубину верхнего квазиоднородного слоя можно оценить из следующего условия: толщина слоя, в котором $K_0 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right)$ уменьшается в e^π раз, равна толщине верхнего квазиоднородного слоя h_1 . Тогда из (14) получается $h_1 = \pi \sqrt{K_0 / (2f)}$. Предполагая, что $K_0 = K(0)$, находим

$$K_0 = \frac{(0.05\pi)^2 \tau}{\rho_0 \sqrt{4f^2 + (0.05\pi)^4 g \rho_z|_{z=0}}}. \quad (15)$$

Тогда K определяется по (10) при $h = h_1$, $B = \left(\frac{\tau}{\rho_0 K_0} \right)^2 e^{-2\alpha z} - \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}$.

В описанной методике интенсивность вертикального турбулентного обмена определяется действием ветра.

2. Численный алгоритм

Рассматривается разностная сетка, равномерная по глубине и неравномерная по длине: $x_{i+1} = x_i + \Delta x_i$, $z_{j+1} = z_j + \Delta z$ ($i = 1, \dots, ii$, $j = 1, \dots, jj_i$) (рис. 1).

Первые производные функций по x аппроксимируются следующим образом:

$$\left(\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \left(\frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} F(x)_{i+1,j} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} F(x)_{i-1,j} \right) - \frac{\Delta x_{i-1} - \Delta x_i}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} F(x)_{i,j}.$$

Численный алгоритм основан на методе расщепления по физическим процессам. Поле скорости находится из решений уравнений (5)–(7) по известным значениям плотности. Затем определяются температура и плотность. Предполагается, что $K_\tau = K$.

На первом этапе находится коэффициент вертикального турбулентного обмена K по формуле (10). Глубина квазиоднородного слоя h находится из условия (11). Далее рассчитывается вихрь скорости ω . Уравнение (5) описывает два различных физических процесса — конвективный и диффузионный. Для построения численного алгоритма используется

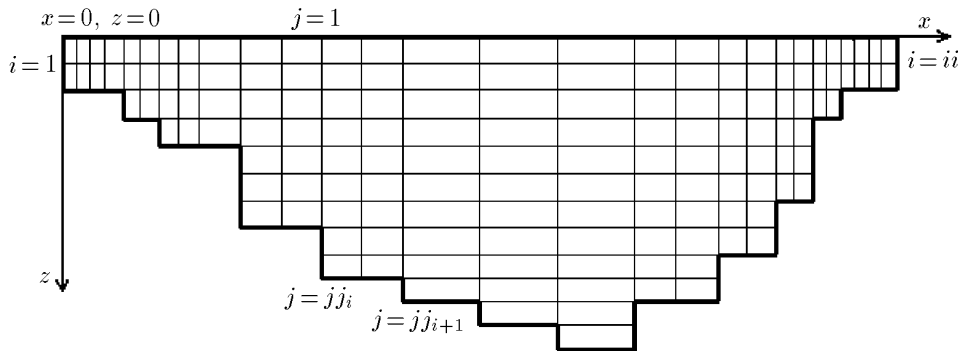


Рис. 1. Разностная сетка для водоема произвольной формы.

метод расщепления по физическим процессам с применением схемы с разностями против потока и неявной схемы для диффузионных процессов.

Конвективный процесс описывается следующей задачей:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + U \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + W \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = 0, \quad \omega_1|_{t=t_n} = \omega_2^n(x, z). \quad (16)$$

Начальное приближение

$$U^0 \equiv 0, \quad W^0 \equiv 0, \quad \omega^0 \equiv 0.$$

Вертикальный турбулентный обмен с учетом напряжения трения ветра на свободной поверхности в каждом створе $x = x_i$ описывается задачей

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} \right), \\ \omega_2 \Big|_{z=0} &= \frac{\tau}{K_0 \rho_0}, \quad \omega_2 \Big|_{z=H_i} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad \omega_2 \Big|_{t=t_n} = \omega_1^{n+1}(x_i, z), \end{aligned} \quad (17)$$

где $H_i = H(x_i)$ — глубина водоема в створе $x = x_i$.

