

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ АДАПТИВНЫХ СЕТОК*

А. С. ЛЕБЕДЕВ, В. Д. ЛИСЕЙКИН, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ

Институт вычислительных технологий СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: sasa@ict.nsc.ru, liseikin@ict.nsc.ru, khak@ict.nsc.ru

A review of some theoretical and experimental investigations for generating adaptive structured and unstructured grids is given. The presented results are obtained in Institute of Computational Technologies of SB RAS.

Введение

Разработка методов построения адаптивных сеток для численного решения прикладных задач является актуальной проблемой вычислительной математики, привлекающей многих исследователей. Имеются многочисленные теоретические и экспериментальные результаты, показывающие преимущества использования таких сеток при решении сложных многомерных задач. Однако проблема полностью не решена, и в настоящее время отмечается неослабевающий поток новых публикаций, посвященных модификации известных и конструированию новых методов построения адаптивных сеток, а также созданию алгоритмов расчета на этих сетках.

Причина использования в расчетах адаптивных сеток кроется в желании повысить точность расчета, не увеличивая числа узлов. Как правило, точность численного решения в подобластях сосредоточения особенностей решения существенно влияет на точность решения во всей области. Поэтому сгущением сетки в таких подобластях можно повысить точность численного решения. С другой стороны, в целях экономии машинных ресурсов желательно иметь разреженную сетку в областях плавного изменения решения. Отсюда возникает потребность в использовании неравномерных сеток. В нестационарных задачах подобласти сосредоточения особенностей решения подвижны, следовательно, сетки, подстраивающиеся под решение, должны изменяться со временем. Такие сетки называются динамически адаптивными.

В статье представлен обзор основных подходов, используемых в ИВТ СО РАН, к разработке методов и алгоритмов построения многомерных адаптивных сеток. Развиваемые методы предполагается включить в программы для решения прикладных задач со сложной геометрией области и сложной структурой решения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№00–01–00899, 00–01–00900, 02–01–01029) и Программы интеграционных фундаментальных исследований СО РАН, грант №1.

© А. С. Лебедев, В. Д. Лисейкин, Г. С. Хахимзянов, 2002.

1. Адаптация неструктурированных сеток

Использование неструктурированных треугольных сеток при численном решении задач механики сплошной среды позволяет решать эти задачи в областях сложной формы. Для повышения точности численных алгоритмов желательно применять адаптивные неструктурированные сетки, которые сгущаются в подобластях, требующих повышенного разрешения.

При построении адаптивных неструктурированных сеток возникает ряд проблем, связанных с качественной триангуляцией области. Известные методы триангуляции отличаются друг от друга способами разрешения хотя и частных, но весьма важных вопросов, от чего в значительной степени и зависит суммарная эффективность алгоритма.

Процедура построения треугольной сетки, которую мы используем, начинается с расстановки узлов на границе расчетной области и их триангуляции. Затем следует добавление новых узлов и включение их в уже существующую триангуляцию. С каждым узлом связывается скалярный параметр, означающий рекомендуемое расстояние до соседних узлов. Этот параметр считается известным всюду в расчетной области либо задан только на границе, а во внутренних узлах находится интерполяцией или из решения некоторых уравнений.

Важной составной частью многих из подобных способов триангуляции является совокупность действий, направленных на то, чтобы в окончательной сетке фактические расстояния между узлами с возможно большей точностью совпадали с предписанными расстояниями и чтобы треугольники имели возможно более правильную форму. Это достигается согласованным действием нескольких процедур, выполняющих такие, например, функции, как вставка/удаление узлов, изменение их взаимного соединения, сглаживание сетки. Наш подход и результаты, которые он дает, следующие.

Процедура вставки (удаления) узлов начинается с определения величин

$$\delta_i = s_i/\bar{s}_i, \quad \Delta_p = \sum_{i=i_1}^{i_k} s_i / \sum_{i=i_1}^{i_k} \bar{s}_i,$$

где i_1, \dots, i_k — номера узлов, соседних с узлом p ; s_i — фактическая площадь треугольника (рис. 1); \bar{s}_i — площадь треугольника, найденная согласно рекомендуемым расстояниям. Если

$$\Delta_p > \sqrt{\frac{k+2}{k}}$$

и в окрестности ни одного из k соседних узлов не запланирован уже к вставке новый узел, то в треугольник, для которого величина δ_i является максимальной, будет добавлен новый узел. Если

$$\Delta_p < \sqrt{\frac{k-2}{k}}$$

и ни один из k соседних узлов не был помечен к удалению, то внутренний узел с номером p будет удален из триангуляции.

Новые положения узлов находятся итерациями из решения системы уравнений

$$\sum_{i=i_1}^{i_k} \mathbf{F}_i = 0,$$

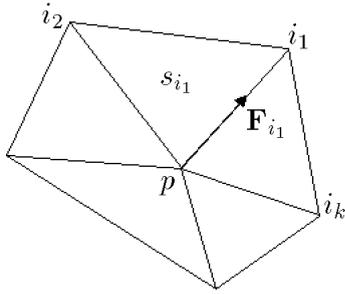


Рис. 1.

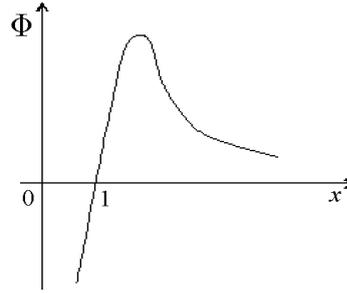


Рис. 2.

где вектор \mathbf{F}_i направлен от узла p к узлу i , а его длина определяется выражением

$$|\mathbf{F}_i| = \Phi(d_i/\bar{d}_i),$$

где d_i и \bar{d}_i — фактическое и рекомендуемое расстояния между узлами p и i . Функция $\Phi(x)$, показанная на рис. 2, устроена так, что соседний узел вынужден либо встать на предписанное расстояние, либо отодвинуться подальше, притянувшись к соседнему узлу и освободив место для вновь вставляемого узла.

