Вычислительные технологии **Том 7, № 4, 2002**

ДВУМЕРНАЯ ЦЕНТРИРОВАННАЯ ВОЛНА В ТЕПЛОПРОВОДНОМ НЕВЯЗКОМ ГАЗЕ*

Ю. Ю. Чернышов
Уральский государственный университет путей сообщения
Екатеринбург, Россия
e-mail: yura_ch@mail.ru

By means of special nonterminating convergent series one flow of heat-conducting nonviscous gas is presented. This flow is similar to Riman's centred wave and describes the strong compression of two-dimensional gas layers taking into account the radiation and Compton's mechanism of photon diffusion. The series' coefficients structure was analysed. The theorem on existence and uniqueness of the solution in the class of analytical function was proved.

Интерес к задачам о нестационарном сжатии стимулируют различные приложения, включая проекты реализации инерционного управляемого термоядерного синтеза [1]. При этом более выгодным (с точки зрения внешних затрат энергии) является сжатие, при котором в сжимаемой среде не возникают ударные волны. Как известно, система уравнений газовой динамики (для невязкой нетеплопроводной сжимаемой сплошной среды) имеет гиперболический тип, и поэтому, в частности, в такой среде возможны течения газа со слабыми разрывами на звуковых или контактных характеристиках [2]. Это свойство позволяет решать для такой модели сложные и важные задачи, например, задачу о безударном сильном сжатии идеального газа [3]. Полная система уравнений Навье — Стокса (см., например, [4]), описывающая течения вязкого теплопроводного газа, смешанного типа. В течениях такой сплошной среды тоже могут быть слабые разрывы на фронте тепловой волны, распространяющейся по холодному фону [5], или на контактной поверхности [6]. В работах [7, 8] показано, что в течениях теплопроводного невязкого газа могут присутствовать слабые разрывы трех типов: на звуковых характеристиках, контактных поверхностях и фронте тепловой волны, распространяющейся по холодному фону. Поэтому в течениях теплопроводного невязкого газа можно строить решения, описывающие сильное сжатие газа (в частности, с помощью специальных бесконечных сходящихся рядов), и затем склеивать построенные решения через характеристики с заданными фоновыми течениями.

В данной работе построено решение одной системы уравнений с частными производными, описывающее безударное сильное сжатие двумерных слоев теплопроводного невязкого газа с учетом равновесного излучения и комптоновского механизма рассеивания фотонов [9, 10]. Это решение строится в виде специального бесконечного сходящегося ряда и обладает особенностью, аналогичной особенности в центрированной волне Римана (решении

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №02–01–01122.

системы уравнений газовой динамики, описывающем некоторые плоские течения нетеплопроводного невязкого газа).

Рассматривается идеальный газ при учете равновесного излучения, т. е. в качестве уравнений состояния берутся следующие соотношения [9, 10]:

$$p = R\rho T + \sigma T^4/3, \quad e = c_v T + \sigma T^4/\rho, \quad R, \sigma, c_v > 0, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{c_v} > 0, \tag{1}$$

где p — давление; ρ — плотность; T — температура; e — внутренняя энергия; σ — постоянная Стефана — Больцмана. Коэффициент теплопроводности κ принимается в соответствии с комптоновским механизмом рассеивания фотонов [9, 10]:

$$\kappa = \frac{2}{\gamma - 1}\sigma c_* \alpha \frac{T^3}{\rho}, \tag{2}$$

где c_* — скорость света; α — положительная константа, зависящая от выбора системы единиц.

Для описания течений такого газа в качестве независимых термодинамических переменных могут использоваться плотность ρ и температура T. Рассматривается полная система уравнений Навье — Стокса [11], в которой коэффициенты динамической и объемной вязкости положены равными нулю. В рассматриваемой системе стандартным образом вводятся безразмерные переменные, причем за масштаб скорости берется скорость звука в нетеплопроводном газе $u_{00} = \sqrt{R\gamma T_{00}}$, после чего система принимает вид

$$\begin{aligned}
&\rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\mathbf{u} = 0,\\
&\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + (\gamma\rho)^{-1}\left[T\nabla\rho + (\rho + \kappa_0 k_1 T^3)\,\nabla T\right] = \mathbf{0},\\
&T_t + \mathbf{u}\cdot\nabla T + (\gamma-1)T\frac{\rho+\kappa_0 k_1 T^3}{\rho+\kappa_0 k_2 T^3}\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \kappa_0\frac{T^3}{\rho(\rho+\kappa_0 k_2 T^3)}\left[\triangle T - \nabla\rho\cdot\nabla T/\rho + 3\,(\nabla T)^2/T\right],
\end{aligned} \tag{3}$$

