Вычислительные технологии **Том 7, № 3, 2002**

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ РИВЛИНА—ЭРИКСЕНА*

В. О. Бытев

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Красноярск, Россия

Some examples of exact invariant solutions of Rivlin—Ericksen fluid are investigated. Physical interpretation of these solutions is given.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую нестационарные одномерные движения сплошной среды со степенным реологическим законом [1, 2]:

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \tag{1}$$

$$\rho(u_t + uu_x) - \mu\partial_x(u_x^k) + p_x = 0, \tag{2}$$

$$p_t + up_x + Gu_x + \mu H u_x^{k+1} = 0, \tag{3}$$

$$G = G(p,\rho), \quad H = H(p,\rho). \tag{4}$$

Здесь ρ — плотность среды; u — единственная ненулевая компонента вектора скорости; p — гидростатическое давление (термодинамическая переменная); G и H — функции, задающие уравнения состояния; k — постоянная; μ — вязкость, которая считается постоянной; t — время; x — пространственная координата.

Модель сплошной среды, описываемая уравнениями (1)–(4), относится к широкому классу простых неполярных нетеплопроводных сред, получивших название чисто механического континуума [3]. Замыкающее уравнение, выражающее закон сохранения энергии, взятое в форме (3), может быть получено из уравнения состояния Мизеса [4] и рассуждений, заимствованных из [5, 6].

Особый интерес к предложенной модели обусловлен двумя причинами. Во-первых, экспериментальные исследования по гидромеханике неньютоновских сред, проведенные разными авторами и в разное время, указывают на то, что степенной реологический закон хорошо аппроксимирует экспериментальные кривые [7, 8]. Во-вторых, доказано, что расширение группового ядра для системы (1)–(4) происходит именно при степенном реологическом законе [9], одновременно указываются все уравнения состояний, дающие расширение группового ядра [10].

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №01–01–00850.

© В. О. Бытев, 2002.

Предположим, что $H = 0$, и так как по определению [5]

$$H = -\frac{v}{c_v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)_v,$$

где v — удельный объем, θ — абсолютная температура, c_v — теплоемкость,

$$p = -\varphi(v).$$

Другими словами, рассматриваются только баротропные течения. Учитывая, что в (4) для баротропных течений

$$G = -v\frac{\partial p}{\partial v},$$

преобразуем систему (1) – (4) к следующему виду:

$$v_t + uv_x - vu_x = 0, \tag{5}$$

$$u_t + uu_x = -vp_x + v\partial_x(u_x^k). \tag{6}$$

Переходя в (5), (6) к лагранжевым переменным, а затем к массовым по правилу

$$v\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial q},$$

получим систему уравнений вида

$$v_t = u_q, \tag{7}$$

$$u_t + p_q = \partial_q(v^{-k}u_q^k). \tag{8}$$

Полагая

$$v = w_q(t,q), \quad u = w_t(t,q), \tag{9}$$

сведем систему (7), (8) к одному гиперболическому нелинейному уравнению с диффузионным членом

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial q}\varphi(w_q) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial}{\partial t}\ln w_q\right)^k, \tag{10}$$

которое при $k = 1$ совпадает с уравнением, изученным в [11]. В указанной монографии для этого случая доказаны теоремы существования и единственности.

Теперь заметим, что после дифференцирования (10) по q и использования соотношений (9) получаем уравнение, описывающее динамику удельного объема $v(t,q)$:

$$v_{tt} - \partial_{qq}^2\varphi(v) = \mu\partial_{qq}^2(\partial_t \ln v)^k. \tag{11}$$

Смысл функции $\varphi(v)$ очевиден — это давление, взятое с обратным знаком: $p = -\varphi(v)$.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть уравнение состояния выбрано в форме Клапейрона — Менделеева

$$pv = R\theta,$$

R — “газовая постоянная”, тогда

$$\varphi(v) = -\frac{R\theta}{v}. \tag{12}$$

Введем переменную

$$\xi = q - ct$$

и будем разыскивать решения (11) в виде

$$v = v(\xi). \tag{13}$$

Другими словами, поставим задачу об исследовании решений (11) типа бегущей волны. Подставляя (13) в (11), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}[c^2 v - \varphi(v) + \mu(-1)^{k+1}|c|^k v_\xi^k / v^k] = 0.$$

В частности, отсюда вытекает, что

$$(-1)^{k+1}\mu|c|^k v_\xi^k + c^2 v^{k+1} - v^k \varphi(v) = \alpha v^k. \tag{14}$$