Попеременное применение процедуры вставки/удаления узлов, ретриангуляции и процедуры движения узлов с указанной функцией $\Phi(x)$ не делает сетку немедленно гладкой, но главный результат состоит в том, что большинство узлов оказываются на требуемых расстояниях друг от друга. Внешний вид сетки в любой момент улучшается простым применением процедуры движения узлов с другой функцией $\Phi(x)$, которая задает монотонное притяжение узлов.

Хотя описанный способ генерации сетки не содержит в явном виде требования того, чтобы каждый узел имел предпочтительно 6 соседей, его применение к областям различной формы фактически приводило к триангуляции, в которой, как правило, только около 10% всех внутренних узлов имели число соседей, отличное от 6, даже когда строились сетки с сильно различающимся по области размером ячеек. Следует отметить, однако, что описанный способ не гарантирует идеальной триангуляции даже в случае, когда она возможна, т. е. когда, например, триангулируемая область является правильным треугольником с граничными узлами, расставленными на его сторонах на равном расстоянии друг от друга.

Квадрат				Круг			
Количество внутренних узлов	Доля узлов (%) с m соседями			Количество внутренних узлов	Доля узлов (%) с m соседями		
	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$		$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
61	16.4	70.5	13.1	47	12.8	78.7	8.5
272	8.1	84.6	7.3	210	10.0	82.4	7.6
1159	5.8	88.6	5.6	889	8.1	84.5	7.4
4774	5.1	89.9	4.9	3653	5.7	88.8	5.4
19203	5.3	89.5	5.2	14797	5.5	89.0	5.5
76908	5.3	89.4	5.3	59916	4.9	90.2	4.9

В таблице показано процентное соотношение узлов, имеющих 5, 6 и 7 соседей. Приведены результаты для сеток, построенных в круге и квадрате, для различных (умень-

шающихся в два раза от сетки к сетке) размеров ячеек, чем и определяется количество внутренних узлов.

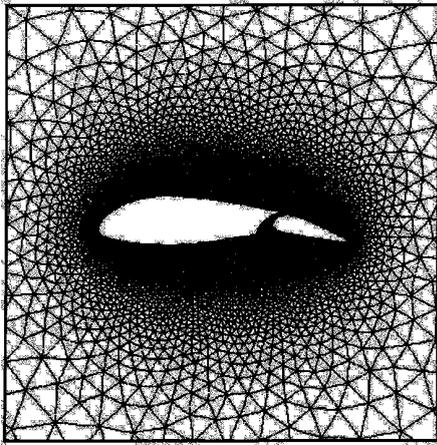


Рис. 3.

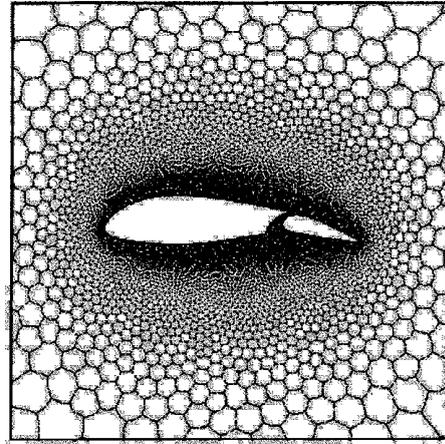


Рис. 4.

Разработанный метод построения адаптивной неструктурированной сетки использовался для решения задач аэродинамики в двумерном приближении. Результат применения описанной процедуры для триангуляции расчетной области в окрестности двухкомпонентного крылового профиля показан на рис. 3. Соответствующее разбиение области на конечные объемы приведено на рис. 4.

2. Адаптивный проекционно-сеточный метод

Сконструирован адаптивный проекционно-сеточный метод на нерегулярных сетках для решения двумерных эллиптических краевых задач. Сетка адаптируется как к особенностям решения типа внутренних и/или пограничных слоев, так и к геометрии области, в которой вычисляется решение. Полученный метод обладает высокой эффективностью и надежностью и позволяет быстро и достаточно точно находить приближенные решения жестких краевых задач.

В этом методе для получения численного решения вводится триангуляция области. Приближенное решение ищется в виде кусочно-квадратичной в каждом треугольнике функции. На каждой границе треугольника задаются условия согласования типа условий непрерывности решения и его нормальной производной при переходе через границу. После вычисления кусочно-квадратичного решения на текущей сетке эта сетка измельчается в местах, где это необходимо для уточнения решения. Для определения ячеек, которые необходимо разделить, вычисляется локальная оценка погрешности — разность между полученным кусочно-квадратичным решением и так называемым “уточненным” решением, которое отыскивается с помощью кубического в треугольнике многочлена с коэффициентами, определяемыми с помощью метода коллокаций — наименьших квадратов. В результате локального измельчения ячеек в процессе решения задачи выстраивается сетка, адаптирующаяся к особенностям решения и к особенностям области. Отличительной чертой разработанного проекционно-сеточного метода является устойчивая работа на сетках с сильно вытянутыми ячейками. Проведено исследование влияния на устойчивость

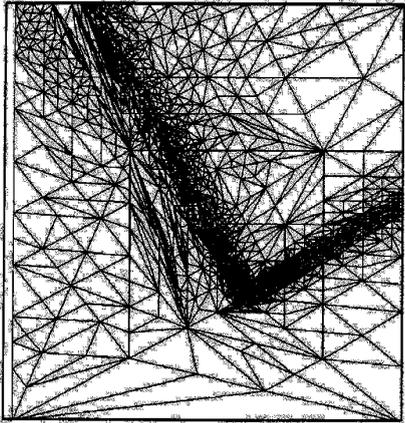


Рис. 5.