где введены следующие обозначения:

$$\kappa_0 = 2\sigma c_*\alpha\frac{T_{00}^3}{R\rho_{00}^2 u_{00} L}; \quad k_1 = \frac{2\rho_{00}u_{00}L}{3c_*\alpha}; \quad k_2 = (\gamma-1)\frac{2\rho_{00}u_{00}L}{c_*\alpha}. \tag{4}$$

Рассматриваются двумерные нестационарные течения теплопроводного невязкого газа, в которых $\partial/\partial x_3 = w = 0$. Все поверхности в пространстве x_1, x_2, x_3 предполагаются цилиндрическими (с образующими, параллельными оси Ox_3) и поэтому отождествляются с кривыми в плоскости x_1Ox_2. Пусть заданы фоновое течение $\mathbf{U}_0(t, x_1, x_2) = \{\rho_0, \mathbf{u}_0, T_0\}$, у которого $w_0 = 0$, и некоторая цилиндрическая поверхность в пространстве x_1, x_2, x_3 — кривая Γ на плоскости переменных x_1, x_2. По $\mathbf{U}_0$ и кривой Γ однозначно определяется [7, 8] звуковая характеристика в теплопроводном газе $C^{\pm}_{\kappa}$, которая будет отделять фоновое течение $\mathbf{U}_0$ от искомой волны сжатия и в момент $t = t_*$ совпадать с линией Γ. Таким образом, кривая Γ есть поверхность $C^{\pm}_{\kappa}|_{t=t_*}$, которая может быть задана в параметрическом виде: $x_1 = x_1^0(\xi),\ x_2 = x_2^0(\xi)$.

Вводятся обозначения

$$\mathbf{U}_0|_{C^{\pm}_{\kappa}} = \mathbf{U}_{00}, \quad \mathbf{U}_{00}|_{t=t_*} = \mathbf{U}^0 \tag{5}$$

и предполагается, что $\mathbf{U}_0$ есть аналитическая вектор-функция в окрестности некоторой точки

$$\left(t = t_*, x_1 = x_1^0(\xi_0), x_2 = x_2^0(\xi_0)\right).$$

Далее делается переход от переменных x_1, x_2 к переменным η, ξ, при этом учитываются геометрия кривой $C^{\pm}_{\kappa}|_{t=t_*}$ и значения газодинамических параметров на ней. Для этого (по аналогии с тем, как это было сделано для нетеплопроводного газа [3]) из каждой точки кривой $C_\kappa^\pm|_{t=t_*}$ проводится прямая с направляющим вектором

$$\mathbf{V}_*(\xi) = \mathbf{u}^0(\xi) + \sqrt{T^0\gamma^{-1}}\mathbf{n}_*, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}_*$ — единичный вектор нормали к $C_\kappa^\pm|_{t=t_*}$. Такие прямые берутся за координатные линии $\xi = \text{const}$. Затем кривые, ортогональные построенному пучку прямых, принимаются за координатные линии $\eta = \text{const}$. В частности, такая кривая, проходящая через точку $(x_1^0(\xi_0), x_2^0(\xi_0))$, принимается за ось $\eta = 0$. Для удобства дальнейших исследований будем считать, что в плоскости x_1Ox_2 линия $\eta = 0$ задается параметрически: $x_1 = \varphi_1(\xi),\ x_2 = \varphi_2(\xi)$. Тогда формулы перехода от (x_1, x_2) к (η, ξ) имеют вид [3]

$$x_1 = \varphi_1(\xi) - \eta\frac{\varphi_2'(\xi)}{A(\xi)}, \quad x_2 = \varphi_2(\xi) + \eta\frac{\varphi_1'(\xi)}{A(\xi)}, \tag{7}$$