Вводя фазовую плоскость (y, v), где $y = v_\xi$, перепишем уравнение (14) в следующем виде (при $k = 2m$):

$$-\mu c^{2m} y^{2m} + c^2 v^{2m+1} - v^{2m}\varphi(v) = \alpha v^{2m}.$$

Воспользовавшись (12), получаем

$$-\mu c^{2m} y^{2m} + c^2 v^{2m+1} + R\theta v^{2m-1} - \alpha v^{2m}. \tag{15}$$

Обозначим

$$\mu c^{2m} = Q > 0, \quad R\theta = b > 0, \quad \alpha \in (-\infty, +\infty),$$

разделим все коэффициенты на a_* и введем новые постоянные

$$\beta = c^2/a, \quad \gamma = b/a, \quad \alpha_0 = \alpha/a.$$

Из (15) находим

$$y^{2m} = \beta v^{2m-1}\left(v^2 - \frac{\alpha_0}{\beta}v + \frac{\gamma}{\beta}\right). \tag{16}$$

При $m = 1$

$$\alpha_0 = \alpha/\mu c^2, \quad \beta = 1/\mu, \quad \gamma = b/\mu c^2$$

и уравнение (16) примет вид

$$y^2 = \frac{1}{\mu}v^{2m-1}\left(v^2 - \frac{\alpha}{c^2}v + \frac{b}{c^2}\right). \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что, сделав преобразование

$$v = \bar{v} + v_0, \quad v_0 = \alpha/3c^2, \quad \bar{v} = (4\mu)v_*,$$

получим

$$\left(\frac{dv_*}{d\xi}\right)^2 = 4v_*^3 - g_2 v_* - g_3, \tag{18}$$

где

$$g_2 = \frac{1}{4\mu^2 c^4}(bc^2 - \alpha^2), \quad g_3 = \frac{\alpha}{16\mu^3 27 c^6}(9bc^3 - 2\alpha^2).$$

Общее решение (18) — функция Вейерштрасса $v_* = \wp(\xi; g_2, g_3)$ или

$$v = 4\mu\wp(\xi; g_2, g_3) + \frac{\alpha}{3c^2}. \tag{19}$$

Обратимся вновь к уравнению (17). Нулями правой части являются

$$e_1 = 0, \quad e_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4bc^2}}{2c^2}, \quad e_3 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4bc^2}}{2c^2}.$$

1. Если $\Delta = \alpha - 4bc^2 > 0$, то $e_3 > e_2 > e_1$; $v > 0$. Область неотрицательности правой части (17) — $\{0 \le v \le e_2\} \cup \{e_3 \le v\}$. Заметим, что в этом случае уравнение (17)

$$y^2 = \frac{1}{\mu} v(v - e_2)(v - e_3) \tag{20}$$

совпадает с уравнением колебания сферического маятника длины 1 и с ускорением "силы тяжести", равным 1/2 μ [12]. Общее решение (20) задается формулой

$$v(\xi) = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4bc^2}}{2c^2}\right) \mathrm{sn}^2 \left[\frac{\sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4bc^2}}}{2c\sqrt{\mu}}\xi\right].$$

Более детальное исследование показывает, что область $[0, e_2]$ заполнена периодическими (замкнутыми) траекториями, а область $[e_3, +\infty)$ задает движение типа перехода волны сжатия в волну разрежения.

2. Если $\Delta < 0$, то правая часть (17) неотрицательна для всех $v \ge 0$, а решения описывают переход от волны сжатия к волне разрежения. Периодических структур не существует.

3. Если $\Delta = 0$, тогда $e_3 = e_2 > e_1 = 0$. В этом случае, как известно [12], общее решение задается формулой (19), но

$$\wp(\xi) = \frac{3g_3}{g_2} - \frac{9g_3}{2g_2}\mathrm{cth}^2\left(\xi\sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}\right),$$

причем $g_2 g_3 \ne 0$. Поведение траекторий на фазовой плоскости вполне понятно. Область $[0, e_2]$ заполнена периодическими решениями, а в области $[e_2, +\infty)$ — переход от волны сжатия к волне разрежения. Другими словами, в этой ситуации имеем дело с петлей сепаратрисы.

Замечание 1. Из представления (16) видно, что при $m > 1$ поведение траекторий на фазовой плоскости качественно не изменится; нули правой части (16) и области неотрицательности ее остаются прежними.