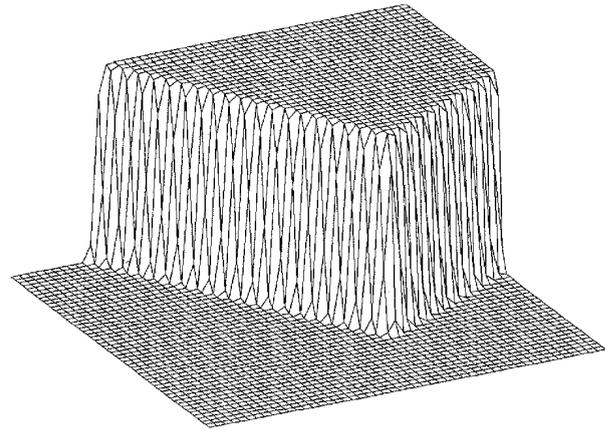


Рис. 6.

проекционно-сеточных методов на нерегулярных сетках различных условий согласования приближенного решения в соседних ячейках. Получены необходимые условия согласования.

На ряде модельных задач типа диффузии — конвекции с малым параметром при старших производных, в решениях которых присутствуют внутренние и/или пограничные слои, показаны высокая точность, надежность и быстродействие предложенного метода [1–5]. На рис. 5 показана сетка для одной из модельных задач типа диффузии — конвекции. Численное решение, полученное на этой сетке, с точностью до 1% в равномерной норме совпадает с точным решением, имеющим внутренний слой и изображенным на рис. 6.

На рис. 7, 8 показаны соответственно сетка и точное решение уравнения Гельмгольца в области сложной многоугольной формы с условиями трех типов на разных частях границы. Решение имеет пограничные слои, примыкающие к границе области.

Было рассмотрено также большое количество других задач, в том числе и задач в более сложных областях и с разрывными коэффициентами в уравнениях. Численные эксперименты показали, что предложенный новый метод позволяет получать хорошие результаты на существенно более широком множестве сеток, чем хорошо известные методы конечных элементов.

Предложенный проекционно-сеточный метод на треугольных сетках для эллиптических задач явился основой для решения многих прикладных задач. В частности, на его

основе разработан адаптивный метод решения двумерных стационарных задач для уравнений Навье — Стокса.

3. Разработка универсального метода построения сеток

Основными классическими теориями, применяемыми при разработке методов построения адаптивных разностных сеток, являются теории дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления и многомерной дифференциальной геометрии.

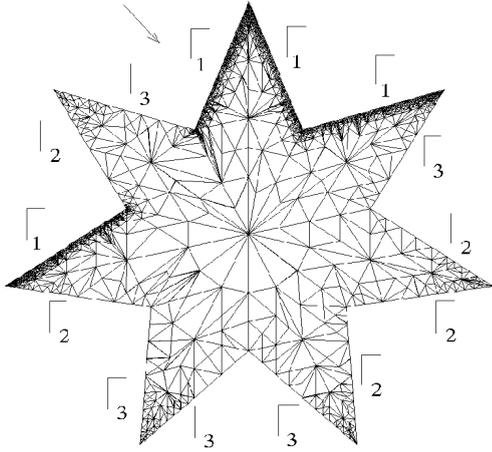


Рис. 7.

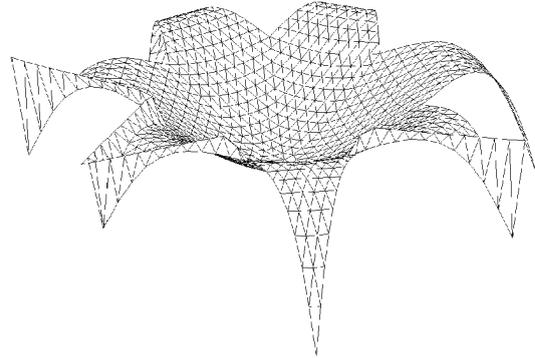


Рис. 8.

Методы дифференциальных уравнений и вариационного исчисления используются для формулировки математических моделей построения сеток, а также для их обоснования и анализа. Такие геометрические понятия, как элементы метрических тензоров, геодезическая кривизна и кручение линий, средняя и гауссова кривизны поверхностей, а также символы Кристоффеля поверхностей и областей, находят широкое применение при описании геометрических свойств ячеек сеток. А геометрические и тензорные соотношения позволяют унифицированно преобразовывать физические и сеточные уравнения в форму, удобную для численного анализа. Работы [6–8] положили начало внедрению теории более сложных геометрических объектов, таких как многомерные поверхности и римановы многообразия, в методику построения адаптивных сеток. В данном параграфе приведены результаты применения этих теорий для формулировки и разработки универсального метода конструирования адаптивных сеток в областях и на поверхностях.

3.1. Формулировка математической модели

Для унификации процесса создания математических моделей построения сеток физическую область, кривую, а также поверхность принято рассматривать как единый геометрический объект, называемый n -мерной поверхностью, заданный локально в параметрическом виде

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}, \quad \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{n+k}), \quad \mathbf{s} = (s^1, \dots, s^n), \quad n \geq 1, \quad k \geq 0, \quad (3.1)$$

где \mathbb{R}^{n+k} — $(n+k)$ -мерное евклидово пространство; $S^n \subset \mathbb{R}^n$ — n -мерная параметрическая область (отрезок при $n = 1$), а $\mathbf{x}(\mathbf{s})$ — гладкая вектор-функция ранга n во всех точках S^n . Поверхность, представленная (3.1), обозначается через S^{xn} . При этом процесс построения структурной разностной сетки на S^{xn} сводится к нахождению промежуточного взаимно однозначного гладкого преобразования

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi}) : \Xi^n \rightarrow S^n, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n) \quad (3.2)$$

между эталонной вычислительной областью $\Xi^n \subset \mathbb{R}^n$ и областью параметризации S^n [8], а разностная сетка на S^{xn} получается путем отображения равномерной сетки в Ξ^n с помощью композиции

$$\mathbf{x}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})] : \Xi^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}.$$

Переменные ξ^1, \dots, ξ^n в Ξ^n , формирующие разностную сетку на S^{xn} , называются сеточными координатами. Координатная $(n-1)$ -мерная поверхность $\xi^i = \text{const}$ на S^{xn} называется сеточной гиперповерхностью.