где $A(\xi) = \sqrt{{\varphi_1'}^2(\xi) + {\varphi_2'}^2(\xi)},\ A(\xi_0) \neq 0$. Кроме того, в дальнейшем потребуются выражения

$$x_{1\xi} = \left[1 + \frac{\eta}{R(\xi)}\right]\varphi_1'(\xi), \qquad x_{2\xi} = \left[1 + \frac{\eta}{R(\xi)}\right]\varphi_2'(\xi),$$

$$x_{1\eta} = -\frac{\varphi_2'(\xi)}{A(\xi)}, \qquad x_{2\eta} = \frac{\varphi_1'(\xi)}{A(\xi)},$$

где

$$A_1(\xi) = A(\xi) + \eta_*(\xi)B(\xi); \quad A_2(\xi) = \sqrt{{\eta_*'}^2(\xi) + A_1^2(\xi)}; \quad R(\xi) = A^3(\xi)/\left(\varphi_1''\varphi_2' - \varphi_2''\varphi_1'\right);$$

$R(\xi)$ — радиус кривизны исходной кривой. С помощью этих выражений для $x_{1\xi}, x_{2\xi}, x_{1\eta}, x_{2\eta}$ находятся коэффициенты Ляме

$$H_1 = \sqrt{{x_{1\eta}}^2 + {x_{2\eta}}^2} = 1, \quad H_2 = \sqrt{{x_{1\xi}}^2 + {x_{2\xi}}^2} = A(\xi) + \eta B(\xi),$$

где $B(\xi) = \left(\varphi_1''\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2''\right)/A_2$. Введенные переменные η, ξ ортогональны между собой. В новой системе координат линия $C_\kappa^\pm|_{t=t_*}$ задается некоторым уравнением $\eta = \eta_*(\xi)$, а вся поверхность $C_\kappa^\pm$ — уравнением $\eta = \eta_{00}(t, \xi),\ \eta_{00}(t_*, \xi) = \eta_*(\xi)$. За значениями газодинамических параметров фонового течения на звуковой характеристике $C_\kappa^\pm$ сохраняются обозначения

$$\mathbf{U}_0|_{C_\kappa^\pm} = \mathbf{U}_{00}(t, \xi). \tag{8}$$

Для записи системы (3) в переменных t, ξ, η используются следующие формулы для операторов:

$$\begin{aligned} &\text{пр}_\eta\nabla a = a_\eta,\ \text{пр}_\xi\nabla a = a_\xi/H_2, \\ &\text{div}\mathbf{u} = \left[H_2 u_\eta + B(\xi)u + v_\xi\right]/H_2, \end{aligned} \tag{9}$$

где $u = \text{пр}_\eta\mathbf{u};\ v = \text{пр}_\xi\mathbf{u};\ \text{пр}_{x_3}\mathbf{u} = 0$.

Кроме того, в рассматриваемой системе вместо искомой функции плотности газа ρ вводится другая искомая функция $\theta = \ln\rho$. После введения новой функции θ четвертое уравнение системы принимает следующий вид (первые три уравнения имеют вид, похожий на вид уравнений для случая невязкого нетеплопроводного газа [3], поэтому здесь не приводятся):

$$T_t + uT_\eta + vT_\xi/H_2 + (\gamma-1)T\frac{1+\kappa_0 k_1 e^{-\theta}T^3}{1+\kappa_0 k_2 e^{-\theta}T^3}\left[H_2 u_\eta + B(\xi)u + v_\xi\right]/H_2 =$$

$$= \kappa_0 e^{-2\theta}\frac{T^3}{1+\kappa_0 k_2 e^{-\theta}T^3}\Big[T_{\eta\eta} + T_{\xi\xi}/H_2^2 + (1/H_2)'_\xi T_\xi/H_2 -$$

$$- \theta_\eta T_\eta - \theta_\xi T_\xi/H_2^2 + 3\left(T_\eta^2 + T_\xi^2/H_2^2\right)/T\Big]. \qquad (10)$$

Особенности коэффициентов полученной системы совпадают с особенностями функции $B(\xi)$ и нулями функции $H_2(\xi,\eta)$. У функции $B(\xi)$ особенности только там, где они есть у исходной кривой. Условие $H_2(\xi,\eta)=0$, т.е. $\eta=-R(\xi)$, эквивалентно предположению о нулевом радиусе кривизны некоторой линии $\eta=\mathrm{const}$. Напомним, что по предположению при $\eta=0$ в некоторой окрестности точки $\xi=\xi_0$ функция $H_2(\xi,\eta)$ отлична от нуля и $B(\xi)$ особенности не имеет.