Замечание 2. Если $\alpha \equiv 0$, то

$$\int \frac{dv}{v^{\frac{2m-1}{2m}}(c^2v^2 + b)^{1/2m}} = c\mu^{1/2m}(\xi + \xi_0). \tag{21}$$

Согласно теореме Чебышева [13], интеграл (21) вычисляется в элементарных функциях тогда и только тогда, когда: 1) $1/2m$ — целое; 2) $1/4m$ — целое.

Рассмотрим еще один пример. Возвращаясь к уравнению (10), будем искать решение его в виде произведения двух функций

$$w(t, q) = U(t)Z(q). \tag{22}$$

Если уравнение состояния имеет вид

$$pv^{\gamma} = c^2, \quad v = 1/\rho,$$

то (10) запишется так:

$$w_{tt} - \gamma c^2 w_q^{-\gamma-1} w_{qq} = \partial_q (\partial_t \ln w_q)^k. \tag{23}$$

Подставив (22) в (23), находим после разделения переменных

$$\frac{1}{2}U_t^2(t) \pm \frac{\lambda^2}{1-\gamma} U^{1-\gamma} = U_0 \quad (\gamma \neq 1),$$

$$\frac{\gamma c^2}{1-\gamma} Z_q^{1-\gamma} \pm \frac{\lambda^2}{2} Z^2 = Z_0 \quad (\gamma \neq 1), \tag{24}$$

и

$$\frac{1}{2}U_t^2(t) \pm \lambda^2 \ln U = U_0 \quad (\gamma = 1),$$

$$Z_q = Z_0 \exp\left(\pm \frac{\lambda^2 Z^2}{2c^2}\right) \quad (\gamma = 1).$$

Здесь Z_0, U_0, c, γ — постоянные.

Согласно теореме Чебышева [13], интегралы для определения $U(t)$ и $Z(q)$ из (24) вычисляются в элементарных функциях тогда и только тогда, когда

$$\gamma = \frac{k-1}{k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, ...,$$

или

$$\gamma = \frac{2k-1}{2k+1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

в частности, при $\gamma = -1, 3/2, 5/3, 3$.

Как было отмечено в [14], этим свойством обладают модели, описывающие одномерный нестационарный газ Чаплыгина, двумерный стационарный поток такого газа, бунемановскую неустойчивость плазмы, тиринг-неустойчивость плазмы, неустойчивость Кельвина — Гельмгольца, ямки плотности слабонеидеального бозе-газа, обобщенный газ Чаплыгина и др.

В зависимости от сходимости или расходимости соответствующих интегралов решения могут существовать как на ограниченных, так и на неограниченных промежутках по t, q.

В общей ситуации уравнение (10) при подстановке в него уравнения (22) дает

$$Z(q)U''(t) = \partial_q \varphi(U(t) Z_q'(q)).$$

Дифференцируя его по q и вводя новую исходную функцию $V(t,q)$

$$U(t) Z_q'(q) \equiv W_q = V(t,q),$$

получим нелинейное волновое уравнение

$$V_{tt} - \partial_{qq}^2 \varphi(V) = 0, \tag{25}$$

описывающее динамику удельного объема в переменных (t,q).

Пусть уравнение состояния имеет вид

$$p = p_0 - v_0 e^{-1/v} \ (v_0 > 0).$$

Тогда функция $p(v)$ обладает следующими свойствами:

$$p \to p_0 \text{ при } v \to +0, \quad p \to p_0 - v_0 \text{ при } v \to +\infty,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{v_0}{v^2} e^{-1/v} < 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} = \frac{v_0}{v^3}\left(2 - \frac{1}{v}\right) e^{-1/v},$$

$$p_{vv} > 0 \text{ при } v \geq \frac{1}{2}, \quad p_{vv}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$p_v \to 0 \text{ при } v \to +0, \quad p_v\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4v_0}{e^2},$$

$$p_v \to 0 \text{ при } v \to +\infty.$$

Замечание 3. Неравенство $p_v < 0$ является условием устойчивости термодинамического равновесия и выполняется почти для всех реальных веществ в стабильном состоянии [15].

Уравнение для v получается из (25) после подстановки

$$p \equiv -\varphi(v) = p_0 - v_0 e^{-1/v}, \quad v_{tt} + v_0 \partial^2_{qq}(e^{-1/v}) = 0,$$

где $v(t, q) = U(t) Z'_q(q)$.