Элементы ковариантного метрического тензора поверхности S^{xn} в координатах s^1, \dots, s^n , заданных параметризацией (3.1), и в координатах ξ^1, \dots, ξ^n , определенных композицией параметризаций (3.1) и (3.2), вычисляются соответственно

$$g_{ij}^{xs} = \mathbf{x}_{s^i} \cdot \mathbf{x}_{s^j}, \quad g_{ij}^{x\xi} = \frac{\partial \mathbf{x}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]}{\partial \xi^i} \frac{\partial \mathbf{x}[\mathbf{s}(\boldsymbol{\xi})]}{\partial \xi^j}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Универсальной математической моделью для построения разностных сеток является система уравнений Бельтрами (функционал энергии или гладкости [6, 8] в вариационной формулировке) относительно сеточных координатных функций $\xi^i(\mathbf{s})$ в метрике, заданной на S^{xn} . При этом метрика, с помощью которой осуществляется конструирование адаптивных сеток с необходимыми свойствами, при обозначении через g_{ij}^v в координатах v^1, \dots, v^n , определяется следующим образом:

$$g_{ij}^v = z(\mathbf{v})g_{ij}^{xv} + v(\mathbf{v}) \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial v^i} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{v})}{\partial v^j}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

где g_{ij}^{xv} — метрика (3.3) в координатах v^1, \dots, v^n ; $z(\mathbf{v})$, $v(\mathbf{v})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{v}) = (f^1(\mathbf{v}), \dots, f^k(\mathbf{v}))$ — мониторные функции, задаваемые пользователем.

Преобразование $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{s})$, являющееся обратным к промежуточному преобразованию (3.2), находится из решения системы уравнений Бельтрами в метрике (3.4):

$$\Delta_B[\xi^i] \equiv \frac{1}{\sqrt{g^s}} \frac{\partial}{\partial s^j} \left(\sqrt{g^s} g_s^{kj} \frac{\partial \xi^i}{\partial s^k} \right) = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n, \quad (3.5)$$

где g_s^{kj} — (kj) -й элемент контравариантного мониторного метрического тензора в координатах s^1, \dots, s^n , а $g^s = \det(g_{ij}^s)$.

Уравнения Бельтрами (3.5) были сформулированы для конструирования адаптивных сеток в областях и на поверхностях в [6, 9]. А форма (3.4) мониторной метрики была введена в [9]. Эта метрика обобщает естественную метрику мониторной поверхности [6], являющейся графиком некоторой мониторной функции $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ на S^{xn} , совпадающей с решением физической задачи либо качественно описывающей его. А именно, мониторные функции в (3.4) для естественной метрики должны быть

$$z(\mathbf{s}) = v(\mathbf{s}) = 1, \quad \mathbf{f}(\mathbf{s}) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(\mathbf{s})]. \quad (3.6)$$

Для нахождения узлов разностной сетки на S^{xn} уравнения (3.5) переписываются относительно функций $s^i(\boldsymbol{\xi})$, $i = 1, \dots, n$, являющихся компонентами промежуточного преобразования (3.2), и затем численно решаются на равномерной сетке в Ξ^n . Эти трансформированные уравнения относительно зависимых переменных s^i и независимых ξ^j имеют, согласно [10, 11], вид

$$L[s^l] = \Delta_B[s^l], \quad l = 1, \dots, n,$$

где L — эллиптический оператор, значение которого на функции $v(\boldsymbol{\xi})$ задается формулой

$$L[v] = \sum_{j,k=1}^n g_{\xi^j \xi^k}^{kj} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^k \partial \xi^j}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

В случае естественной параметризации (3.6) мониторной поверхности эти уравнения преобразуются, согласно [11], в

$$L[s^l] + L[\mathbf{f}]\mathbf{f}_{s^l} = 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

3.2. Обоснование математической модели

Система уравнений (3.5) является универсальной математической моделью для построения структурных сеток, что объясняется следующими фактами.

1. Эти уравнения линейные и эллиптические, поэтому краевая задача Дирихле для них корректна.

2. Уравнения Бельтрами инвариантны относительно выбора координатной системы в S^{xn} , что гарантирует построение единой сетки независимо от выбора параметризации (3.1). Отметим, что сетка, полученная из решения популярных уравнений Пуассона, как и уравнений диффузии, может различаться при разных параметризациях поверхности S^{xn} .

3. Вследствие дивергентности уравнения (3.5) удовлетворяют принципу максимума. Поэтому при выпуклой вычислительной области Ξ^n узлы сетки будут всегда внутри физической области или поверхности. Более того, для $n = 2$ верна теорема о невырожденности преобразования $\xi(\mathbf{s})$, полученного из решения задачи Дирихле для системы уравнений (3.5), в том случае, когда вычислительная область Ξ^2 выпуклая, а заданное краевое отображение непрерывно и взаимно однозначно между границами S^{x2} и Ξ^2 . Предполагается, что подобная теорема верна и для $n > 2$, хотя доказательство еще неизвестно. Указанные свойства оправдывают формулировку уравнений Бельтрами относительно функции $\xi(\mathbf{s})$, а не относительно $\mathbf{s}(\xi)$. В последнем случае получается линейная дивергентная система относительно искомого промежуточного преобразования (3.2), однако такая дивергентная модель не гарантирует попадания всех узлов сетки внутрь невыпуклой физической области, не говоря уже о невырожденности преобразования (3.2).

4. Уравнения (3.5) обеспечивают построение любой невырожденной структурной сетки, так как в [11] было показано, что произвольное невырожденное преобразование (3.2) класса $C^2[\Xi^n]$ реализуется как обратное к решению (3.5) с помощью специального задания мониторных функций в (3.4). В частности, двумерное преобразование

$$s^1 = b(\xi^1) \cos \xi^2, \quad s^2 = b(\xi^1) \sin \xi^2,$$

если $b'(\xi^1) > 0$, для полярной системы координат реализуется с помощью (3.5) с метрикой (3.4) при

$$z(\mathbf{s}) = 1/\rho^2, \quad g_{ij}^{xs} = \delta_j^i, \quad w(\mathbf{s}) = z(\mathbf{s}) \left[\frac{1}{[b'(b^{-1}(\mathbf{s})\xi^1)]^2} - z(\mathbf{s}) \right], \quad f(\mathbf{s}) = \rho^2/2,$$

где $\rho^2 = (s^1)^2 + (s^2)^2$.