Значение функции $\theta(t,\eta,\xi)$ на $C_\kappa^\pm$

$$\theta(t,\eta,\xi)|_{C_\kappa^\pm} = \theta_{00}(t,\xi) = \theta_{00}(t,\eta_{00}(t,\xi),\xi). \qquad (11)$$

Поскольку у искомого обобщения центрированной волны Римана в момент времени $t=t_*$ производные по η не ограничены, делается еще одна замена переменных. За независимые переменные берутся t,θ,ξ, а за неизвестные функции – η,u,v,T. Якобиан такого преобразования $J=\eta_\theta$. Если $J=0$, то в пространстве (t,η,ξ) имеет место бесконечный градиент. При этом в пространстве (t,θ,ξ) у решения особенности нет. Если $J=\infty$, то наоборот – в пространстве (t,θ,ξ) у решения бесконечный градиент, а в пространстве (t,η,ξ) особенность отсутствует. После такой замены система принимает следующий вид:

$$\begin{cases}
H_2(u-\eta_t) - v\eta_\xi + H_2 u_\theta - \eta_\xi v_\theta + \eta_\theta\left(B(\xi)u + v_\xi\right) = 0,\\
\eta_\theta H_2 u_t + H_2 u_\theta(u-\eta_t) + \eta_\theta\left(vu_\xi - B(\xi)v^2\right) - \eta_\xi v u_\theta +\\
+H_2\gamma^{-1}\left[T + \left(1+\kappa_0 k_1 e^{-\theta}T^3\right)T_\theta\right] = 0,\\
\eta_\theta H_2 v_t + H_2 v_\theta(u-\eta_t) + \eta_\theta\left(B(\xi)uv + vv_\xi\right) - \eta_\xi v v_\theta +\\
+\gamma^{-1}\left[-T\eta_\xi + (1+\kappa_0 k_1 e^{-\theta}T^3)\left(\eta_\theta T_\xi - \eta_\xi T_\theta\right)\right] = 0,\\
H_2^3\left(\eta_\theta^3 T_t - \eta_\theta^2\eta_t T_\theta + \eta_\theta^2 u T_\theta\right) + H_2^2 v\left(\eta_\theta^3 T_\xi - \eta_\theta^2\eta_\xi T_\theta\right) +\\
+H_2^2(\gamma-1)T\dfrac{1+\kappa_0 k_1 e^{-\theta}T^3}{1+\kappa_0 k_2 e^{-\theta}T^3}\left[H_2\eta_\theta^2 u_\theta + \eta_\theta^3 B(\xi)u + \eta_\theta^3 v_\xi - \eta_\theta^2\eta_\xi v_\theta\right] =\\
= \kappa_0\dfrac{T^3 e^{-2\theta}}{1+\kappa_0 k_2 e^{-\theta}T^3}\Big[H_2^3(\eta_\theta T_{\theta\theta} - \eta_{\theta\theta}T_\theta) + H_2(\eta_\theta^3 T_{\xi\xi} - \eta_\theta^2\eta_\xi T_{\theta\xi} -\\
-(\eta_\theta^2\eta_{\xi\xi} - 2\eta_\theta\eta_{\theta\xi}\eta_\xi + \eta_\xi^2\eta_{\theta\theta})T_\theta - \eta_\theta^2\eta_\xi T_{\theta\xi} + \eta_\theta\eta_\xi^2 T_{\theta\theta}) -\\
-(H_2)'_\xi(\eta_\theta^3 T_\xi - \eta_\theta^2\eta_\xi T_\theta) - H_2^3\eta_\theta T_\theta + H_2(\eta_\theta^2\eta_\xi T_\xi - \eta_\theta\eta_\xi^2 T_\theta) +\\
+3T^{-1}(H_2^3\eta_\theta T_\theta^2 + H_2(\eta_\theta^3 T_\xi^2 - 2\eta_\theta^2\eta_\xi T_\xi T_\theta + \eta_\theta\eta_\xi^2 T_\theta^2))\Big].
\end{cases} \qquad (12)$$