Если уравнение состояния выбрать в виде

$$-\varphi(v) \equiv p(v) = p_0 - \varphi_0^2 \ln v, \tag{26}$$

то

$$p_v = -\frac{\varphi_0^2}{v} < 0 \ (\forall v > 0), \quad p_{vv} = \frac{\varphi_0^2}{v^2} > 0, \quad 0 < v < e^{p_0/\varphi_0^2},$$

где p_0, φ_0 — постоянные. Подставляя (26) в (25), получаем

$$v_{tt} + \varphi_0^2(v_q^2 - v v_{qq}) = 0.$$

Учитывая представление (22), находим

$$U''(t) U^2(t) Z_q^3 + \varphi_0^2 U^2(t)(Z_{qq}^2 - Z_q Z_{qqq}) = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$U(t) = \pm\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \mu t + \nu,$$

где λ, μ, ν — постоянные. Обозначив $Z_q(q) \equiv A(q)$, получаем

$$\varphi_0^2(-A_q^2 + A A_{qq}) \mp \lambda^2 A^3 = 0.$$

Пусть $\beta^2 = \lambda^2/\varphi_0^2 \neq 0$, тогда, вводя функцию f: $A_q(q) = f(A)$ и переменную $\xi = \ln(A/2)$, получаем

$$\partial_\xi(f^2) - f^2 \mp 8\beta^2 e^{3\xi} = 0$$

с общим решением

$$f^2(\xi) = e^{\xi}[h_0 \pm 4\beta^2 e^{2\xi}]$$

или в старых переменных

$$2A_q^2 = \pm\beta^2 A^3 + h_0 A. \qquad (27)$$

С помощью замены $A = \alpha\tilde{A}$ и при $\alpha = \pm\sigma/\beta^2$ уравнение (27) может быть приведено к каноническому виду

$$\tilde{A}_q^2 = 4\tilde{A}^3 + a\tilde{A} \quad (a = h_0/8\beta^2).$$

Следовательно, решением уравнения (27) является функция Вейерштрасса

$$\tilde{A}(q) = \wp(q + c_0)$$

с инвариантами $g_2 = a,\ g_3 = 0$. Если $\beta^2 = 0$, то и $\lambda^2 = 0$, тогда

$$U(t) = \mu t + \nu, \quad A(q) = A_0 e^{\pm f_0 q},$$

где μ, ν, A_0, f_0 — постоянные.

Полученные формулы дают описание динамики удельного объема v в переменных (t, q).

В заключение отметим, что уравнение (11) допускает решение вида

$$v(t, q) = at + f_0(q),$$

где $f_0(q)$ — произвольная функция.

Действительно, $v_{tt} \equiv 0$, а оставшееся уравнение дает

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}\{\varphi(v) + \mu[\partial_t \ln(at + f_0(q))]^k\} = 0,$$

но

$$\partial_t \ln(at + f_0(q)) = \frac{a}{at + f_0(q)} = \frac{a}{v}.$$

Положим

$$\varphi(v) = -a^k \mu v^{-k},$$

тогда

$$pv^k = \mu a^k.$$

Это решение может быть интерпретировано как "ударная" волна с непрерывной скоростью.

Автор благодарит В. К. Андреева за обсуждение результатов статьи.

Список литературы

[1] Trusdell C., Noll W. The Non-linear Field Theories of Mechanics // Encyclopedia of Phys. / S. Flugge (ed). N. Y., B.: Springer-Verlag, 1965. Chap E.

[2] Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 142 с.

[3] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.

[4] Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[6] Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.

[7] Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.

[8] Чанг Д. Х. Реология в процессах переработки полимеров. М.: Химия, 1979. 366 с.

[9] Bytev V. O. Building of Mathematical Models of continuum Media on the Basis of the invariance Principle, Acta Applicandae Mathematical 16: 1989. N. Y.: Kluwer Acad. Publ. Printed in Netherlands. P. 117–142.

[10] Бытев В. О. Уравнения состояний чисто механического континуума // Математическое моделирование в механике: Тр. семинара. Красноярск: ИВМ СО РАН, 1999.

[11] Маслов В. П., Мосолов П. П. Уравнения одномерного баротропного газа. М.: Наука, 1990. 216 с.

[12] Янчевский С. А. Функции комплексного переменного. Л., 1934. 288 с.

[13] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.: Наука, 1970. 800 с.

[14] Жданов С. К., Трубников Б. А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.

[15] Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.

Поступила в редакцию 17 июля 2001 г.