5. Уравнения (3.5) эквивалентны уравнениям Эйлера — Лагранжа для функционала энергии (гладкости [6–8])

$$I[\xi] = \frac{1}{2} \int_{S^n} \sqrt{g^s} g_s^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial s^k} \frac{\partial \xi^i}{\partial s^l} ds, \quad i, k, l = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Поэтому построение сетки на S^{xn} может быть также осуществлено с помощью численного решения обращенного функционала, переписанного относительно функции $\mathbf{s}(\xi)$:

$$I[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \int_{\Xi^n} \sqrt{g^\xi} g_\xi^{ii} d\xi, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $g^{\xi} = \det(g_{ij}^{\xi})$.

Методика построения разностных сеток на основе решения уравнений Бельтрами является обобщением известного метода эквираспределения [8] путем замены весовой скалярной функции метрическим тензором, а эллиптические дивергентные уравнения — уравнениями Бельтрами.

Все еще слабо изученными теоретическими вопросами универсального подхода в построении сеток являются установление связей между геометрическими характеристиками римановой метрики и характеристиками сеток, а также определение мониторинговых функций, задающих необходимую мониторинговую метрику (3.4) для обеспечения требуемых свойств сеток.

3.3. Результаты

В работах [9, 11, 12] методы римановой дифференциальной геометрии применяются для исследования такой важной характеристики адаптации сеток, как скорость изменения относительного расстояния между сеточными поверхностями. Эта характеристика является мерой сгущения узлов координатных сеток в направлении нормали к координатной поверхности. Установлено, что такая мера сгущения узлов определяется через значения оператора Бельтрами на функциях сеточных координат и через среднюю кривизну (геодезическую кривизну при $n = 2$) сеточных гиперповерхностей. Хорошо известные факты для сеток, полученных решением обращенных уравнений Лапласа, о сгущении их узлов возле вогнутых участков границы и разрежении возле выпуклых частей границы физической области, обобщаются на сетки, генерированные на произвольных n -мерных поверхностях с помощью этих и других распространенных эллиптических уравнений, таких как обращенные уравнения Пуассона, диффузии или уравнения Бельтрами. Показано, как с помощью полученных соотношений реализуется проблема задания мониторинговых функций, обеспечивающих контролирование сеток возле граничных участков физических областей или поверхностей.

В [11] показано, что уравнения (3.5) также включают среднюю кривизну, но уже мониторинговой (управляющей) поверхности, введенной в [6, 7] для построения адаптивных сеток с помощью как уравнений Бельтрами (3.5), так и функционала гладкости (3.7). Таким образом, средняя кривизна (геодезическая кривизна при $n = 2$) является важной геометрической величиной при описании математических моделей построения сеток и анализе их качества.

Разнообразные алгебраические, геометрические и физические интерпретации уравнений Бельтрами (3.5) и функционала гладкости (3.7) обсуждены в [8, 13, 14].

В работах [15, 16] проведен анализ возможных мониторинговых поверхностей, обеспечивающих построение адаптивных разностных сеток для численного решения задач с особенностями. Исследованы все типы сингулярностей, порождаемых точками поворота и малым параметром в сингулярно возмущенных дифференциальных уравнениях. На основе теоретических результатов разработан алгебраический метод построения адаптивных структурных и неструктурированных сеток, использующий четыре эталонных растягивающих преобразования координат [10, 14, 17]. Такие сетки эффективны для численного решения уравнений с сингулярностями и для задания начального приближения при построении сеток с помощью решения универсальных уравнений Бельтрами (3.5) итерационными алгоритмами. Пример подобной сетки приведен на рис. 9.

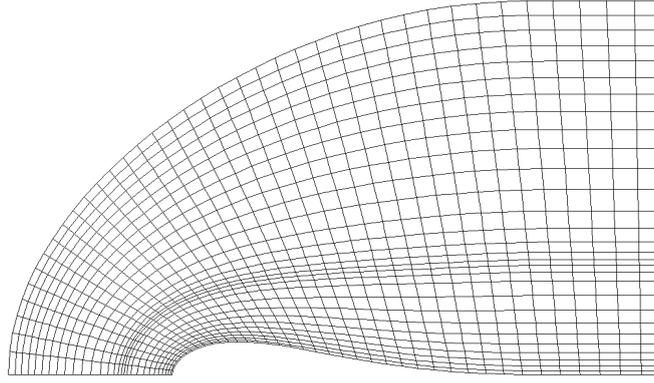


Рис. 9. Пример адаптивной сетки.

4. Метод эквираспределения для построения регулярных адаптивных сеток

Разработан метод эквираспределения для построения неподвижных [18, 19] и подвижных [20] регулярных сеток, адаптирующихся как к криволинейным границам области течения, так и к некоторой априорно заданной в этой области управляющей функции. При едином подходе, в основе которого лежит принцип эквираспределения, получены нелинейные уравнения эллиптического типа для вычисления координат узлов сетки как внутри области, так и на ее границах, разработаны конечно-разностные алгоритмы решения уравнений для сетки и созданы программы построения сеток методом эквираспределения [21, 22].

Сетки, построенные методом эквираспределения, использовались при решении одномерных, двумерных и трехмерных задач волновой гидродинамики. Для трехмерных задач, например, предполагается, что невырожденное преобразование координат

$$x^\alpha = x^\alpha(q^1, q^2, q^3, t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4.1)$$

устанавливает в каждый момент времени t взаимно однозначное соответствие между трехмерной физической областью $\Omega(t)$ и вычислительной неподвижной областью Q простой формы. Для многих задач в качестве Q можно брать единичный куб. В общем случае в качестве вычислительной области использовалась часть единичного куба, составленная из прямоугольных параллелепипедов. Переход к криволинейным координатам позволяет упростить расчет около подвижных границ, в частности около подвижной криволинейной свободной поверхности, поскольку в новых координатах свободная поверхность является уже неподвижной и плоской.