Численный алгоритм решения уравнения для ω , основанный на методе расщепления, представляется в следующем виде. Рассматривается элементарный временной интервал $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, на котором вначале решается задача (16) с помощью схемы с разностями против потока

$$\omega_{1i,j}^{n+1} = \omega_{2i,j}^n - U_{i,j}^{n+1/2} \omega_{1i,j}^* - W_{i,j}^{n+1/2} \omega_{1i,j}^{**}, \quad (18)$$

где

$$\omega_{1i,j}^* = \begin{cases} \frac{\Delta t}{\Delta x_{i-1}} (\omega_{1i,j}^n - \omega_{1i-1,j}^n) & \text{при } U_{i,j}^{n+1} \geq 0, \\ \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\omega_{1i+1,j}^n - \omega_{1i,j}^n) & \text{при } U_{i,j}^{n+1} < 0; \end{cases} \quad (19)$$

$$\omega_{1i,j}^{**} = \begin{cases} \frac{\Delta t}{\Delta z_{j-1}} (\omega_{1i,j}^n - \omega_{1i,j-1}^n) & \text{при } W_{i,j}^{n+1/2} \geq 0, \\ \frac{\Delta t}{\Delta z_j} (\omega_{1i,j+1}^n - \omega_{1i,j}^n) & \text{при } W_{i,j}^{n+1/2} < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь $F_{i,j}^n = F(x_i, z_j, t_n)$, $F_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^n + F_{i,j}^{n+1})$. Схема с разностями против потока явная и устойчивая при условии $c = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

Затем на этом же временном интервале в каждом створе $x = x_i$ решается задача (17) с помощью неявной схемы:

$$\frac{\omega_2^{n+1} - \omega_2^n}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \omega_2^{n+1}}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho^n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial K^n}{\partial x} \frac{\partial W^n}{\partial z} - \frac{\partial K^n}{\partial z} \frac{\partial U^n}{\partial z} \right). \quad (21)$$

Для уравнения (21) применяется разностная схема:

$$\frac{\omega_{2i,j}^{n+1} - \omega_{2i,j}^n}{\Delta t} = \frac{K_{i,j+1}(\omega_{2i,j+1}^{n+1} - \omega_{2i,j}^{n+1}) - K_{i,j-1}(\omega_{2i,j}^{n+1} - \omega_{2i,j-1}^{n+1})}{(\Delta z)^2} + f_{i,j}^n =$$

$$= \frac{K_{i,j+1}\omega_{2i,j+1}^{n+1} - (K_{i,j-1} + K_{i,j+1})\omega_{2i,j}^{n+1} + K_{i,j-1}\omega_{2i,j-1}^{n+1}}{(\Delta z)^2} + f_{i,j}^n,$$

где

$$f_{i,j}^n = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial K_{i,j}^n}{\partial x} \frac{\partial W_{i,j}^n}{\partial z} - \frac{\partial K_{i,j}^n}{\partial z} \frac{\partial U_{i,j}^n}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_{i,j}^n}{\partial x}.$$

Полученная система разностных уравнений решается методом прогонки.

На третьем этапе по найденному вихрю находятся функция тока ψ и составляющие скорости U, W :

$$\frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^{n+1}}{\partial z^2} = -\omega^{n+1}, \quad (22)$$

$$U^{n+1} = \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z}, \quad W^{n+1} = -\frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial x}. \quad (23)$$

Разностный аналог уравнения (22) имеет вид

$$2 \frac{\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j} - \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}} (\Psi_{i,j} - \Psi_{i-1,j})}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} + \frac{\Psi_{i,j+1} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i,j-1}}{\Delta z^2} = -\omega_{i,j}, \quad (24)$$

$$\Psi_{1,j} = \Psi_{i,i,j} = \Psi_{i,1} = \Psi_{i,j,j} = 0.$$

Эта система решается методом последовательной верхней релаксации:

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = (1 - \theta) \Psi_{i,j}^k + W1_i \left[W3_i \Psi_{i-1,j}^{k+1} + W2_i \Psi_{i+1,j}^k + \Psi_{i,j-1}^{k+1} + \Delta z^2 \omega_{i,j} \right],$$

$$W1_i = \frac{\theta}{2 \left(1 + \frac{\Delta z^2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \right)}, \quad W2_i = \frac{2\Delta z^2}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})}, \quad W3_i = \frac{2\Delta z^2}{\Delta x_{i-1} (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})},$$

θ — параметр релаксации ($1 \leq \theta \leq 2$). Составляющие вектора скорости (U, W) определяются по (23).

На четвертом этапе по найденным составляющим скорости находится распределение температуры. Уравнение (2) описывает два различных физических процесса: перенос температуры течением и процесс, связанный с диффузией. Для построения численного алгоритма используется метод расщепления по физическим процессам с применением схемы с разностями против потока и неявной схемы для диффузионных процессов.

Перенос тепла течением описывается следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + U \frac{\partial T_1}{\partial x} + W \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \quad T_1 \Big|_{t=t_n} = T_2^n(x, z). \quad (25)$$

Вертикальный турбулентный обмен с учетом теплообмена через свободную поверхность и с ложем водоема в каждом створе $x = x_i$ описывается задачей

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial T_2}{\partial z} \right],$$

$$K_z \frac{T_2}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{S_n}{c_p \rho_0}, \quad K_z \frac{T_2}{\partial z} \Big|_{z=H_i} = \frac{S_{bt}}{c_p \rho_0}, \quad T_2 \Big|_{t=t_n} = T_1^{n+1}(x_i, z), \quad (26)$$

где $H_i = H(x_i)$ — глубина водоема в створе $x = x_i$.

Задачи (25), (26) решаются с помощью описанных выше схемы с разностями против потока и неявной схемы для диффузионных процессов.

3. Примеры расчетов

Были проведены модельные расчеты по определению термоклина в оз. Ши́ра по одномерной модели (в глубоководной части озера). Использовались реальные метеоданные для этой местности. Результаты расчетов согласуются с натурными данными (рис. 2). На рис. 2 также приведены результаты расчетов распределения температуры по двумерной в вертикальной плоскости модели, которые приближаются к натурным данным. Результаты расчетов температуры воды в глубоководной области с учетом и без учета конвективных членов в уравнении (5) практически совпадают. Из приведенных данных следует, что для оценки температурного режима в глубоководной области водоема можно применять одномерную модель.

Выполнена серия расчетов для водоема прямоугольной формы и водоема произвольной геометрии, схематизирующих оз. Ши́ра в поперечном сечении. Для исследования влияния конвективных членов в уравнениях (1), (5) были выполнены расчеты с учетом и без учета конвективных членов.

Линии тока при скорости ветра 10 м/с приведены на рис. 3, а — 3, в, при скорости ветра 5 м/с — на рис. 3, г; $\Delta T = 16^\circ\text{C}$ — рис. 3, а, 3, б и 3, г, $\Delta T = 26^\circ\text{C}$ — рис. 3, в ($\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$). Воздействие стратификации на картину течения демонстрируется на рис. 3, а и 3, в. Существенное влияние на картину течения в водоемах оказывает скорость ветра (рис. 3, а, и 3, г). На формирование течений в водоемах влияет также и профиль дна водоема, что видно из сравнения результатов, показанных на рис. 3, а и 3, б. Для сложного профиля дна (рис. 3, б) в водоеме образуются придонные циркуляционные зоны, что не наблюдается в водоеме прямоугольной формы (рис. 3, а).

На рис. 4 приведены профили горизонтальной составляющей скорости в среднем створе. Показано сравнение результатов расчетов в непрямоугольной области с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) конвективных членов. Как видно, отличие результатов расчетов по двум моделям незначительное.

Из приведенных расчетов следует, что для исследований гидротермического режима непроточного водоема можно использовать приближение медленных течений.