В новой системе координат характеристика $C_\kappa^\pm$ задается соотношением $\theta=\theta_{00}(t,\xi)=\theta_{00}(t,\eta_{00}(t,\xi),\xi)$, а искомые функции на характеристике $C_\kappa^\pm$ такие: $T|_{C_\kappa^\pm}=T_{00}(t,\xi)$, $\eta|_{C_\kappa^\pm}=\eta_{00}(t,\xi)$, $u|_{C_\kappa^\pm}=u_{00}(t,\xi)$, $v|_{C_\kappa^\pm}=v_{00}(t,\xi)$.

Данные Коши для системы (12) задаются на характеристике $C^{\pm}_{\kappa}$:

$$\mathbf{U}|_{\theta=\theta_{00}(t,\xi)} = \mathbf{U}_{00}(t,\xi), \tag{13}$$

где $\mathbf{U} = (\eta, u, v, T) = \mathbf{U}(t,\theta,\xi)$ — вектор искомых функций.

Для обеспечения единственности решения этой характеристической задачи необходимо задать одно краевое условие, поскольку $C^{\pm}_{\kappa}$ есть характеристика кратности один [3, 7, 8]. Этим условием является соотношение

$$\eta(t,\theta,\xi)|_{t=t_*} = \eta_*(\xi), \tag{14}$$

в котором $\eta = \eta_*(\xi)$ — уравнение $C^{\pm}_{\kappa}$-характеристики в момент $t = t_*$, аналогичное условию вертикали [3].

Теорема. *При $t_0 \le t \le t_*$, $t_0 < t_*$, в некоторой окрестности линии $C^{\pm}_{\kappa}$ у характеристической задачи Коши (12)–(14) существует единственное локально аналитическое решение.*

При доказательстве данной теоремы задача (12)–(14) по известной методике [3] сводится к некоторому стандартному виду, для которого справедлив аналог теоремы Ковалевской о существовании и единственности решения в классе аналитических функций.

Из утверждения теоремы следует, что решение характеристической задачи Коши (12)–(14) единственным образом представимо в виде сходящегося степенного ряда

$$\mathbf{U}(t,\theta,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t,\xi)\frac{[\theta-\theta_{00}(t,\xi)]^k}{k!}. \tag{15}$$

Для уточнения области существования решения характеристической задачи Коши (12)–(14) это решение перераскладывается в виде ряда по степеням $(t-t_*)$:

$$\mathbf{U}(t,\theta,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\theta,\xi)\frac{(t-t_*)^k}{k!},\ \mathbf{U}_k(\theta,\xi) = \left.\frac{\partial^k \mathbf{U}(t,\theta,\xi)}{\partial t^k}\right|_{t=t_*}. \tag{16}$$

Если в системе (12) положить $t = t_*$ и учесть (14), то четвертое уравнение обратится в тождество, а первые три перейдут в систему

$$\begin{cases} A_1(u_0-\eta_1) - v_0\eta'_*(\xi) + A_1 u_{0\theta} - \eta'_*(\xi)v_{0\theta} = 0, \\ A_1 u_{0\theta}(u_0-\eta_1) - \eta'_*(\xi)v_0 u_{0\theta} + A_1\gamma^{-1}T_0 = 0, \\ A_1 v_{0\theta}(u_0-\eta_1) - \eta'_*(\xi)v_0 v_{0\theta} - \gamma^{-1}T_0\eta'_*(\xi) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Если четвертое уравнение системы (12) продифференцировать по t, положить $t = t_*$ и учесть условие (14), то получится уравнение

$$A_1\left(A_1^2 + {\eta'_*}^2(\xi)\right)\left(\eta_{1\theta}T_{0\theta\theta} - \eta_{1\theta\theta}T_{0\theta} - \eta_{1\theta}T_{0\theta} + \frac{3}{T_0}\eta_{1\theta}{T_{0\theta}}^2\right) = 0, \tag{18}$$