Уравнения метода эквираспределения для построения адаптивных сеток получены из известного тождества тензорного анализа

$$\frac{\partial}{\partial q^\gamma} \left(J \bar{g}^{\gamma\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^\beta} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

В основе метода лежит принцип эквираспределения: произведение площади или объема ячейки на значение заданной управляющей функции w в центре ячейки должно быть для всех ячеек в данный момент времени величиной постоянной:

$$(wS)_{j+1/2} = C(t). \quad (4.3)$$

Принцип эквираспределения (4.3) задает наглядную зависимость сгущения сетки в определенных подобластях от тех свойств решения, которые учтены в управляющей функции w . Уравнения метода эквираспределения для построения трехмерных сеток

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(g_{22} g_{33} w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(g_{11} g_{33} w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^2} \right) + \frac{\partial}{\partial q^3} \left(g_{11} g_{22} w \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^3} \right) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

получены из тождества (4.2) при дополнительных предположениях, что искомое отображение (4.1) вычислительной области на физическую удовлетворяет условию ортогональности и принципу эквираспределения в дифференциальной форме.

В одномерном случае аналог такого уравнения использовался впервые, видимо, в работе [23], но это уравнение оказалось непригодным для построения сеток в нестационарных задачах. Численные эксперименты на одномерных нестационарных задачах, проведенные рядом авторов, выявили такие недостатки классического метода эквираспределения, как осцилляции траекторий узлов, немонотонность изменения длин соседних ячеек сетки и др. Эти недостатки устраняются при использовании для нестационарных задач модифицированного варианта метода, предложенного в [24] и проверенного на одномерных задачах газовой динамики. В нем для вычисления координат узлов на новом временном слое используется конечно-разностный аналог эволюционного уравнения

$$(w(x, t)x_q)_q = \beta x_t. \quad (4.5)$$

Таким образом, при построении сетки на данном временном слое учитывается расположение ее узлов на предыдущем слое.

Этот модифицированный метод эквираспределения был обобщен на многомерный случай. К примеру, метод построения двумерных подвижных сеток (ED2-метод), адаптирующихся к решению на каждом шаге по времени, основан на решении уравнений

$$\frac{\partial}{\partial q^1} \left(w g_{22}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{x}^{n+1}}{\partial q^1} \right) + \frac{\partial}{\partial q^2} \left(w g_{11}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{x}^{n+1}}{\partial q^2} \right) = \beta \frac{\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n}{\tau}, \quad (4.6)$$

аналогичных уравнению (4.5) для вычисления координат узлов одномерной подвижной сетки.

Положение узлов на границе области также меняется при переходе от одного временного шага к другому. Для вычисления их координат разработан метод эквираспределения для построения подвижных сеток на плоских или пространственных кривых, а также на поверхностях, заданных в параметрической форме, с использованием той же управляющей функции w , что и внутри области.

В качестве примера на рис. 10 показана сетка в различные моменты времени, которая использована при решении начально-краевой задачи для двумерного линейного уравнения переноса с переменными коэффициентами о вращении вокруг начала координат эллипсоидальной “шапочки” с малым носителем. Разработанный метод эквираспределения обеспечивает сгущение узлов в нужных подобластях и, как следствие, приводит к существенному повышению точности численного решения на подвижной адаптивной сетке по сравнению с решением на неподвижной равномерной сетке.

Осуществлено всестороннее тестирование алгоритмов расчета на подвижных сетках, в частности на двумерных задачах о накате уединенной волны на вертикальную стенку (рис. 11, 12), задаче о накате уединенной волны на вертикальную стенку, к которой прижимается подводный плоский откос, а также на наклонную плоскую стенку, в том числе и наклоненную навстречу набегающей волне.

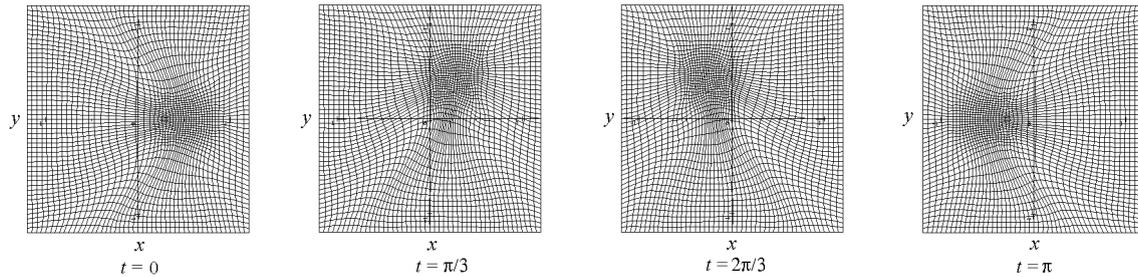


Рис. 10. Подвижная сетка, построенная с помощью ED2-метода.

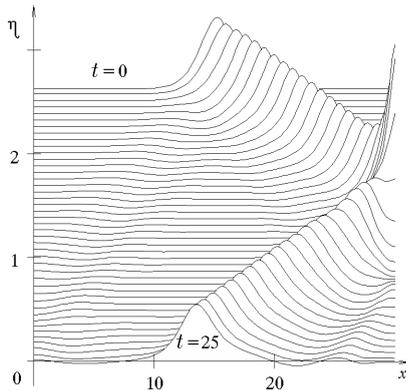
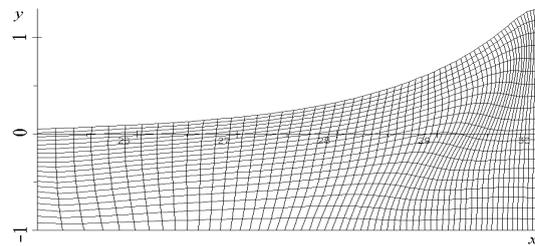
Рис. 11. Динамика наката уединенной волны амплитуды $a = 0.7$ на вертикальную стенку.