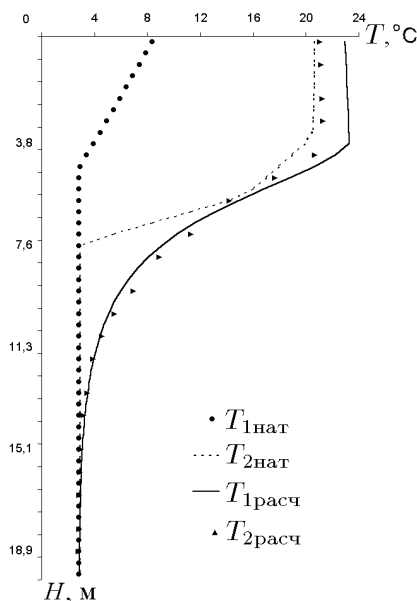


Рис. 2. Распределение температуры по глубине: натурные и расчетные профили; $T_{1\text{нат}}$ — начальное распределение температуры воды, $T_{2\text{нат}}$ — распределение температуры воды через 2 мес., $T_{1\text{расч}}$ и $T_{2\text{расч}}$ — расчетные профили, полученные по одномерной и двумерной моделям.

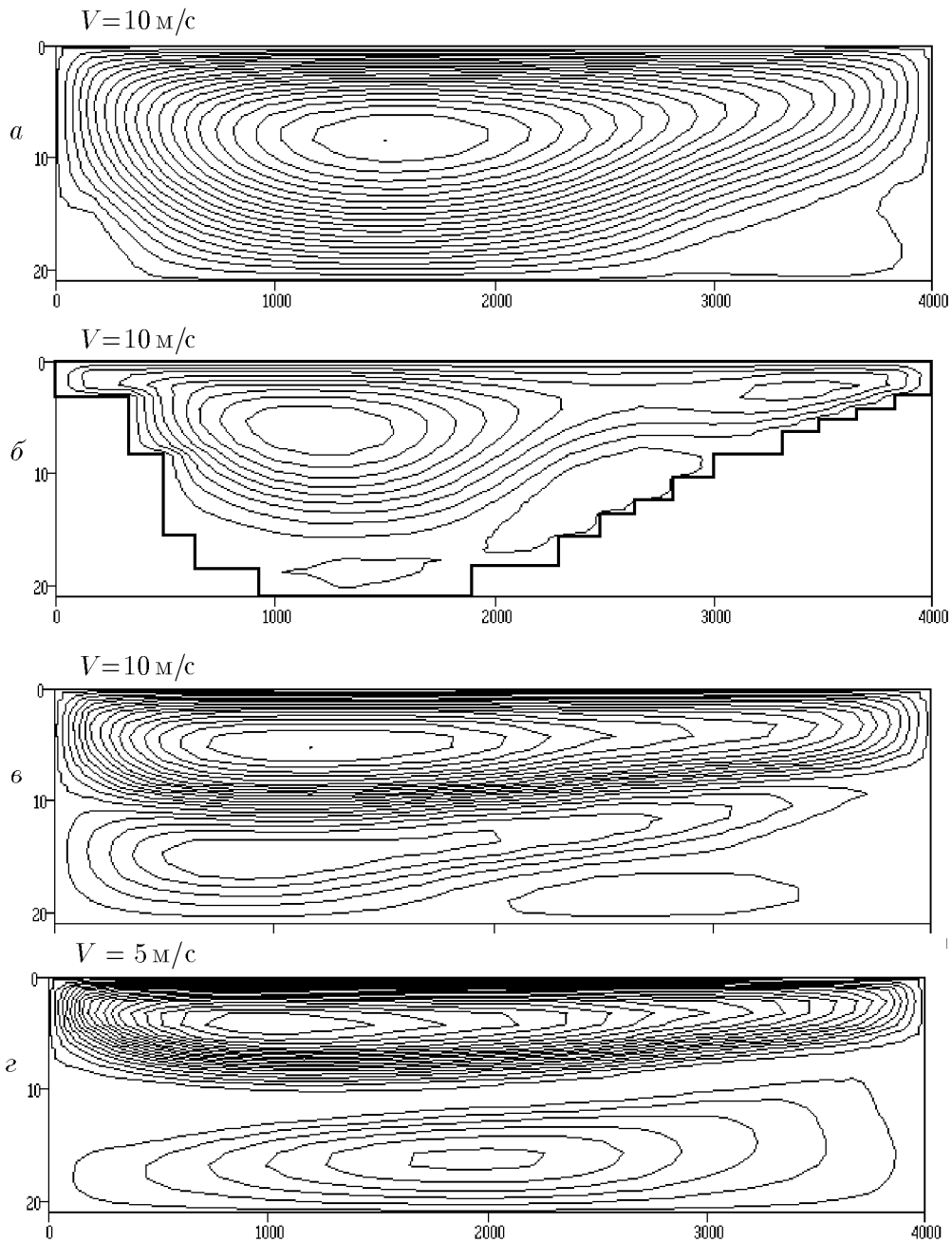


Рис. 3. Линии тока в водоеме прямоугольной (а, в, г) и произвольной (б) формы.

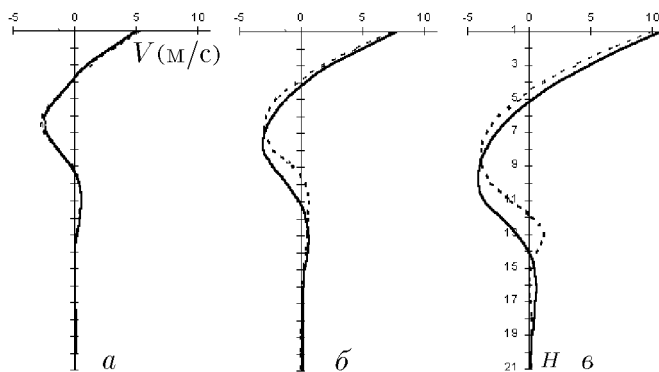


Рис. 4. Скорость течения воды в среднем створе водоема непрямоугольной формы при различных значениях скорости ветра: а — $V = 5 \text{ м/с}$, б — $V = 9 \text{ м/с}$, в — $V = 12 \text{ м/с}$ с учетом (сплошная линия) и без учета (пунктирная линия) конвективных членов.

Авторы выражают благодарность профессору В. М. Белолипецкому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

- [1] Архипов Б. В., Солбаков В. В., Шапочкин Д. А. Двумерная вертикальная модель температурного режима водоема-охладителя // Вод. ресурсы. 1995. Т. 22, № 6. С. 653–666.