в котором первый множитель в силу сделанных ранее предположений заведомо не равен нулю. В результате для четырех искомых величин η_1, u_0, v_0, T_0 получилась система (17), (18) из четырех дифференциальных уравнений. Нахождение общего решения этой системы представляется достаточно трудной задачей, хотя некоторое продвижение в данном направлении возможно [12]: деление (18) на $\eta_{1\theta}T_{0\theta}$

$$(\ln T_{0\theta})_\theta - (\ln \eta_{1\theta})_\theta - 1 + 3(\ln T_0)_\theta = 0 \tag{19}$$

позволяет понизить порядок этого уравнения:

$$T_0^3 T_{0\theta} = C_1 e^\theta \eta_{1\theta}. \tag{20}$$

В дальнейшем в качестве функции $T_0(\theta, \xi)$ берется функция, зависящая только от ξ:

$$T_0(\theta, \xi) = T_{00}(\xi). \tag{21}$$

Использование частного решения (21) в качестве функции $T_0(\theta, \xi)$ обусловлено следующим. Именно это свойство температуры — отсутствие скачка функции T в момент $t = t_*$ — наблюдается при численных расчетах соответствующей волны сжатия в теплопроводном газе в плоскосимметричном случае [9]. Система (17) решается (с учетом частного решения (21)) с помощью замены

$$Z = A_1(\xi)(u_0 - \eta_1) - v_0 \eta'_*(\xi), \quad X = u_{0\theta}, \quad Y = v_{0\theta}\eta'_*(\xi). \tag{22}$$

Решения системы (17) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
&u_0(\theta, \xi) = \pm\sqrt{T_{00}(\xi)\gamma^{-1}} A_1(\xi)\theta / A_2(\xi) + u^0(\xi),\\
&v_0(\theta, \xi) = \mp\sqrt{T_{00}(\xi)\gamma^{-1}} \eta'_*(\xi)\theta / A_2(\xi) + v^0(\xi),\\
&\eta_1(\theta, \xi) = u^0(\xi) - v^0(\xi)\eta'_*(\xi)/A_1(\xi) \pm \sqrt{T_{00}(\xi)\gamma^{-1}} A_2(\xi)(\theta + 1)/A_1(\xi),
\end{aligned} \tag{23}$$

где $u^0(\xi), v^0(\xi)$ — произвольные функции, появившиеся в результате интегрирования дифференциальных уравнений. Верхний знак в формулах (23) надо брать в случае движения звуковой характеристики C_κ^+ в сторону возрастания η, т. е. при сжатии слоя изнутри. Нижний знак в формулах (23) берется в случае движения характеристики C_κ^- в сторону убывания η, т. е. при сжатии слоя газа снаружи. Таким образом, если определить направление сжатия слоя газа, то $\mathbf{U}_0(\theta, \xi)$ и $\eta_1(\theta, \xi)$ определяются однозначно. Далее при нахождении следующих коэффициентов для упрощения в формулах (23) берется верхний знак, соответствующий сжатию слоя газа изнутри.

После дифференцирования четвертого уравнения системы (12) $k + 1$ раз по t и подстановки $t = t_*$ получается дифференциальное уравнение для нахождения $T_k(\theta, \xi)$ (переменная ξ входит в это уравнение как параметр)

$$T_{k\theta\theta} - T_{k\theta} = F_{k,4}(\theta, \xi). \tag{24}$$

Решение уравнения (24) выглядит следующим образом:

$$T_k = T_{k0}(\xi) + T_{k1}(\xi)e^\theta - \int F_{k,4}(\theta, \xi)d\theta + e^\theta \int F_{k,4}(\theta, \xi)e^{-\theta}d\theta, \tag{25}$$

где $T_{k0}(\xi),\ T_{k1}(\xi)$ — произвольные функции, появившиеся в результате интегрирования дифференциального уравнения (24).