Рис. 12. Сетка в окрестности стенки.

Разработанные алгоритмы построения двумерных адаптивных сеток использовались и при численном решении задач о течениях жидкости с поверхностными гравитационными волнами в каналах сложной конфигурации, в речных руслах со сложной формой береговой линии и неровным дном, а также при численном моделировании обтекания островов, расположенных в речном русле со сложными очертаниями береговой линии.

На тестовых задачах показано, что на адаптивных к решению трехмерных сетках точность численного решения заметно повышается по сравнению с решением, полученным на сетках, адаптирующихся только к геометрии области. На рис. 13 показаны результаты численного решения на адаптивных сетках одной из тестовых задач — трехмерной задачи о распространении и трансформации уединенной волны в модельной бухте с искривленной береговой линией и неровным дном.

В рамках нелинейно-дисперсионной модели и трехмерной модели потенциальных течений с использованием динамически адаптивных сеток проведено детальное численное исследование косоугольного взаимодействия уединенной волны с вертикальной стенкой [25] (рис. 14). Оказалось, что при использовании адаптивных сеток амплитуда и форма набегающей волны изменяются незначительно даже при прохождении волной расстояния порядка 30 ее длин.

Разработанные методы построения двумерных и трехмерных адаптивных сеток применялись при решении и многих других задач, связанных с моделированием поверхностных гравитационных волн в прибрежной зоне с учетом реальной геометрии береговой линии, формы дна и сооружений. В частности, исследована трансформация поверхностных волн в ограниченных естественных и искусственных водоемах со сложной геометрией берего-

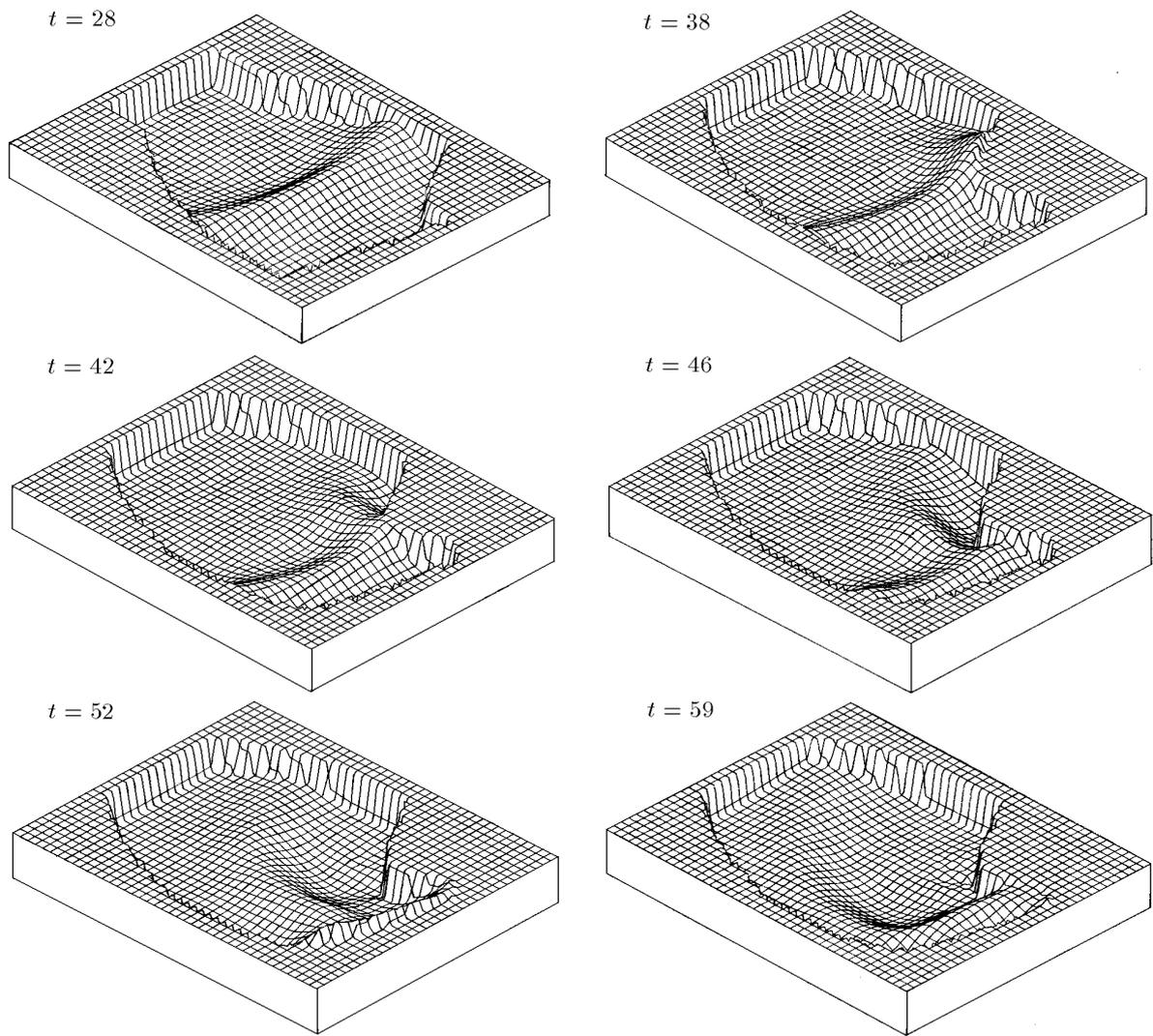


Рис. 13. Трансформации уединенной волны в модельной бухте.