- [2] Васильев О. Ф., Квон В. И. О теоретическом описании гидротермических явлений в водоемах-охладителях // Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск: Наука, 1974. С. 100–111.
- [3] Белолипецкий В. М. Численное моделирование ветровых течений в стратифицированных водоемах // Вод. ресурсы. 2001. Т. 28, № 2. С. 133–137.
- [4] Бочаров О. Б., Овчинникова Т. Э. Влияние стратификации на гидротермический режим водоема и требования к вычислительному алгоритму // Вычисл. технологии: Сб. науч. тр. / Сиб. отд-ние РАН; ИВТ. 1993. Т. 2, № 6. С. 155–162
- [5] Бочаров О. Б., Овчинникова Т. Э. Численное моделирование явления термобара в озере Байкал // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 3. С. 21–28.
- [6] Белолипецкий В. М., Генова С. Н., Туговиков В. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование задач гидроледотермики водотоков. Новосибирск: Ин-т вычисл. технологий СО РАН, Вычисл. центр в г. Красноярске, 1994. 138 с.
- [7] BELOLIPETSKII V. M., GENOVA S. N. Investigation of hydrothermal and ice refimes in hydropower station bays // IJFCD. 1998. Vol. 10. P. 151–158.

*Поступила в редакцию 4 декабря 2001 г.,
в переработанном виде — 11 марта 2002 г.*