Для нахождения других коэффициентов ряда (16) сначала во втором и третьем уравнениях системы (12) исключается выражение $(u - \eta_t)$ с помощью первого уравнения (первое уравнение остается без изменений). После дифференцирования второго и третьего уравнений системы (12) k раз по t и подстановки $t = t_*$ получается следующая система дифференциальных уравнений для нахождения функций $u_k(\theta,\xi)$ и $v_k(\theta,\xi)$:

$$\begin{aligned} &u_{k\theta}\left[-2A_1(\xi)u_{0\theta} + \eta_*'(\xi)v_{0\theta}\right] + u_k k\eta_{1\theta}A_1(\xi) + v_{k\theta}u_{0\theta}\eta_*'(\xi) = F_{k,2}(\theta,\xi),\\ &v_{k\theta}\left[2\eta_*'(\xi)v_{0\theta} - A_1(\xi)u_{0\theta}\right] + v_k k\eta_{1\theta}A_1(\xi) - u_{k\theta}v_{0\theta}A_1(\xi) = F_{k,3}(\theta,\xi). \end{aligned} \tag{26}$$

После приведения системы к нормальному виду получаем

$$\begin{aligned} &u_{k\theta} - u_k k\left[A_2^2(\xi) + {\eta_*'}^2(\xi)\right]/2A_2^2(\xi) - v_k k\left[A_1(\xi)\eta_*'(\xi)\right]/2A_2^2(\xi) = F_{k,3}^*(\theta,\xi),\\ &v_{k\theta} - u_k k\left[A_1(\xi)\eta_*'(\xi)\right]/2A_2^2(\xi) - v_k k\left[A_2^2(\xi) + A_1^2(\xi)\right]/2A_2^2(\xi) = F_{k,2}^*(\theta,\xi), \end{aligned} \tag{27}$$

где

$$F_{k,2}^*(\theta,\xi) = F_{k,3} - \frac{2\eta_*'(\xi)v_{0\theta} - A_1(\xi)u_{0\theta}}{u_{0\theta}\eta_*'(\xi)}F_{k,2}, \quad F_{k,3}^*(\theta,\xi) = F_{k,2} + \frac{\eta_*'(\xi)v_{0\theta} - 2A_1(\xi)u_{0\theta}}{v_{0\theta}A_1(\xi)}F_{k,3}.$$

Решение системы (27) находится методом вариации произвольной постоянной и выглядит так:

$$\begin{aligned} &u_k(\theta,\xi) = u_{k0}(\xi)e^{k\theta/2} + \eta_*'v_{k0}(\xi)e^{k\theta}/A_1+\\ &+\eta_*'/A_2^2\left[\int\left({\eta_*}'F_{k,3}^* + A_1F_{k,2}^*\right)e^{-k\theta}d\theta\right]e^{k\theta} + A_1/A_2^2\left[\int\left(A_1F_{k,3}^* - \eta_*'F_{k,2}^*\right)e^{-k\theta/2}d\theta\right]e^{k\theta/2},\\ &v_k = -\eta_*'(\xi)u_{k0}(\xi)e^{k\theta/2}/A_1(\xi) + v_{k0}(\xi)e^{k\theta}+\\ &+A_1/A_2^2\left[\int\left(\eta_*'F_{k,3}^* + A_1F_{k,2}^*\right)e^{-k\theta}d\theta\right]e^{k\theta} - \eta_*'/A_2^2\left[\int\left(A_1F_{k,3}^* - \eta_*'F_{k,2}^*\right)e^{-k\theta/2}d\theta\right]e^{k\theta/2}. \end{aligned} \tag{28}$$

После дифференцирования k раз по t первого уравнения (и подстановки $t = t_*$) для нахождения коэффициента $\eta_{k+1}(\theta,\xi)$ получается алгебраическое уравнение

$$\eta_{k+1}(\theta,\xi) = F_{k,1}(\theta,\xi). \tag{29}$$

Функции $F_{k,i},\ 1 \le i \le 4$, известным образом зависят от θ,ξ и предыдущих коэффициентов рядов. Ввиду громоздкости представление $F_{k,i}(\theta,\xi)$ здесь не приводится. Произвольные функции $u_{k0}(\xi)$, $v_{k0}(\xi)$, $T_{k0}(\xi)$, $T_{k1}(\xi)$, появившиеся в результате интегрирования дифференциальных уравнений, подбираются таким образом, чтобы согласовать ряд (16) со значениями газодинамических параметров на характеристике $C_\kappa^\pm$ (13).