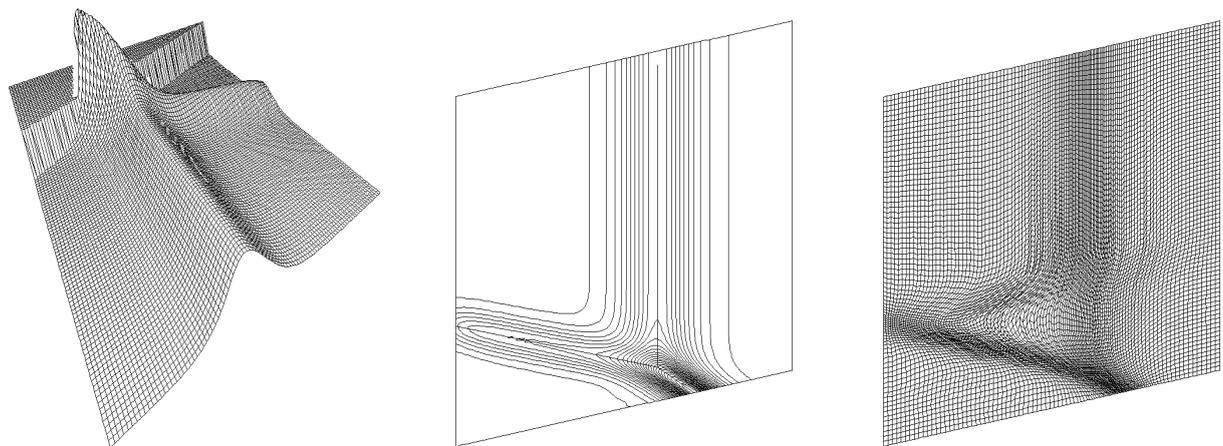


Рис. 14. Свободная поверхность, ее изолинии и сетка на свободной поверхности в соответствующий момент времени.

вой линии и неровным дном, исследовано воздействие волн на частично погруженные в жидкость тела, проведено моделирование колебаний жидкости в сосудах. Подробное описание результатов расчетов имеется в монографии [20]. Там же содержится библиография работ по этому направлению.

Список литературы

- [1] СЛЕПЦОВ А. Г., ШОКИН Ю. И. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Докл. РАН. 1995. Т. 347, №2. С. 164–167.
- [2] СЛЕПЦОВ А. Г., ШОКИН Ю. И. Адаптивный проекционно-сеточный метод для эллиптических задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1997. Т. 37, №5. С. 572–586.
- [3] SHOKIN YU. I., SLEPTSOV A. G. Grid-projection method with small angles in the cells // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1995. Vol. 10, No. 5. P. 449–462.
- [4] SLEPTSOV A. G. Grid-projection solution of an elliptic problem for an irregular grid // Ibid. 1993. Vol. 8, No. 6. P. 519–543.
- [5] SLEPTSOV A. G., SHOKIN YU. I. An adaptive grid-projection method for elliptic problems // Comp. Mathematics and Mathematical Phys. 1997. Vol. 37, No. 5. P. 558–571.
- [6] ЛИСЕЙКИН В. Д. О построении регулярных сеток на n -мерных поверхностях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, №11. С. 1670–1683.
- [7] ЛИСЕЙКИН В. Д. О вариационном методе построения адаптивных сеток на n -мерных поверхностях // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, №3. С. 546–549.
- [8] LISEIKIN V. D. Grid generation methods. B. N. Y.: Springer-Verl., 1999.
- [9] LISEIKIN V. D. Analysis of grids derived by a comprehensive grid generator // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. Vol. 17, No. 2 (в печати).
- [10] LISEIKIN V. D. Layer Resolving Grids and Transformations for Singular Perturbation Problems. VSP, Utrecht, 2001.
- [11] LISEIKIN V. D. Application of notions and relations of differential geometry to grid generation // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2001. Vol. 16, No. 1. P. 57–75.
- [12] ЛИСЕЙКИН В. Д. О геометрическом анализе свойств разностных сеток // Докл. РАН. 2002. Т. 383, №2. С. 167–170.
- [13] ЛИСЕЙКИН В. Д., ПЕТРЕНКО В. Е. О построении адаптивных сеток методом проекций // Там же. 1996. Т. 349, №1. С. 13–16.
- [14] LISEIKIN V. D. Algebraic adaptation based on stretching functions // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1998. Vol. 13, No. 4. P. 307–324.
- [15] ЛИСЕЙКИН В. Д. О численном решении сингулярно возмущенных задач с точками поворота // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, №1. С. 57–85.

- [16] ЛИСЕЙКИН В. Д. О методе координатных преобразований для численного решения сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2000. Т. 374, №6. С. 744–748.
- [17] ЛИСЕЙКИН В. Д. Метод алгебраической адаптации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1998. Т. 38, №10. С. 1692–1709.
- [18] ХАКИМЗЯНОВ Г. С., ШОКИНА Н. Ю. Метод эквираспределения для построения адаптивных сеток // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, №6. С. 63–81.
- [19] КНАКИМЗЯНОВ G. S., SHOKINA N. YU. Equidistribution method for the construction of adaptive grids // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. Vol. 14, No. 4. P. 339–358.
- [20] ХАКИМЗЯНОВ Г. С., ШОКИН Ю. И., БАРАХНИН В. Б., ШОКИНА Н. Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
- [21] МОЛОРОДОВ Ю. И., ХАКИМЗЯНОВ Г. С. Построение и оценка качества регулярных сеток для двумерных областей // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Мат. моделирование физ. процессов. 1998. Вып. 1. С. 19–27.
- [22] ЛИСЕЙКИН В. Д., МОЛОРОДОВ Ю. И., ХАКИМЗЯНОВ Г. С. Об интерактивном комплексе программ построения двумерных структурных сеток // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, №1. С. 70–84.
- [23] BOOR C. Good approximation by splines with variable knots. II // Lecture Notes in Mathematics. 1974. Vol. 363. P. 12–20.
- [24] ШОКИН Ю. И., ЯНЕНКО Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
- [25] БАРАХНИН В. Б., ХАКИМЗЯНОВ Г. С. Численное моделирование косоугольного отражения волны // ПМТФ. 1999. Т. 40, №6. С. 17–25.
- [26] LISEIKIN V. D. On some interpretations of smoothness functional used in constructing regular and adaptive grids // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. Vol. 8, No. 6. P. 507–518.

Поступила в редакцию 12 апреля 2002 г.