Для детального исследования области сходимости построенных рядов используется

Лемма. *Коэффициенты η_{k+1}, u_k, v_k, T_k при $k \ge 1$ являются многочленами от θ и $e^{\theta/2}$ (с коэффициентами, зависящими от ξ), и максимальная суммарная степень входящих в них одночленов вида $\theta^n e^{m\theta/2}$ не превосходит $2k$, т. е. $n + m/2 \le 2k$. При этом каждая из функций r_{k+1}, u_k, T_k обязательно содержит одночлен вида $e^{2k\theta}$ с отличным от нуля коэффициентом перед ним.*

Доказательство леммы производится индукцией по k с использованием формул (25), (26), (29). С помощью леммы устанавливается, что область сходимости ряда (16), решающего задачу (12)–(14), задается формулой

$$M(\xi)e^{2\theta}\left|t - t_*\right| < 1, \tag{30}$$

где $M(\xi)$ — некоторая аналитическая функция, мажорирующая нуль. Таким образом, область сходимости построенного решения является неограниченной по переменной θ в некоторой окрестности точки $\xi = \xi_0$.

С использованием формул (23) получаются следующие соотношения:

$$\theta = \pm\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\gamma T_{00}^{-1}}\frac{\eta-\eta_*}{t-t_*} \mp \left(\sqrt{\gamma T_{00}^{-1}}\frac{u^0 A_1 - v^0\eta'_*}{A_2} - 1\right) + f(t,\theta,\xi)(t-t_*),$$

$$u = \pm\sqrt{\gamma T_{00}^{-1}}\frac{A_1}{A_2}\theta + u^0(\xi) + g(t,\theta,\xi)(t-t_*),$$

$$v = \mp\sqrt{\gamma T_{00}^{-1}}\frac{\eta'_*}{A_2}\theta + v^0(\xi) + h(t,\theta,\xi)(t-t_*),$$

$$T = T_{00}(\xi) + q(t,\theta,\xi)(t-t_*),$$

где функции $f(t,\theta,\xi)$, $g(t,\theta,\xi)$, $h(t,\theta,\xi)$, $q(t,\theta,\xi)$ — аналитические в области (30). По теореме о существовании неявно заданной функции первое из этих соотношений определяет θ как функцию от переменных $(\eta-\eta_*)\,/\,(t-t_*)$, t, ξ. Следовательно, три других газодинамических параметра (u, v, T) можно считать функциями этих переменных. Таким образом, построенное решение обладает особенностью, аналогичной особенности в центрированной волне Римана.

Автор выражает глубокую благодарность С. П. Баутину за постановку задачи, полезные рекомендации и оказанную поддержку.

Список литературы

[1] Забабахин Е. И., Забабахин И. Е. Явления неограниченной кумуляции. М.: Наука, 1988.

[2] Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.

[3] Баутин С. П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.

[4] Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1983.

[5] Баутин С. П. Представление решений системы уравнений Навье — Стокса с помощью характеристических рядов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / Сиб. отд-ние АН СССР. ИГиЛ. 1987. Вып. 83. С. 11–31.

[6] Баутин С. П. Представление решений системы Навье — Стокса в окрестности контактной характеристики // ПММ. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 574–584.

[7] Баутин С. П. Слабые разрывы в течениях теплопроводного невязкого газа // Докл. РАН. 2001. Т. 377, №4. С. 481–484.

[8] Баутин С. П. Характеристические поверхности в течениях газа // ПММ. 2001. Т. 65, вып. 5. С. 862–873.

[9] Анучин М. Г. Влияние теплопроводности на неограниченное безударное сжатие плоского газового слоя // ПМТФ. 1998. Т. 39, №4 С. 25–32.

[10] Забабахин Е. И., Симоненко В. А. Сходящаяся ударная волна в теплопроводном газе // ПММ. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 334–336.

[11] Баутин С. П. Аналитическое построение течений вязкого газа с помощью последовательности линеаризованных систем Навье—Стокса // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 4. С. 579–589.

[12] Баутин С. П., Чернышов Ю. Ю. Одно течение теплопроводного газа, аналогичное центрированной волне Римана // ПММ. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 87–94.

[13] Забабахин И. Е., Симоненко В. А. Сферическая центрированная волна сжатия // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 3. С. 573–576.

[14] Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Автомодельное сжатие идеального газа плоским, цилиндрическим или сферическим поршнем // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36, №1. С. 120–128.

Поступила в редакцию 26 февраля 2002 г.